Optimalni filtri – Vinerov filtar

Optimalni Vinerov (*Wiener*) filtar pripada klasi linearnih filtara. Riječ optimalni se koristi u smislu minimalne sredjekvadratne greške (*mse*).

Uz pretpostavku da se radi o aditivnom šumu i da se poznaju neke statističke karakteristike šuma, uprošten model slike sa šumom (bez degradacije) može se dati u obliku:

$$c(x,y) = a(x,y) + n(x,y)$$

Ako su slika i šum stacionarni slučajni 2D signali sa srednjim vrijednostima oba signala jednakim nuli i ako su slika i šum su međusobno linearno nezavisni, procjena slike je jednaka konvoluciji:

$$\hat{a}(x,y) = h_W(x,y) * c(x,y)$$

gdje je $h_W(x,y)$ impulsni odziv Vinerovog estimatora koji se određuje minimizacijom srednjekvadratne greške:

$$E\{|e(x,y)|^2\} = E\{|a(x,y) - \hat{a}(x,y)|^2\}\,.$$

Po principu ortogonalnosti ($e(x,y)$ i $c^*(x,y)$ su nekorelisani) imamo:

$$E\{e(x,y)c^*(x',y')\} = 0,\ \ \forall\ (x,y) \text{ i } (x',y')\,,$$

$$E\{a(x,y)c^*(x',y')\} = E\{\hat{a}(x,y)c^*(x',y')\} = E\{[h_W(x,y) * c(x,y)]c^*(x',y')\}\,,$$

odnosno:

$$R_{ac}(x,y) = h_W(x,y) * R_c(x,y)\,.$$

Nakon primjene Furijeove transformacije, frekvencijska karakteristika nekauzalnog Vinerovog filtra je data sa:

$$H_W(u,v) = \frac{P_{ac}(u,v)}{P_c(u,v)}\,.$$

Clan $P_{ac}(u,v)$ niti je poznat, niti se može lako procijeniti. Ako slučajni signali (slika i šum) nisu korelisani i imaju srednju vrijednosti jednake nuli, vrijedi:

$$E\{a(x,y)n^*(x',y')\} = E\{a(x,y)\}E\{n^*(x',y')\}$$

$$R_{ac}(x,y) = R_a(x,y)\ ,\qquad R_c(x,y) = R_a(x,y) + R_n(x,y)\,,$$

$$P_{ac}(u,v) = P_a(u,v)\,,\qquad P_c(u,v) = P_a(u,v) + P_n(u,v)\,.$$

Stoga frekvencijska karakteristika Vinerovog filtra, za aditivni šum koji je nezavisan od signala ima oblik:

$$H_W(u,v) = \frac{P_a(u,v)}{P_a(u,v) + P_n(u,v)},$$

gdje je $P_a(u,v)$ spektralna gustina snage ansambla slučajnih slika i $P_n(u,v)$ je spektralna gustina snage slučajnog šuma. Ako imamo samo jednu sliku, tada je $P_a(u,v) = |A(u,v)|^2$. U praksi je veoma rijetko poznata spektralna gustina snage slike bez šuma. Budući da mnogo slika ima sličnu spektralnu gustinu snage, ona se može modelirati preko eksponencijalno opadajuće prostorne funkcije $R_b(x,y) = \rho^{\sqrt{x^2+y^2}}$, $0 < \rho < 1$, a zatim se taj model koristi kao estimat od $P_a(u,v)$. Uz pretpostavku da je spektar snage šuma konstantan, on se određuje izračunavanjem periodograma u oblasti frekvencijske ravni koja odgovara visokim učestanostima.

Problem nenultih srednjih vrednosti signala i šuma se rjesava tako da se prvo uradi oduzimanje srednjih vrijednosti slike i šuma, zatim filtriranje i na kraju dodavanje srednje vrijednosti originalne slike u filtriranu sliku.

Frekvencijska karakteristika Vinerovog filtra je realna i nenegativna, te utiče samo na amplitudni spektar. Zbog realnosti frekvencijske karaketristike impulsni odziv Vinerovog filtra nije kauzalan.

Na niskim frekvencijama je snaga slike mnogo veća od snage šuma:

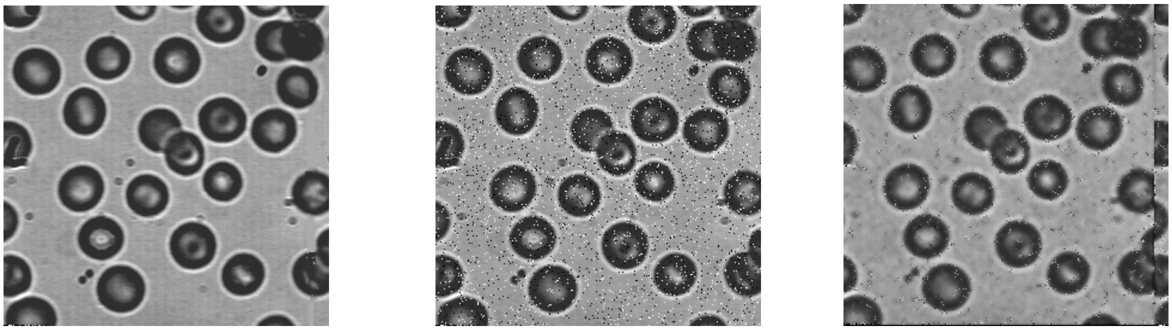
$$P_a(u,v) > P_n(u,v), \ H_W(u,v) \approx 1.$$

Na visokim frekvencijama dominira šum:

$$P_a(u,v) < P_n(u,v), \ H_W(u,v) \approx 0.$$

Vinerov filtar za redukciju šuma je NF filtar.

Na Slici 67 i Slici 68 dati su primjeri primjene Vinerovog filtra za prigušivanje šuma.



(a) (b) (c)

Slika 67. (a) Originalna slika. (b) Slika sa šumom ("so i biber").
(c) Slika filtriranaVinerovim filtrom.

Slika 68. (a) Slika narušena šumom. (b) Slika filtrirana Vinerovim filtrom.