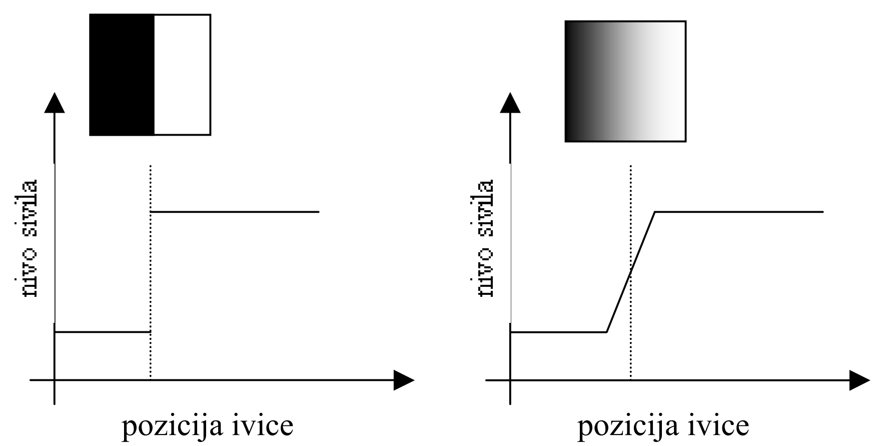
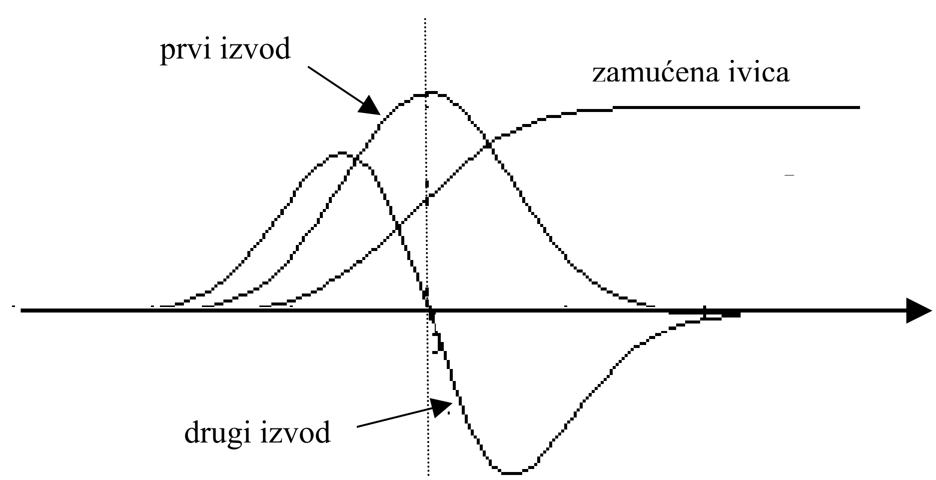
Derivacije slike

Mogućnost pronalaženja derivacije slike, najčešće radi lociranja ivica u prostoru, takođe spada u osnovne operacije obrade slike. Budući da ivicu definišemo kao promjenu u nivou sivila, Slika 51, operator za detekciju ivica treba da bude osjetljiv na ovu promjenu. Derivacijski operatori to jesu, jer derivacija pokazuje brzinu promjene funkcije, a brzina promjene nivoa sivila na slici je velika u blizini ivica a mala na pozadini ili unutar objekta (područja konstantnog sivila). Na poziciji ivice prvi izvod ima maksimum, dok drugi izvod prolazi kroz nulu, Slika 52.



Slika 51. Ivice na slici: (a) nagla promjena nivoa sivila - oštra ivica , (b) postepena promjena nivoa sivila - zamućena ivica



Slika 52. Prvi i drugi izvod posmatrano u smjeru promjene sivila

Fundamentalni problem se sastoji u tome da, po matematičkoj definiciji derivacije, derivaciju digitalne slike nije moguće odrediti. Naime, digitalna slika nije kontinualna funkcija $a(x, y)$ prostornih varijabli već diskretna funkcija $a[m,n]$ cjelobrojnih prostornih koordinata. Kao rezultat toga, algoritmi koje ćemo prikazati se mogu posmatrati samo kao aproksimacija stvarnih derivacija originalne kontinualne slike u prostoru.

Derivacija n-tog reda je lokalni operator jer vrijednost izlaznog piksela zavisi ne samo od vrijednosti ulaznog piksela na odgovarajućoj koordinati, već i od njemu susjednih piksela. Derivacija je linearni operator, ona ne zavisi od pomjeraja (translacije). Za operator koji ne zavisi od rotacije kažemo da je *izotropan*. Za izoštravanje slike, operaciju ya koju je neophodno određivanje ivica, neophodni su izotropni operatori, jer sliku treba izoštriti po svim pravcima. Pokazuje se da *izotropni linearni operator izvoda* sadrži samo izvode parnog reda.

Dalje, kao što se može vidjeti iz osobina Furijeove transformacije, derivacija u prostornom domenu dovodi do množenja spektra signala prostornim frekvencijama u ili v. To znači naglašavanje visokofrekventnog šuma u rezultujućoj slici. Opšte rješenje problema nalazi se u kombinovanju derivacijskih operatora sa operatorima koji suzbijaju visokofrekventni šum.

Prve derivacije

Kako je slika funkcija dvije varijable, neophodno je definisati u kom smjeru se radi derivacija. U slučaju dvodimenzionalnih signala derivaciju je moguće raditi po horizontalnom, vertikalnom ili proizvoljnom pravcu.

Prvi izvodi zavise od rotacije. Posmatrajmo Sliku 53. Rotacija za ugao $-\theta$ prevodi x-osu u x’-osu, i za svaku tačku $a(x, y)$ vrijedi da je:

$$x = a\cos\varphi \qquad x' = a\cos\psi$$
$$y = a\sin\varphi \qquad y' = a\sin\psi$$
$$\psi = \varphi + \theta$$

Dalje je:

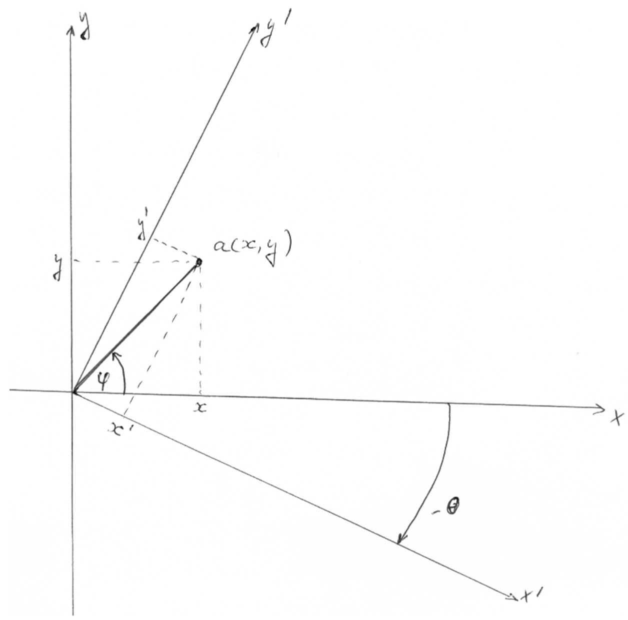
$$x'\cos\theta = a\cos\psi\cos\theta ,$$
$$y'\sin\theta = a\sin\psi\sin\theta .$$

Sabirajući dvije poslednje jednačine imamo:

$$x = a\cos\varphi = a\cos(\psi - \theta) = x'\cos\theta + y'\sin\theta .$$

Na sličan način dobijamo i preostale tri jednačine iz sljedeće grupe:

$$x = x'\cos\theta + y'\sin\theta , \qquad x' = x\cos\theta - y\sin\theta ,$$
$$y = -x'\sin\theta + y'\cos\theta , \qquad y' = x\sin\theta + y\cos\theta .$$



Slika 53. Zavisnost prvih izvoda od rotacije

Tako je izvod u smjeru proizvoljnog ugla $-\theta$ (smjeru ose x') jednak:

$$\frac{\partial a}{\partial x'} = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} = \frac{\partial a}{\partial x}\cos\theta - \frac{\partial a}{\partial y}\sin\theta \,.$$

Ako koristimo $\mathbf{h}_{\mathbf{x}}$ da označimo matricu derivacijskog filtra u smjeru x-ose, $\mathbf{h}_y$ da označimo matricu derivacijskog filtra u smjeru y-ose, a $\mathbf{h}_\theta$ da označimo matricu derivacijskog filtra u smjeru proizvoljnog ugla θ, tada je:

$$\mathbf{h}_\theta = \cos\theta \cdot \mathbf{h}_{\mathbf{x}} + \sin\theta \cdot \mathbf{h}_y \,.$$

Prvi izvodi zavise od rotacije (ugla θ), ali je suma njihovih kvadrata jednaka:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial y'}\right)^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2, \quad \forall\theta$$

rotaciono invarijantna i predstavlja najjednostavniju formu izotropnog operatora.

U nekim slučajevima nas interesuje osjetljivost izvoda po određenom pravcu, npr., za detekciju pravca ivice. Iz jednakosti:

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial a}{\partial x'}\right)}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial a}{\partial x}\sin\theta - \frac{\partial a}{\partial y}\cos\theta = 0$$

dobije se ugao θ_n koji ukazuje na smjer maksimalne promjene (pravac maksimuma, normala na ivicu):

$$\theta_n = -\arctan \frac{\partial a/\partial y}{\partial a/\partial x}.$$

Primijetimo da je i $\theta_n + \pi$ rješenje gornje jednačine, ali ono daje samo suprotan smjer.

Vrijednost izvoda u pravcu maksimuma je:

$$\left.\frac{\partial a}{\partial x'}\right|_{\theta=\theta_n} = \frac{\partial a}{\partial x}\cos\theta_n - \frac{\partial a}{\partial y}\sin\theta_n = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2},$$

jer je:

$$\cos\theta_n = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\theta_n)}} = \frac{\partial a/\partial x}{\sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\sin\theta_n = \sqrt{1-\cos^2(\theta_n)} = \frac{-\partial a/\partial y}{\sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2}}.$$

Vektor sa argumentom θ_n i modulom $\sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2}$ naziva se gradijent funkcije $a(x,y)$. Dakle, gradijent slike je vektor koji čiji argument pokazuje smjer u kom se svjetlina najbrže mijenja, dok modul odgovara brzini promjene svjetline u tom smjeru.

Derivacijski vektor se može iskazati u formi *gradijenta* na sljedeći način:

$$\nabla a = \frac{\partial a}{\partial x}\vec{i}_x + \frac{\partial a}{\partial y}\vec{i}_y = (h_x \otimes a)\vec{i}_x + (h_y \otimes a)\vec{i}_y,$$

gdje su $\vec{i}_x$ i $\vec{i}_y$ jedinični vektori u horizontalnom i verikalnom smjeru. Kako je gradijent vektor, on ima svoju magnitudu:

$$|\nabla a| = \sqrt{(h_x \otimes a)^2 + (h_y \otimes a)^2}$$

i fazu:

$$\psi(\nabla a) = \arctan\{(h_y \otimes a)/(h_x \otimes a)\}.$$

Amplituda gradijenta se ponekad aproksimira sa:

$$|\nabla a| \cong |h_x \otimes a| + |h_y \otimes a|$$

Na mjesu gdje se nalazi ivica na slici, amplituda gradijenta ima maksimalnu vrijednost. Rezultat derivacije jako zavisi od izbora matrica za derivacijeske filtre $\mathbf{h}_\mathbf{x}$ i $\mathbf{h}_y$. Zbog diskretne prirode slike, umjesto derivacija koristićemo diferencije. Postoji nekoliko mogućnosti formiranja *osnovnih derivacijskih filtara prvog reda*, o kojima će više riječi biti u narednim poglavljima.

Druge derivacije

Moguće je, naravno, računati i više derivacije funkcija dvije varijable. U obradi slike druga derivacija, odnosno Laplasijan, igra veoma važnu ulogu. Laplasijan se definiše sa:

$$\nabla^2 a = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = (h_{2x} \otimes a) + (h_{2y} \otimes a)$$

gdje su $\mathbf{h}_{\mathbf{2x}}$ i $\mathbf{h}_{\mathbf{2y}}$ derivacijski filtri drugog reda. Na mjestu gdje se nalazi ivica Laplasijan prolazi kroz nulu.