

DVODIMENZIONALNI SIGNALI I SISTEMI

OSNOVNI DVODIMENZIONALNI SIGNALI

Iako dvodimenzionalni signali mogu da se posmatraju u zavisnosti od bilo koje dvije nezavisne varijable, sa stanovišta obrade slike interesantno je posmatrati ove signale u prostoru. Osnovni dvodimenzionalni diskretni signali su:

jedinična odskočna sekvenca

$$u[m,n] = \begin{cases} 1, & m, n \geq 0 \\ 0, & \text{drugdje.} \end{cases}$$

jedinična impulsna sekvenca

$$\delta[m,n] = \begin{cases} 1, & m = n = 0 \\ 0, & \text{drugdje.} \end{cases}$$

eksponencijalna sekvenca

$$e[m,n] = \begin{cases} A\alpha^m \beta^n, & m, n \geq 0 \\ 0, & \text{drugdje.} \end{cases}$$

Dvodimenzionalne skvence su periodične sa prostornim periodima M i N ako vrijedi:

$$x[m,n] = x[m+M,n] = x[m,n+N], \quad \forall m,n.$$

Za dvodimenzionalne skvence kažemo da su separabilne ako zadovoljavaju uslov:

$$x[m,n] = f_{col}[m]g_{row}[n].$$

LINEARNI VREMENSKI I PROSTORNO INVARIJANTNI DVODIMENZIONALNI SISTEMI

Dvodimenzionalni sistem se može posmatrati kao operator koji transformiše ulazni dvodimenzionalni signal u izlazni dvodimenzionalni signal:

$$y[m,n] = \mathcal{T} \{x[m,n]\}.$$

Ako dvodimenzionalni sistem zadovoljava osobinu aditivnosti i homogenosti kažemo da se radi o linearnom sistemu:

$$\mathcal{T} \left\{ \sum_{i=1}^K a_i x_i[m, n] \right\} = \sum_{i=1}^K a_i y_i[m, n].$$

Ako vrijedi da je

$$\mathcal{T} \{ x[m - m_1, n - n_1] \} = y[m - m_1, n - n_1]$$

kažemo da je sistem prostorno invarijantan.

Dvodimenzionalni sistem se može okarakterisati svojim impulsnim odzivom:

$$h[m, n; k, l].$$

Za impulsni odziv prostorno invarijantnog sistema vrijedi:

$$h[m, n; k, l] = \mathcal{T} \{ \delta[m - k, n - l] \} = h[m - k, n - l].$$

Dvodimenzionalna konvolucija

Odziv linearnog vremenski invarijantnog dvodimenzionalnog sistema je dat konvolucionom sumom:

$$\begin{aligned} y[m, n] &= \mathcal{T} \{ x[m, n] \} = \mathcal{T} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[k, l] \delta[m - k, n - l] \right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[k, l] \mathcal{T} \{ \delta[m - k, n - l] \} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[k, l] h[m, n; k, l] \end{aligned}$$

Kod vremenski i prostorno invarijantnih sistema, konvoluciona suma ima oblik:

$$y[m, n] = \mathcal{R} \{ x[m, n] \} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[k, l] h[m - k, n - l] = x[m, n] * h[m, n].$$

Ako se radi sa sekvencama konačnih dužina:

$$\begin{aligned} x[m, n] \neq 0, \quad 0 \leq m, n \leq N - 1, \quad h[m, n] \neq 0, \quad 0 \leq m, n \leq M - 1, \quad y[m, n] \neq 0, \quad 0 \leq m, n \leq N + M - 2, \\ x[m, n] = 0, \quad \text{drugdje}, \quad h[m, n] = 0, \quad \text{drugdje}, \quad y[m, n] = 0, \quad \text{drugdje}. \end{aligned}$$

za direktno računanje konvolucije potrebno je $(N + M - 1)^2 M^2$ aritmetičkih operacija (sabiranja i množenja).

Kod separabilnih sistema, za koje vrijedi da se impulsni odziv može napisati u obliku:

$$h[m, n] = h_m[m] h_n[n]$$

$$h_m[m] \neq 0, \quad 0 \leq m \leq M-1 \quad h_n[n] \neq 0, \quad 0 \leq n \leq M-1$$

$$h_m[m] = 0, \quad \text{inače,} \quad h_n[n] = 0, \quad \text{inače}$$

za izračunavanje:

$$y[m, n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_m[m-k] \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[k, l] h_n[n-l] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_m[m-k] f[k, n]$$

potrebno je $M(N+M-1)^2$ operacija, dok je za izračunavanje:

$$f[k, n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[k, l] h_n[n-l] = x[k, n] * h_n[n]$$

potrebno $MN(N+M-1)$ operacija, te je ukupan broj operacija za računanje konvolucije $MN(N+M-1) + M(N+M-1)^2$. U slučajevima koji su česti u praksi, kada je $N \gg M$, broj operacija je smanjen $M/2$ puta.

Iako ćemo uglavnom raditi sa diskretnim signalima i sistemima, nije naodmet povući paralelu sa kontinualnim signalima i sistemima. Ako posmatramo dvodimenzionalni sistem za obradu slike i ako sa a i b označimo ulaznu sliku i impulsni odziv sistema, onda je konvolucija u 2D kontinualnom prostoru definisana sa:

$$c(x, y) = a(x, y) * b(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(\chi, \xi) b(x - \chi, y - \xi) d\chi d\xi,$$

a u 2D diskretnom prostoru sa

$$c[n_1, n_2] = a[n_1, n_2] * b[n_1, n_2] = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} a[k_1, k_2] b[n_1 - k_1, n_2 - k_2].$$

Najvažnije osobine konvolucije su:

- komutativnost
 $c = a * b = b * a$
- asocijativnost
 $c = a * (b * d) = (a * b) * d = a * b * d$
- distributivnost
 $c = a * (b + d) = a * b + a * d$

gdju su a, b, c i d dvodimenzionalni signali, odnosno slike, bilo kontinualne ili diskretne.

Dvodimenzionalna Furijeova transformacija

Fourijeova transformacija predstavlja signal sumom kompleksnih eksponencijala. U 2D kontinualnom prostoru Furijeov transformacioni par čine direktna i inverzna Furijeova transformacija date sa:

$$A(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(x, y) e^{-j(ux+vy)} dx dy,$$

$$a(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(u, v) e^{j(ux+vy)} du dv,$$

Gdje su sa u i v su označene prostorne frekvencije.

Furijeova transformacija diskretnih dvodimenzionalnih signala je

$$A(\omega_m, \omega_n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[m, n] e^{-j(m\omega_m + n\omega_n)},$$

a odgovarajuća inverzna transformacija:

$$a[m, n] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} A(\omega_m, \omega_n) e^{j(m\omega_m + n\omega_n)} d\omega_m d\omega_n,$$

gdje su ω_m i ω_n prostorne frekvencije.

U 2D diskretnom prostoru transformacioni par diskretne Furijeove transformacije (DFT) je dat sa:

$$A[m_1, m_2] = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} a[n_1, n_2] e^{-j\frac{2\pi}{N_1}n_1m_1} e^{-j\frac{2\pi}{N_2}n_2m_2},$$

$$a[n_1, n_2] = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} A[m_1, m_2] e^{j\frac{2\pi}{N_1}n_1m_1} e^{j\frac{2\pi}{N_2}n_2m_2},$$

gdje N_1 i N_2 predstavljaju brojeve tačaka u kojima se računa 2D DFT koji moraju biti veći od dimenzija slike u 2D prostoru.

Važne osobine 2D Furijeove transformacije su:

- Furijeova transformacija je, u opštem slučaju, kompleksna funkcija realne varijable (frekvencije), te se može predstaviti amplitudnom i faznom karakteristikom:

$$A[m_1, m_2] = |A[m_1, m_2]| e^{j\theta[m_1, m_2]}$$

- 2D originalni signal takođe može biti kompleksan i predstavljen svojom amplitudom i fazom:

$$a[n_1, n_2] = |a[n_1, n_2]| e^{j\theta[n_1, n_2]}$$

- Ako je 2D signal realan, njegova Furijeova transformacija pokazuje određena svojstva simetrije:

$$A[m_1, m_2] = A^*[-m_1, -m_2]$$

Simbol * označava konjugovano kompleksnu vrijednost.

Dakle, za realne signale vrijedi:

$$|A[m_1, m_2]| = |A[-m_1, -m_2]| \quad \theta[m_1, m_2] = -\theta[-m_1, -m_2]$$

- Ako je 2D signal realan i paran, njegova Furijeova transformacija je parna i realna.

$$A[m_1, m_2] = A[-m_1, -m_2]$$

- Furijeova i inverzna Furijeova transformacija su linearni operatori.

$$\mathcal{F}(w_1 a + w_2 b) = \mathcal{F}(w_1 a) + \mathcal{F}(w_2 b) = w_1 A + w_2 B$$

$$\mathcal{F}^{-1}(w_1 A + w_2 B) = \mathcal{F}^{-1}(w_1 A) + \mathcal{F}^{-1}(w_2 B) = w_1 a + w_2 b$$

gdje su a i b 2D signali (slike), a w_1 i w_2 proizvoljne kompleksne konstante.

- Energija signala se može mjeriti u prostornom ili frekvencijskom domenu. Za signal konačne energije vrijedi *Parsevalova teorema*:

$$E = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} |a[n_1, n_2]|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} |A[m_1, m_2]|^2$$

Pojam “energija signala” ne treba miješati sa fizičkom energijom fenomena koji prizvodi signal (sliku).

- Neka su data tri multidimenzionalna signala, a , b i c i njima odgovarajuće Furijeove transformacije A , B i C . Tada vrijedi:

$$c = a \otimes b \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad C = A \cdot B$$

$$c = a \cdot b \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad C = \frac{1}{4\pi^2} A \otimes B$$

Drugim riječima, konvolucija u prostornom domenu je ekvivalentna množenju u domenu Furijeove transformacije. Treba voditi računa da kod diskretnih signala ovo vrijedi za cirkularnu konvoluciju.

- Cirkularni pomjeraj

$$a[\langle n_1 - n_{01} \rangle_{N_1}, \langle n_2 - n_{02} \rangle_{N_2}] \leftrightarrow X[m_1, m_2] e^{-j\frac{2\pi}{N_1} n_{01} m_1} e^{-j\frac{2\pi}{N_2} n_{02} m_2}$$

- Rotacija

$$n_1 = r \cos \theta, \quad n_2 = r \sin \theta, \quad m_1 = w \cos \phi, \quad m_2 = w \sin \phi$$

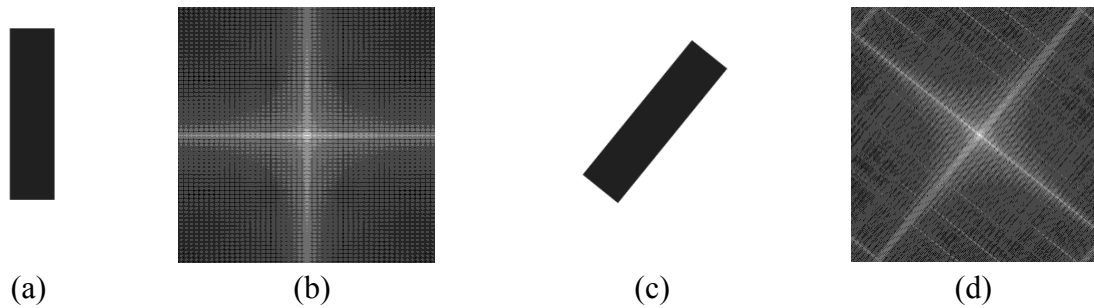
$$a[r, \theta + \theta_0] \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad A(w, \phi + \phi_0)$$

- Separabilnost

$$a[n_1, n_2] = a_1[n_1] a_2[n_2] \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad A(m_1, m_2) = A_1(m_1) A_2(m_2)$$

Ilustracija osobine rotacije je data na Slici 24.

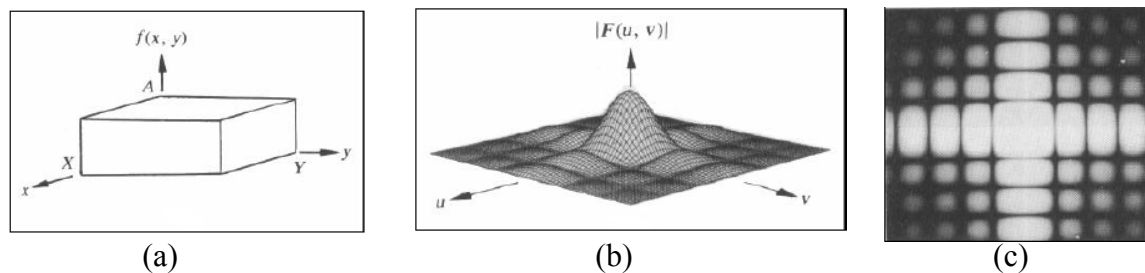
Furijeova transformacija impulsnog odziva 2D sistema u obradi slike se naziva *optička prenosna funkcija*.



Slika 24. (a) Originalna slika i (b) njena magnituda, (c) rotirana slika i (d) njena magnituda

Grafičko predstavljanje 2D signala i 2D Furijeove transformacije

Dvodimenzionalni signal, neovisno da li se radi o prostornom ili frekvencijskom domenu, može da se grafički predstavi kao funkcija dvije nezavisne varijable ili kao dvodimenzionalna slika na kojoj vrijednosti svjetlina pojedinih tačaka odgovaraju vrijednostima funkcije u koordinatama tih tačaka, Slika 25.

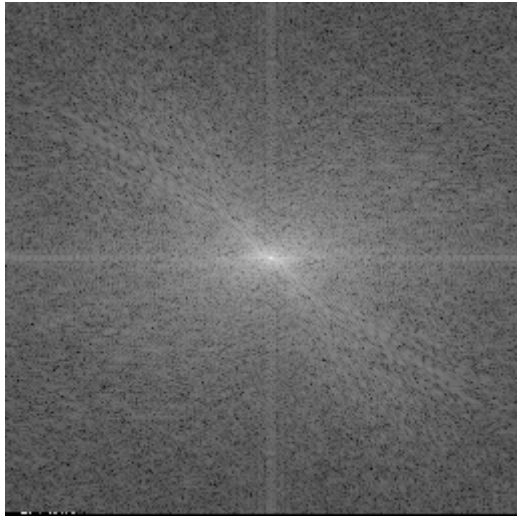


Slika 25. (a) 2D signal, (b) Modul Furijeove transformacija datog signala, (c) Modul Furijeove transformacije prikazan u vidu slike

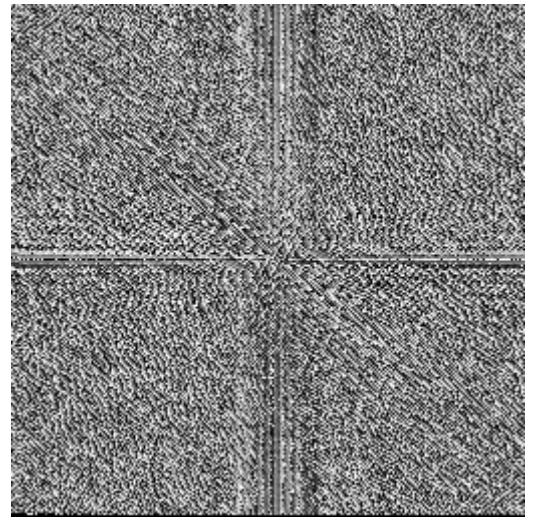
Važnost amplitudne i fazne karakteristike

Furijeova transformacija je u opštem slučaju kompleksna funkcija. Za kompletnu rekonstrukciju slike na osnovu njene Furijeove transformacije neophodne su i amplitudna karakteristika (magnituda) i fazna karakteristika. Slika 26 prikazuje magnitudu u skaliranoj formi kao $\log(|A(m_1, m_2)|)$ i fazu $\phi[m_1, m_2]$ originalne slike Lene, te šta se dešava kada se slika rekonstruiše samo na osnovu magnitude, a šta kada se rekonstruiše samo na osnovu faze. Sama magnituda ili sama faza nisu dovoljne za rekonstrukciju slike. Slika rekonstruisana samo na osnovu informacija o magnitudi je potpuno neprepoznatljiva, dok se slika rekonstruisana samo na osnovu informacija o fazi jedva razaznaje i njen kvalitet je znatno degradiran.

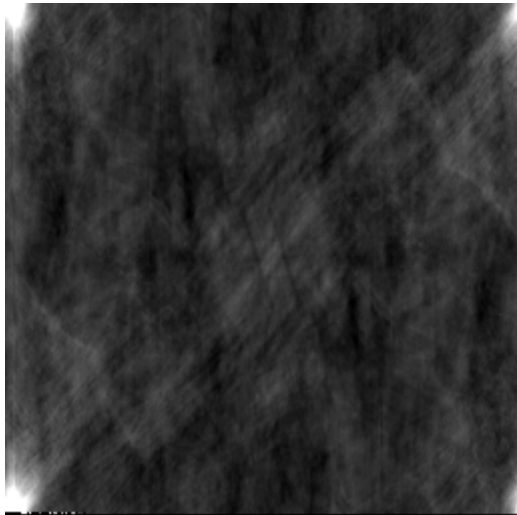
Na Slici 27 su prikazani neki oblici 2D signala i njihove amplitudne karakteristike.



a) magnituda



b) faza

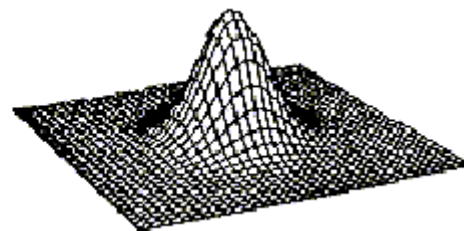
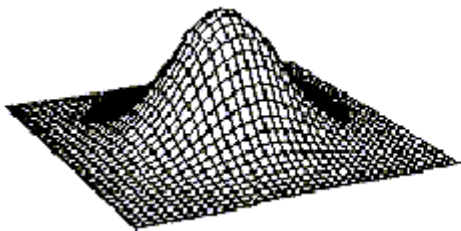
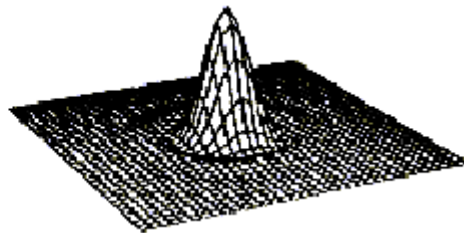
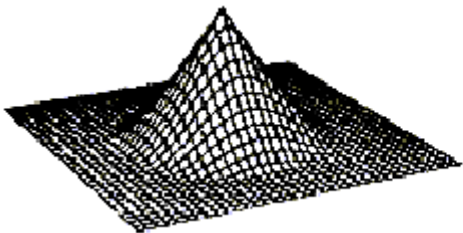
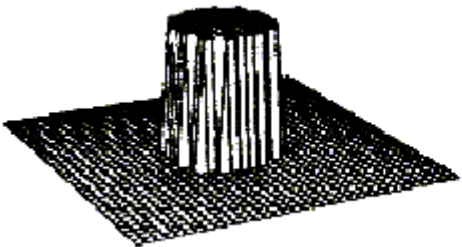
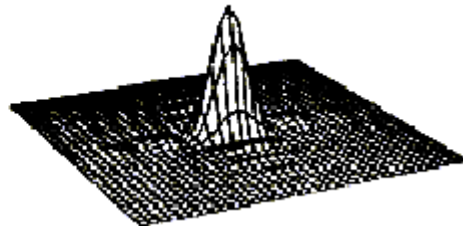
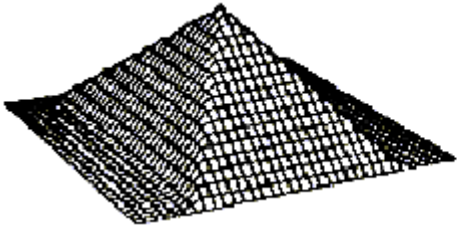


c) rekonstrukcija na osnovu magnitude



d) rekonstrukcija na osnovu faze

Slika 26. Spektar i rekonstrukcija slike Lene na osnovu magnitude ili faze



(a)

(b)

Slika 27. Primjeri 2D signala i njihovih Furijeovih transformacija, (a) 2D signal, (b) amplitudna karakteristika datog signala

Unitarna diskretna kosinusna transformacija 2D signala

Osim Furijeove transformacije najširu primjenu u obradi, posebno u kompresiji slike, nalazi diskretna kosinusna transformacija. Transformacioni par je dat sa:

$$C[k, l] = \alpha[k] \beta[l] \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x[m, n] \cos \frac{\pi}{2M} k(2m+1) \cos \frac{\pi}{2N} l(2n+1),$$

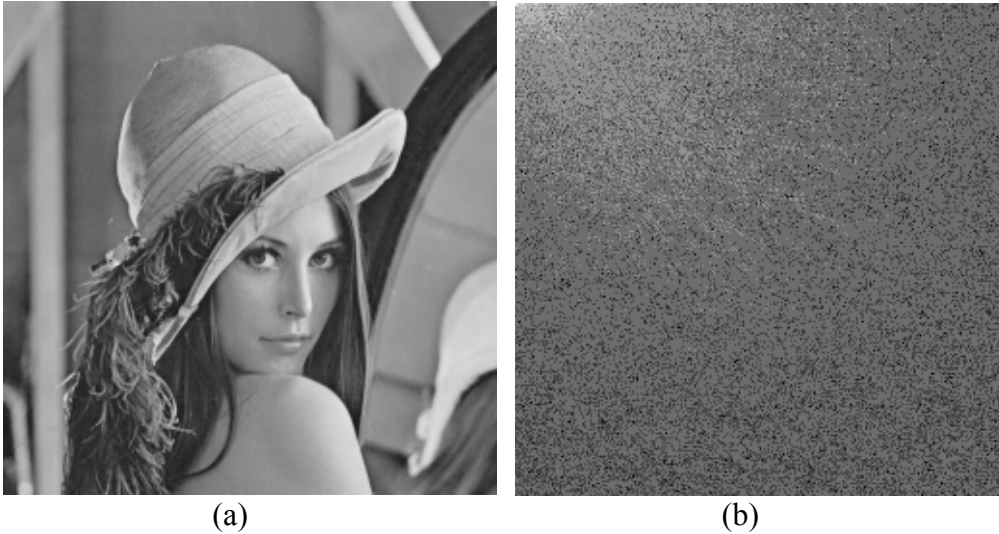
$$0 \leq k \leq M-1, \quad 0 \leq l \leq N-1$$

$$x[m, n] = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \alpha[k] \beta[l] C[k, l] \cos \frac{\pi}{2M} k(2m+1) \cos \frac{\pi}{2N} l(2n+1),$$

$$0 \leq m \leq M-1, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$\alpha[k] = \begin{cases} 1/\sqrt{M}, & k=0, \\ \sqrt{2/M}, & 1 \leq k \leq M-1. \end{cases} \quad \beta[l] = \begin{cases} 1/\sqrt{N}, & l=0, \\ \sqrt{2/N}, & 1 \leq l \leq N-1. \end{cases}$$

Sa Slike 28 na kojoj je data diskretna kosinusna transformacija slike "Lena" uočljivo je da je energija signala skoncentrisana u relativno malom broju transformacionih koeficijenata. Ova osobina se koristi za kompresiju slike.



Slika 28. (a) Slika "Lena" i (b) njena diskretna kosinusna transformacija

Diskretna Volšova (Walsh) transformacija (DWT)

Transformacioni par jednodimenzionalne diskretne Volšove transformacije je:

$$X_W[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left[\prod_{i=0}^{p-1} (-1)^{b_i[n] b_{p-i}[k]} \right], \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_W[k] \left[\prod_{i=0}^{p-1} (-1)^{b_i[n] b_{p-i}[k]} \right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

gdje je $b_i[n]$ i -ti bit broja n i $p = \log_2 N$.

Za razliku od DFT ili druge diskretne transformacije sa sinusoidalnim bazisnim funkcijama oblika W_N diskretna Volšova transformacija koristi faktore čija je vrijednost $+1$ ili -1 , tako da za nju postoje jednostavni prilagođeni FFT algoritmi.

Dvodimenzionalno proširenje diskretne Volšove transformacije je dato sa:

$$X_W[k, l] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x[m, n] \prod_{i=0}^{p-1} (-1)^{b_i[m] b_{p-i}[k]} \prod_{i=0}^{q-1} (-1)^{b_i[n] b_{q-i}[l]},$$

$$k = 0, 1, \dots, M-1, \quad l = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x[m, n] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} X_W[k, l] \prod_{i=0}^{p-1} (-1)^{b_i[m] b_{p-i}[k]} \prod_{i=0}^{q-1} (-1)^{b_i[n] b_{q-i}[l]},$$

$$m = 0, 1, \dots, M-1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

uz $p = \log_2 M$ i $q = \log_2 N$.

Volšova transformacija ima dobru kompresiju energije, ali slabiju u poređenju sa DCT.

Diskretna Adamarova (Hadamard) transformacija

Diskretna Adamarova transformacija i njena inverzija su u jednodimenzionalnom prostoru date sa:

$$X_H[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] (-1)^{\sum_{i=0}^{p-1} b_i[n] b_i[k]}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_H[k] (-1)^{\sum_{i=0}^{p-1} b_i[n] b_i[k]}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

gdje je $b_i[n]$ i -ti bit broja n i $p = \log_2 N$.

Kod ove transformacije nije moguća prosta zamjena eksponencijalnih faktora sa 1 u FFT algoritamima kao kod Volšove transformacije te se u praksi Volšova transformacija više koristi.

Dvodimenzionalno proširenje Adamarove transformacije je dato sa:

$$X_H[k, l] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x[m, n] (-1)^{\sum_{i=0}^{p-1} b_i[m] b_i[k]} (-1)^{\sum_{i=0}^{q-1} b_i[n] b_i[l]},$$

$$k = 0, 1, \dots, M-1, \quad l = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x[m, n] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} X_H[k, l] (-1)^{\sum_{i=0}^{p-1} b_i[m] b_i[k]} (-1)^{\sum_{i=0}^{q-1} b_i[n] b_i[l]},$$

$$m = 0, 1, \dots, M-1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

uz $p = \log_2 M$ i $q = \log_2 N$.

Harova (Haar) transformacija

Bazisne Harove funkcije se razlikuju po *skali* (širini) i *poziciji* u vremenu.

Kontinualna Harova transformacija

Kontinualne Harove funkcije definisane na zatvorenom intervalu $k = 0, 1, \dots, N-1$, $N = 2^n$ imaju oblik:

$$h_{0,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad x \in [0, 1],$$

$$h_{p,q}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 2^{p/2}, & \frac{q-1}{2^p} \leq x < \frac{q-0.5}{2^p} \\ -2^{p/2}, & \frac{q-0.5}{2^p} \leq x < \frac{q}{2^p} \\ 0, & 0 \leq x < \frac{q-1}{2^p}, \quad \frac{q}{2^p} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

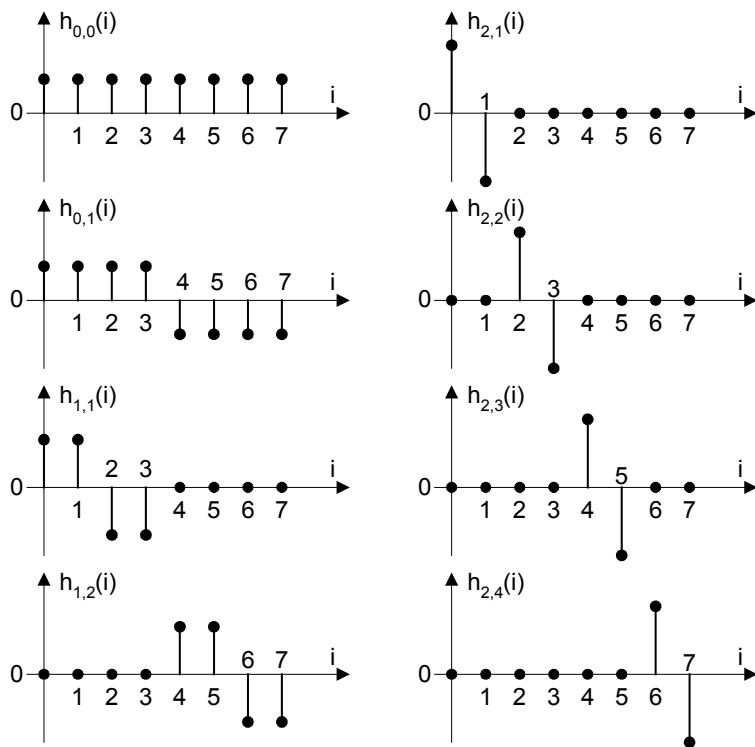
Diskretna Harova transformacija

Diskretna Harova transformacija se iz kontinualne Harove transformacije dobije tako što kontinualna promenljiva x uzima diskretne vrednosti $x = i/N$ za $i = 0, 1, \dots, N-1$. Za slučaj $N = 8$ diskretne Harove sekvence prikazane su na Slici 29.

Harovim bazisnim funkcijama formiraju se razlike usrednjenih vrijednosti odabiraka signala, pri čemu različitim bazisnim funkcijama odgovaraju različiti položaji i veličine oblasti usrednjavanja. To omogućava lokalizaciju pozicije naglih promjena signala (ivica). Onoj bazisnoj funkciji koja je najbližnja promjeni signala odgovaraće najveći transformacioni koeficijent. Ostalim bazisnim funkcijama će, zbog osobine ortonormalnosti, odgovarati male vrijednosti koeficijenata. Ovo je prednost nad Furijeovom

transformacijom gdje nagle promjene signala izazivaju samo promjene nagiba faze što ne omogućava lokalizaciju ivica u prostoru.

Harova transformacija nalazi primjenu u kompresiji slike. Ona predstavlja osnov za *talasnu transformaciju (wavelet transform)* o kojoj će biti više riječi u jednom od narednih poglavlja.



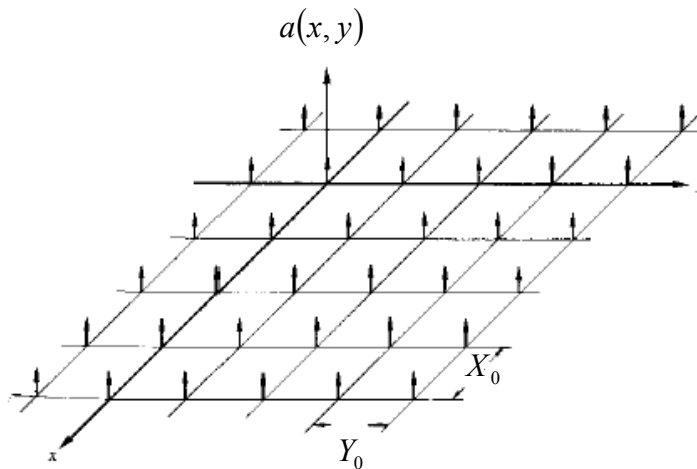
Slika 29. Diskretne Harove sekvence za $N = 8$.

ODMJERAVANJE SLIKE

Konverzija kontinualne slike $a(x, y)$ u njenu digitalnu predstavu $b[m, n]$ zahtijeva proces odmjeravanja. U idealnom sistemu za odmjeravanje, kontinualna slika $a(x, y)$ se množi 2D nizom impulsnih funkcija, Slika 30:

$$b_{ideal}[m, n] = a(x, y) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - mX_0, y - nY_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(mX_0, nY_0) \delta(x - mX_0, y - nY_0),$$

gdje su X_0 i Y_0 razmaci dvodimenzionalnih impulsa ili intervali a $\delta(\bullet, \bullet)$ je idealna impulsna funkcija.



Slika 30. Idealno odmjeravanje

U određenom trenutku, u procesu odmjeravanja, impulsna funkcija se konvertuje u diskretnu impulsnu funkciju $\delta[m, n]$. *Kvadratno odmjeravanje* podrazumijeva da je $X_0 = Y_0$. Odmjeravanje impulsnom funkcijom odgovara odmjeravanju u beskonačno malim tačkama. To ne odgovara uobičajenim situacijama. Da bi uzeli u obzir efekat otvora rešetke kojom se vrši odmjeravanje u tačkama konačnih dimenzija $p(x, y)$, Slika 31, modifikovaćemo model na sljedeći način:

$$b[m, n] = (a(x, y) * p(x, y)) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - mX_0, y - nY_0).$$

Kombinovani efekat odmjeravanja i konačne veličine otvora može se prikazati u domenu Furijeove transformacije:

$$B(\Omega, \Psi) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(\Omega - m\Omega_s, \Psi - n\Psi_s) \cdot P(\Omega - m\Omega_s, \Psi - n\Psi_s),$$

gdje je $\Omega_s = 2\pi/X_0$ frekvencija odmjeravanja u x pravcu, a $\Psi_s = 2\pi/Y_0$ frekvencija odmjeravanja u y pravcu. Otvor $p(x, y)$ je najčešće pravougaoni, kružni ili Gausov, sa pridruženom optičkom prenosnom funkcijom $P(\Omega, \Psi)$. Iz poslednje jednačine vidljiva je periodična priroda spektra.

Da bi obezbijedili da ne dođe do preklapanja frekvencijskih komponenti (*aliasing*), moramo zadovoljiti sljedeće uslove:

- slika $A(u, v)$ mora da ima frekventno ograničen spektar:

$$|A(u, v)| \equiv 0 \quad \text{za} \quad |u| > u_c \text{ i } |v| > v_c;$$

- neophodno je da frekvencija odmjeravanja po oba prvca bude veća od Nikvistove frekvencije:

$$\Omega_s > 2u_c \text{ i } \Psi_s > 2v_c,$$

gdje su u_c i v_c granične frekvencije po x i y pravcu, respektivno.

Nakon odmjeravanja slike neophodno je kvantovati svjetlinu u svakom pikselu. Svakoj vrijednosti svjetline pridružuje se broj iz konačnog skupa. Na taj način se generiše digitalna slika, predstavljena matricom u kojoj redovi odgovaraju širini, kolone visini slike, a elementi matrice predstavljaju vrijednosti svjetline.

Uobičajene vrijednosti parametara digitalne slike su date u sljedećoj tabeli.

Parametar	Simbol	Tipične vrijednosti
red	N	256, 512, 525, 625, 1024, 1035
kolona	M	256, 512, 768, 1024, 1320
nivo svjetline	L	2, 64, 256, 1024, 4096, 16384

STATISTIČKI OPIS SLIKE

Pri obradi slike često se koristi statistički opis slike ili regiona. Pri tome se svaki piksel slike posmatra kao slučajna promenljiva a region ili cijela slika kao diskretno slučajno polje. Uzorak iz ansambla slika se naziva slučajna slika. Za dati regin (koji može biti i cijela slika) možemo definisati funkciju *distribucije* i funkciju *gustine* svjetline u datom reginu. Podrazumijevaćemo da radimo sa digitalnim slikama $a[m, n]$.

Funkcija distribucije svjetline

Funkcija distribucije $P(a)$ je vjerovatnoća da je odabrana svjetlina iz regiona manja ili jednaka datoj vrijednosti svjetline a . Sa porastom svjetline a od minimalne moguće do maksimalne moguće vrijednosti, $P(a)$ raste od 0 do 1. $P(a)$ je monotono neopadajuća funkcija od a , te je $dP/da \geq 0$.

Funkcije gustine svjetline

Vjerovatnoća da će se vrijednost svjetline naći između a i $a + \Delta a$ može se izraziti kao $p(a)\Delta a$, gdje je $p(a)$ funkcija gustine. Ako je poznata funkcija distribucije vrijedi:

$$p(a)\Delta a = \left(\frac{dP(a)}{da} \right) \Delta a.$$

Kako je $P(a)$ monotona i neopadajuća, vrijedi da je

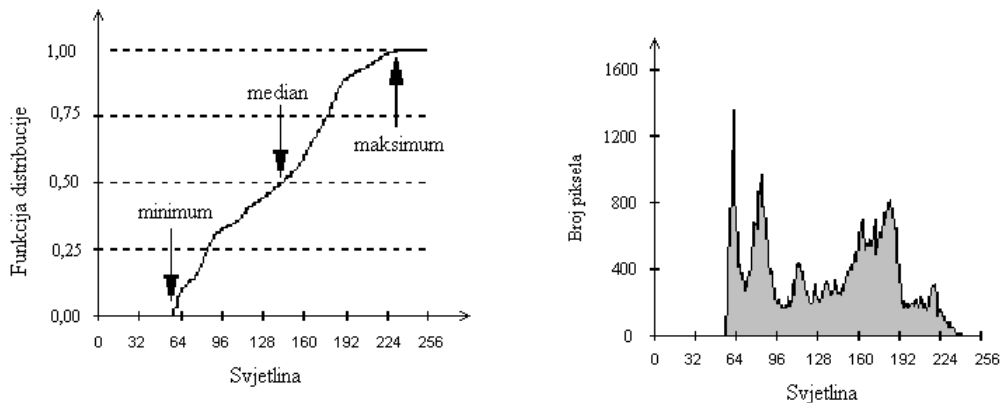
$$p(a) \geq 0 \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{\infty} p(a) da = 1.$$

Za slike sa kvantovanim vrijednostima svjetline, Δa je širina osnovnog intervala svjetline, za koji pretpostavljamo da je konstantan.

Funkcija gustine svjetline se često procjenjuje na osnovu histograma. *Histogram* $h[a]$ je funkcija svjetline koja daje broj piksela za svaku vrijednost svjetline u posmatranom regionu. Histogram se može normalizovati ukupnim brojem piksela, tako da je ukupna oblast ispod histograma jednaka jedinici. Tada je procijenjena funkcija gustine:

$$p[a] = \frac{1}{\Lambda} h[a], \quad \Lambda = \sum_a h[a].$$

Na sljedećoj Slici 31 su prikazani funkcija distribucije i nenormalizovani histogram (proporcionalan funkciji gustine) jedne slike. Visine u histogramu odgovaraju broju piksela za svaku vrijednost svjetline.



Slika 31. [14] Funkcija distribucije (a) i histogram (b)

Funkcija distribucije i histogram daju statistički opis regiona. Treba naglasiti da $P[a]$ i $p[a]$ treba posmatrati kao procijenjene vrijednosti kada se izračunavaju na osnovu specificiranog regiona. To znači da mi posmatramo sliku i specificirani region kao jednu realizaciju različitih slučajnih procesa uključenih u formiranje slike i tog regiona. U istom kontekstu, statističke parametre koji će biti definisani treba posmatrati kao estimate stvarnih parametara.

Srednja svjetlina

Srednja svjetlina nekog regiona $E\{a[m,n]\} = \mu_a[m,n]$ definiše se kao srednja vrijednost svjetlina svih piksela unutar regiona \mathcal{R} :

$$\mu_a = \frac{1}{\Lambda} \sum_{(m,n) \in \mathcal{R}} a[m,n].$$

Alternativno, možemo koristiti formulaciju zasnovanu na nenormalizovanom histogramu, sa diskretnim vrijednostima svjetline a :

$$\mu = \frac{1}{\Lambda} \sum_a a \cdot h[a].$$

Standardna devijacija

Varijansa $\sigma_a^2 = E\{|a[m,n] - \mu_a[m,n]|^2\}$, odnosno standardna devijacija σ_a mogu se izraziti na sljedeći način:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{\Lambda - 1} \sum_{(m,n) \in \mathcal{R}} (a[m,n] - \mu_a)^2},$$

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_{(m,n) \in \mathcal{R}} a^2[m,n] - \Lambda \cdot \mu_a^2}{\Lambda - 1}},$$

ili, preko histograma

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\left(\sum_a a^2 \cdot h[a] \right) - \Lambda \cdot \mu_a^2}{\Lambda - 1}}.$$

Koeficijent varijacije

Koeficijent varijacije se definiše sa:

$$CV = \frac{s_a}{m_a} \times 100\%.$$

Procentualna vrijednost svjetline u funkciji distribucije

Procentualna vrijednost svjetline u funkciji distribucije $p\%$ se definiše kao ona vrijednost svjetline a za koju je:

$$P(a) = p\%,$$

odnosno:

$$\int_{-\infty}^a p(\alpha) d\alpha = p\%.$$

Tri specijalna slučaja se često koriste pri obradi slike:

- 0% *minimalna* vrijednost svjetline u regionu
- 50% *srednja (median)* vrijednost svjetline u regionu
- 100% *maksimalna* vrijednost svjetline u regionu

Sve tri vrijednosti se mogu lako odrediti sa Slike 31.

Tonalitet

Tonalitet je najčešće ponavljana vrijednost svjetline. Nema garancije da tonalitet postoji ili da je jedinstven na cijeloj slici.

Kovarijansna funkcija

Kovarijansna funkcija je data sa:

$$\gamma_a(a[m,n], a[k,l]) = \gamma_a[m,n;k,l] = E\{(a[m,n] - \mu_a[m,n])(a[k,l] - \mu_a[k,l])\}.$$

Za slučajno polje kažemo da je stacionarno u širem smislu ako je:

$$\mu_a[m,n] = \mu_a, \quad \gamma_a[m,n;k,l] = \gamma_a[m-k, n-l],$$

$$\gamma_a[m,n] = \gamma_a(a[m,n], a[0,0]) = \gamma_a(a[m+k, n+l], a[k,l]),$$

za svaki par $[k,l]$.

Gustina spektra snage

Gustina spektra snage stacionarnog slučajnog polja je Furijeova transformacija kovarijansne (autokorelacione) funkcije:

$$P_a(\omega_m, \omega_n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_a[m,n] e^{-j(m\omega_m + n\omega_n)},$$

$$\gamma_a[m,n] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_a(\omega_m, \omega_n) e^{j(m\omega_m + n\omega_n)} d\omega_m d\omega_n.$$

Postoji jednakost srednje snage u prostornom i spektralnom domenu:

$$\sigma_a^2 = E(|a[m,n] - \mu_a|^2) = \gamma_a[0,0] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_a(\omega_m, \omega_n) d\omega_m d\omega_n.$$

Šum

Pod šumom podrazumijevamo stohastičke varijacije za razliku od determinističkih izobličenja kao što su sjenčenja, efekat defokusiranja i slično. Slike dobivene modernim sensorima mogu biti kontaminirane različitim tipovima šuma koji potiče od različitih izvora. Najznačajni su:

- *Photonski šum,*
- *Termalni šum,*
- *Elektronski šum,*
- *KTC šum (gate capacitor FET),*
- *Šum pojačavača,*
- *Kvantizacioni šum.*

Odnos signal-šum (SNR signal-to-nois ratio) se može definisati na različite načine. Šum je okarakterisan svojom standardnom devijacijom s_n . Karakterizacija signala može biti različita. Ako je poznato da je signal ograničen, $a_{\min} \leq a \leq a_{\max}$ SNR se definiše sa:

$$SNR = 20 \log \left(\frac{a_{\max} - a_{\min}}{s_n} \right) dB$$

Ako signal nije ograničen, ali su poznate njegove stohastičke osobine, SNR se definiše sa:

$$SNR = 20 \log \left(\frac{m_a}{s_n} \right) dB,$$

ako su signal i šum međusobno zavisni, odnosno sa:

$$SNR = 20 \log \left(\frac{s_a}{s_n} \right) dB,$$

ako su signal i šum nisu međusobno zavisni.