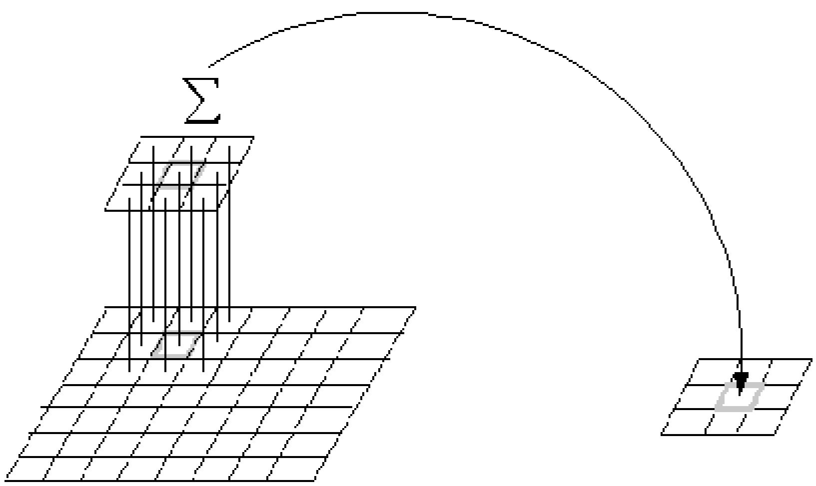
Dvodimenzionalna konvolucija

Može se reći da je konvolucija najvažnija operacija obrade slike na kojoj se zasnivaju mnogobrojni moderni algoritmi. Pripada klasi lokalnih operacija. Osnovna ideja se sastoji u tome da se jedna slika (*prozor*) konačnih dimenzija i oblika "prevlači" preko slike koja se podvrgava konvoluciji, Slika 48. Izlazne vrijednosti piksela predstavljaju težinsku sumu vrijednosti piksela ulazne slike, gdje su težine određene vrijednostima piksela prozorske slike (*filtra*). Prozorska slika određenog oblika sa pridruženim vrijednostima piksela (težinama) se naziva *konvolucioni kernel*. Kako su vrijednosti filtra $h[j,k]$, $\{j=0,1,\ldots J-1;\, k=0,1,\ldots K-1\}$ jednake nuli izvan pravougaonog prozora dimenzija $J\times K$, konvolucija se može zapisati kao konačna suma:

$$c[m,n]=a[m,n]*h[m,n]=\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1}h[j,k]\,a[m-j,n-k].$$



Slika 48 Ilustracija dvodimenzionalne konvolucije

Iako poslednja jednačina ilustruje lokalni karakter operacije, poznato je da se konvolucija može realizovati i Furijeovom transformacijom, što zahtijeva globalnu operaciju (Furijeovu transformaciju).

Konvolucija u prostornom domenu

Prilikom opisivanja filtara zasnovanih na konvoluciji koristićemo sljedeću konvenciju. Za dati filtar $h[j,k]$ dimenzija $J\times K$ podrazumijevaćemo da je koordinata $[j=0,k=0]$ smještena u centru matrice, Slika 49. Centar je dobro definisan ako su J i K neparni, u slučaju da su parni koristićemo aproksimaciju $(J/2,K/2)$ za centar matrice.

$$
\mathbf{h}=\begin{bmatrix}
h\left(-\left(J-\frac{1}{2}\right),-\left(K-\frac{1}{2}\right)\right) & \cdots & \cdots & h\left(-\left(J-\frac{1}{2}\right),0\right) & \cdots & \cdots & h\left(-\left(J-\frac{1}{2}\right),\left(K-\frac{1}{2}\right)\right)\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots\\
\vdots & \cdots & h(-1,-1) & h(-1,0) & h(-1,1) & \cdots & \vdots\\
h\left(0,-\left(K-\frac{1}{2}\right)\right) & \cdots & h(0,-1) & h(0,0) & h(0,1) & \cdots & h\left(0,\left(K-\frac{1}{2}\right)\right)\\
\vdots & \cdots & h(1,-1) & h(1,0) & h(0,0) & \cdots & \vdots\\
\vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
h\left(\left(J-\frac{1}{2}\right),-\left(K-\frac{1}{2}\right)\right) & \cdots & \cdots & h\left(\left(J-\frac{1}{2}\right),0\right) & \cdots & \cdots & h\left(\left(J-\frac{1}{2}\right),\left(K-\frac{1}{2}\right)\right)
\end{bmatrix}
$$

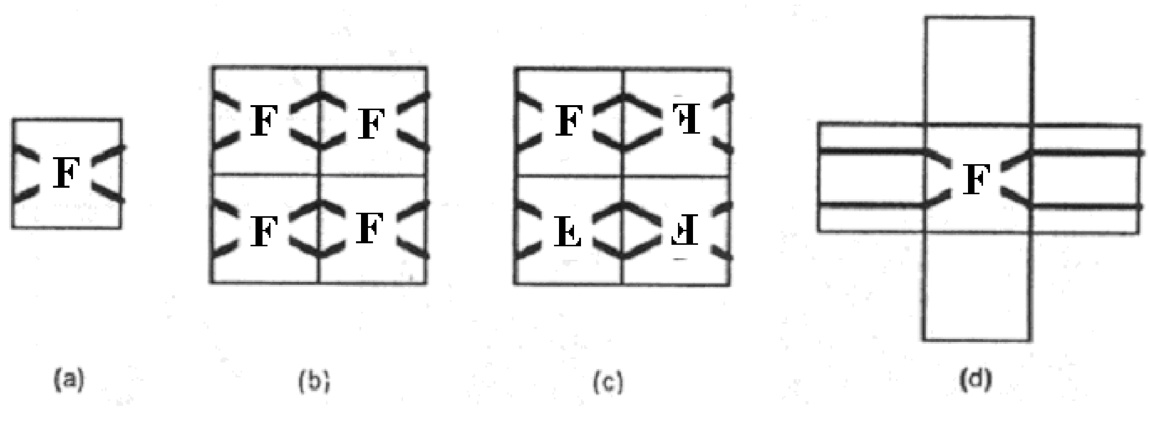
Slika 49. Matrica za opis filtra $h[j,k]$

Pri računanju konvolucije treba imati na umu sljedeće:

- Izračunavanje konvolucije za $m = n = 0$ kad je matrica filtra $h[j,k]$ centrirana zahtijeva vrijednosti $a[j,k]$ koje su van granica slike a:

$$c[0,0]=\sum_{j=-J_0}^{+J_0}\sum_{k=-K_0}^{+K_0} h[j,k]a[0-j,0-k],\quad J_0=\frac{J-1}{2},\quad K_0=\frac{K-1}{2}.$$

(a) Pitanje je koje vrijednosti pridružiti slici $a[m,n]$ za $m\langle 0, m\geq M, n\langle 0, n\geq N$. Na ovo pitanje nema odgovora, postoje samo alternative. Prilikom izbora jedne od njih podrazumijeva se da smo svjesni konsekvenci koje povlači učinjeni izbor. Standardne alternative su (Slika 50) vrijednostima svjetline (npr, bjelilom),
(b) dopuniti sliku periodično,
(c) dopuniti sliku kao u ogledalu u odnosu na rubove slike,
(d) proširiti granične vrijednosti slike na rubovima do beskonačnosti.



Slika 50. Različite alternative proširenja slike preko njenih rubova

- Kada se konvoluciona suma zapiše u standardnoj formi za sliku $a[m,n]$ dimenzija $M\times N$:

$$c[m,n]=\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1}a[j,k]h[m-j,n-k]$$

vidimo da se od konvolucionog kernela $h[j,k]$ formira slika u ogledalu oko $j=k=0$ da bi dobili $h[-j,-k]$ prije njegove translacije za $[m,n]$. U nekim slučajevima konvolucioni kerneli su simetrični u navedenom smislu, tj., $h[j,k]=h[-j,-k]$, tako da se ovaj korak može preskočiti.

- Broj operacija koji se zahtijeva za implementaciju konvolucije u prostornom domenu, za dimenzije konvolucionog kernela $K\times K$ je $O(K^2)$ po pikselu. Pod jednom operacijom podrazumijevamo množenje i sabiranje (MADD-multiply-and-add).
- Vrijednosti konvolucije mogu biti racionalni ili brojevi zapisani u formi plivajućeg zareza čak i ako su vrijednosti svjetline cijeli brojevi.
- Posmatrajući izraz za konvoluciju može se uočiti dodatna mogućnost njene efikasne implementacije. Ako je konvolucioni kernel *separabilan*, tj., ako se može zapisati kao

  $$h[j,k]=h_{col}[j]\cdot h_{row}[k]$$

  filtriranje se može izvesti na sljedeći način:

  $$c[m,n]=\sum_{j=0}^{J-1}\left\{\sum_{k=0}^{K-1}h_{row}[k]a[m-j,n-k]\right\}h_{col}[j].$$

  To znači da je umjesto jednog dvodimenzionalnog filtra moguće primijeniti dva jednodimenzionalna filtra, prvi u smjeru *k*, pa drugi u smjeru *j*. Za sliku dimenzija $N\times N$ broj operacija po pikselu se smanjuje sa $O(J\cdot K)$ na $O(J+K)$.

  Ako se konvolucioni kernel posmatra kao matrica **h** i ako je separabilna, onda se može zapisati kao vanjski proizvod dva vektora kolone $\mathbf{h}=\mathbf{h}_{\mathbf{col}}\cdot\mathbf{h}_{\mathbf{row}}^{t}$ gdje malo *t* označava transponovanu matricu.
- Za određenu klasu filtara je moguće pronaći *inkrementalnu implementaciju* konvolucije. Kako se konvolucioni kernel kreće preko slike, tako se krajnja lijeva kolona slike pomijera van prozora konvolucionog kernela, a nova kolona s desne strane ulazi u prozor. Efikasni algoritmi za računanje konvolucije uzimaju ovo u obzir i u kombinaciji sa separabilnim konvolucionim kernelima mogu smanjiti broj operacija po pikselu.

Konvolucija u frekvencijskom domenu

Alternativni metod za implementaciju filtriranja slike zasniva se na sljedećoj sekvenci operacija:

(1) Izračunati $A[m_1,m_2]=\mathscr{F}\{a[n_1,n_2]\}$,

(2) Pomnožiti $A[m_1,m_2]$ sa unapred određenom $H[m_1,m_2]=\mathscr{F}\{h[n_1,n_2]\}$,

(3) Izračunati rezultat $c[n_1,n_2]=\mathscr{F}^{-1}\{A[m_1,m_2]\cdot H[m_1,m_2]\}$.

- Iako se može učiniti da data procedura pogoršava probleme vezane za računanje konvolucije u prostoru, recimo, određivanja vrijednosti izvan granica slike, treba imati u vidu da kad razmatramo sliku u domenu Furijeove transformacije podrazumijevamo da je slika periodično ponovljena i izvan svojih granica. Ovaj fenomen je vezan uz pojam cirkularne konvolucije.

Ako cirkularna konvolucija nije prihvatljiva, onda se druge alternative sa Slike 50 mogu postići povećavajući matrice za prikaz slike $a[m,n]$ i filtra $H[m_1, m_2]$ na željeni način.

- Broj operacija po pikselu za sliku dimenzija $N \times N$ i konvolucioni kernel dimenzija $K \times K$ je $O(\log_2 N)$ kompleksnih MADD, nezavisno od K. Pretpostavili smo da je $N \rangle K$ i da je složen broj u obliku stepena broja 2. Poslednja pretpostavka omogućava korištenje efikasnih algoritama za računanje Furijeove transformacije (FFT) algoritama. U slučajevima kada je $N \geq 3\log_2 N$ broj operacija je manji nego pri direktnom računanju konvolucije u prostoru.