

MULTIREZOLUCIONA ANALIZA

Do sada smo pri analizi signala smatrali da se radi o stacionarnim signalima i za njihovu analizu koristili Furijeovu transformaciju:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt,$$

koja signal predstavlja preko elementarnih prostoperiodičnih funkcija, Slika 126.

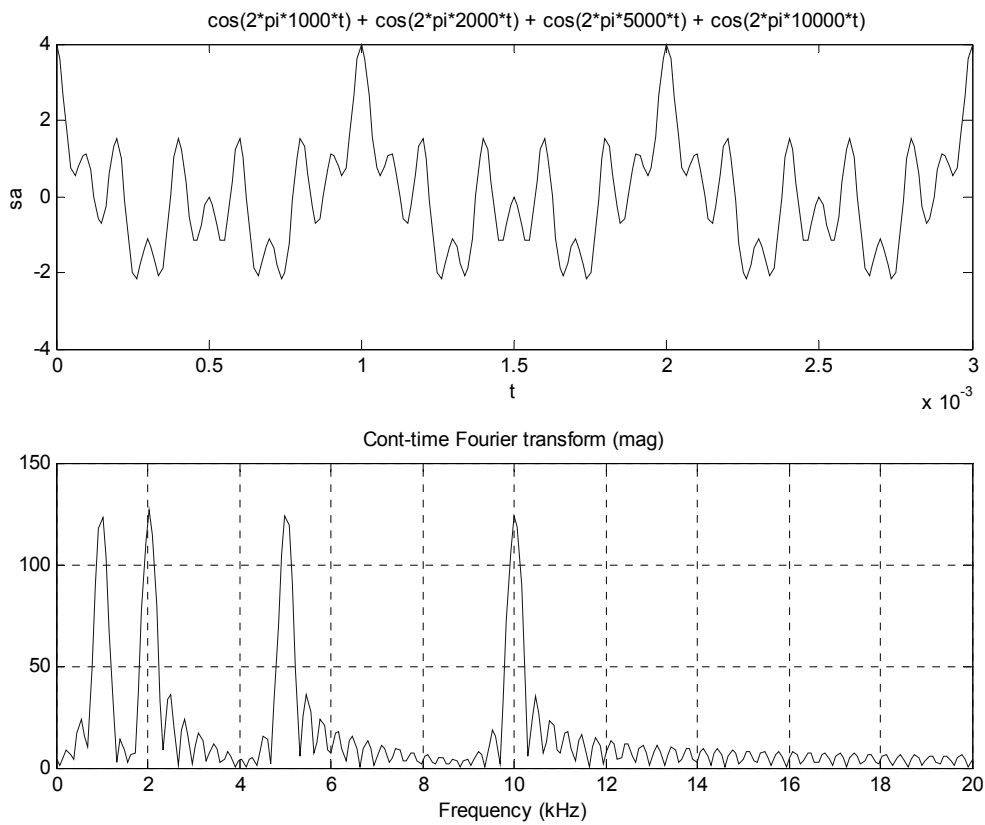


Slika 126. Razlaganje signala na elementarne prostoperiodične funkcije

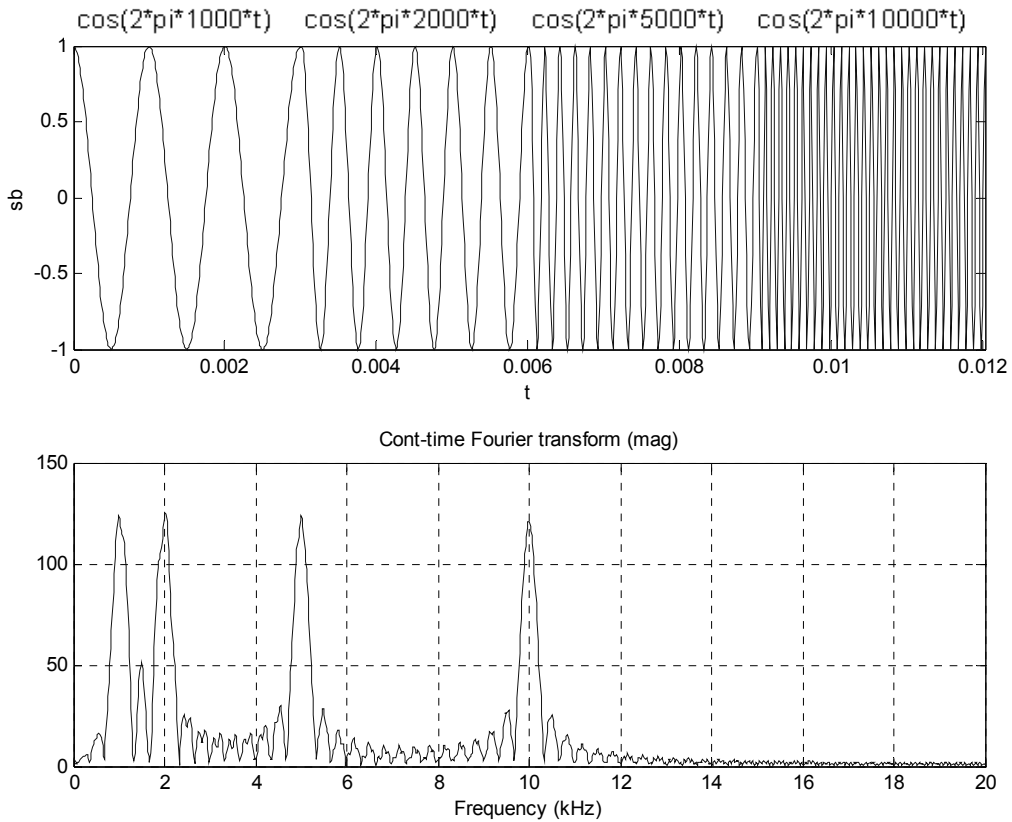
Furijeova transformacija daje informaciju o spektralnom sadržaju signala, ali se teško može zaključiti o vremenu, odnosno prostoru kod dvodimenzionalnih signala, gdje se koja od spektralnih komponenti pojavljuje.

ANALIZA NESTACIONARNIH SIGNALA

Posmatrajući amplitudne spektre signala sa Slike 127(a) i Slike 128(a) date na slikama 127(b) i 128(b) respektivno, jasno je da različiti signali imaju jednak amplitudni spektar. Oba signala sadrže prostoperiodične komponente istih učestanosti, samo se one pojavljuju u različitim vremenskim trenucima. Furijeova transformacija nije dovoljna za opis nestacionarnih signala kod kojih se spektar mijenja u toku vremena, kakav je npr. signal sa Slike 128(a).



Slika 127. (a) Stacionarni signal i (b) njegov amplitudni spektar



Slika 128. (a) Nestacionarni signal i (b) njegov amplitudni spektar

KRATKOTRAJNA FURIJEOVA TRANSFORMACIJA

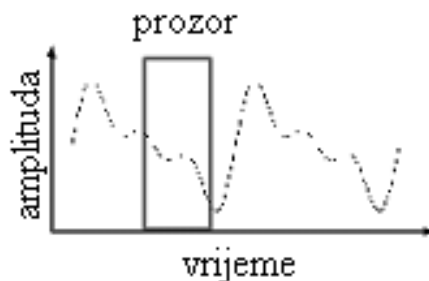
Da bi se prevazišao problem analize nestacionarnih signala uvodi se *kratkotrajna Furijeova transformacija* (*Short Time Fourier Transform - STFT*), definisana sa:

$$\text{STFT}(\tau, \omega) = \int x(t)h^*(t - \tau)e^{-j\omega t} dt .$$

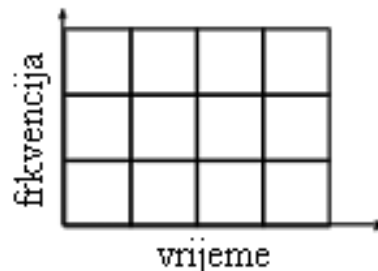
Ideja se satoji u tome da se signal posmatra kroz prozor fiksne širine, Slika 129, te se određuje spektar dijela signala koji se “vidi” kroz taj prozor. Pri tome se smatra da je u intervalu određenom širinom prozora signal stacionaran. Uvodi se pojam *lokalne frekvencije*, tj. posmatraju se spektralne komponente u određenom intervalu vremena. Ova notacija je slična notaciji koja se koristi u muzici, notama se prikazuju frekvencije koje se sviraju u određenom vremenskom intervalu.

Kratkotrajna” Furijeova transformacija djeluje na jedan dio nestacionarnog signala koji možemo smatrati stacionarnim, a koji se vidi kroz prozor konačnog trajanja pomjeren u određeni trenutak. Tako dobijamo predstavu u ravni vrijeme-frekvencija, Slika 130. Parametar frekvencija je sličan frekvenciji kod Furijeove transformacije. Kratkotrajna Furijeova transformacija zavisi od oblika prozora.

Rezolucija u vremenu i frekvenciji ne može istovremeno biti proizvoljno mala. Da bismo imali dobru rezoluciju u frekvenciji neophodno je da širina prozora u vremenu bude dovoljno velika, dok s druge strane, da bismo mogli detektovati brze promjene u signalu, širina prozora treba da bude što manja.



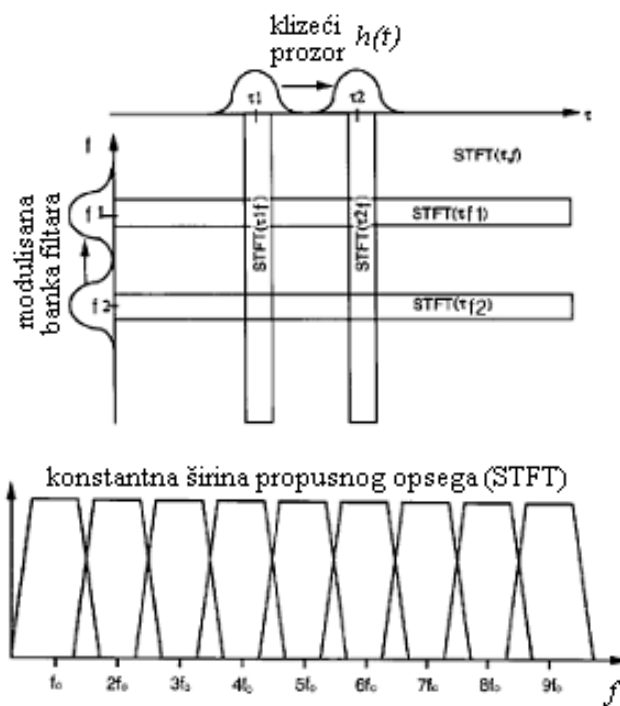
Slika 129. Izdvajanja dijela signala množenjem sa prozorom



Slika 130. Vremensko-frekvencijska ravan kod STFT

Alternativna interpretacija STFT se može dati preko *banke filtara*, Slika 131. Da bismo odredili da li se i u kom trenutku vremena u signalu pojavljuju frekvencijske komponente iz uskog frekvencijskog opsega, signal se propušta kroz niz filtara koji imaju jednake širine propusnih opsega. Na taj način se u svakom trenutku dobija informacija o frekvencijskom sadržaju signala. Propusni opseg filtara je određen rezolucijom u frekvenciji koja zavisi od širine prozora u vremenu. Može se pokazati da su u slučaju Gausovog prozora širina prozora u vremenu Δt i širina prozoraoni vezani Hajzenbergovom nejednakošću:

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}$$



Slika 131. Banka filtara

MULTIREZOLUCIONA ANALIZA

U cilju prevazilaženja ograničenja STFT u pogledu rezolucije, dopušta se da rezolucije u vremenu i frekvenciji variraju. Intuitivno, sa porastom frekvencije f_0 koja se sadrži u signalu, rezolucija u vremenu treba da raste da bi bili u mogućnosti da uočimo kratkotrajne nagle promjene signala.

Banka filtara koja se koristi za analizu signala ima konstantan relativni propusni opseg,

$$\frac{\Delta f}{f_0} = c, \text{ Slika 132.}$$



Slika 132. Banka filtara sa konstantnim relativnim propusnim opsegom

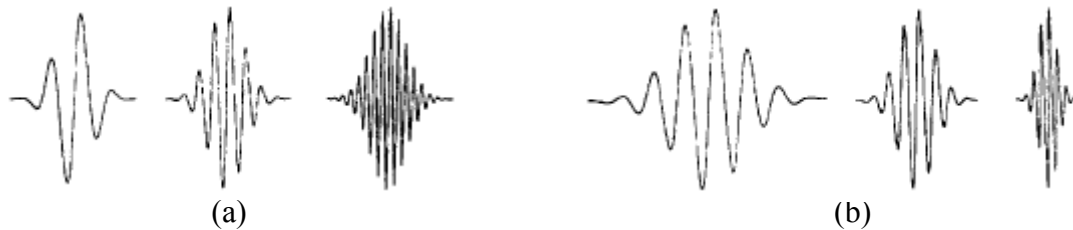
Za razliku od STFT, kod *multirezolucione analize* se koriste “uski” (kratkog trajanja) prozori na visokim frekvencijama, a “široki” prozori na niskim frekvencijama. Na taj način je moguće postići proizvoljno veliku rezoluciju u vremenu na visokim frekvencijama i proizvoljno veliku rezoluciju u frekvenciji na niskim frekvencijama. Prema tome, ova vrsta analize je dobra za signale koji imaju visokofrekvencijske komponente kratkog trajanja i niskofrekvencijske komponente dugog vremenskog trajanja, što je veoma čest slučaj u praksi.

Kontinualna Wavelet transformacija

Kontinualna Wavelet (talasić) transformacija, skraćeno CWT, prati ovaj princip uz uvođenje dodatnog pojednostavljenja: impulsni odziv svakog filtra iz banke filtera se definiše kao skalirana verzija impulsnog odziva $h(t)$ osnovnog filtra prototipa:

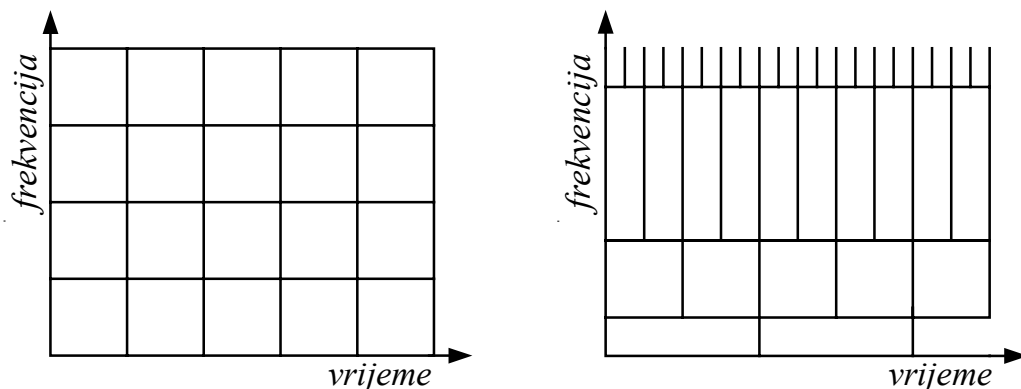
$$\text{CWT}_x(\tau, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int x(t) h^* \left(\frac{t - \tau}{\alpha} \right) dt.$$

Na Slici 132 uporedno su prikazani impulsni odzivi filtera iz banke filtera sa konstantnim propusnim opsezima i ovi impulsni odzivi. Impulsni odzivi sa Slike 132 su bazisne funkcije STFT i CWT, respektivno.



Slika 132. (a) Bazisne funkcije STFT. (b) Bazisne funkcije CWT.

Kao posljedica toga, vremensko-frekvencijska ravan više nije podijeljena na jednake dijelove kao kod STFT. Na Slici 133 prikazan je izgled vremensko-frekvencijskih ravni kod STFT i WT.



Slika 133. Podjela vremensko-frekvencijske ravni kod (a) STFT i (b) WT

Bez detaljnog ulaženja u matematičku teoriju wavelet-a, razmotrićemo osnovne osobine ove transformacije i mogućnosti njene primjene, posebno u oblasti digitalne obrade slike.

Ako se posmatra interpretacija preko banke filtara onda koeficijenti kontinualne Wavelet transformacije predstavljaju filtrirani dio signala kroz odgovarajuće propusnike opsega.

Posmatrano u vremenu ovi koeficijenti daju mjeru sličnosti (autokorelaciju) signala sa baznim funkcijama – wavelet-ima:

$$h_{\alpha,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} h\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right).$$

Pokazuje se da, ako je filtar sa impulsnim odzivom $h(t)$ propusnik opsega i ako ima konačnu energiju, važi i inverzna WT:

$$x(t) = c \iint_{\alpha>0} \text{CWT}(\tau, \alpha) h_{\alpha,\tau}(t) \frac{d\alpha d\tau}{\alpha^2}, \quad h_{\alpha,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} h\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right),$$

gdje je c je konstanta koja zavisi samo od izbora $h(t)$.

Dakle, moguće je signal predstaviti preko skaliranih i pomjerenih verzija originalnog (tzv. majka) wavelet-a. Wavelet-i se ponašaju slično kao ortogonalne baze. Sinteza signala se dobije kad se sumiraju sve orogonalne projekcije signala na wavelet-e. Iako ne čine ortogonalnu bazu već sadrže velik stepen redundantnosti, sinteza je moguća pod navedenim uslovom.

Wavelet transformacija u osnovi ima ideju posmatranja signala na različitim skalama i sa različitim rezolucijama.

Napišimo ponovo izraz za kontinualnu wavelet transformaciju:

$$\text{CWT}_x(\tau, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int x(t) h^*\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right) dt.$$

Jednostavnom smjenom pod integralom, prethodni izraz se može svesti na sljedeći oblik:

$$\text{CWT}_x(\tau, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int x(t) h^*\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right) dt = \sqrt{\alpha} \int x(\alpha t) h^*\left(t - \frac{\tau}{\alpha}\right) dt.$$

Prije nego krenemo u daljnje razmatranje, podsjetimo se da skaliranje signala znači sljedeće:

$$f(t) \rightarrow f(at), \quad a < 1 \text{ komprimovanje signala, } a > 1 \text{ ekspanzija signala.}$$

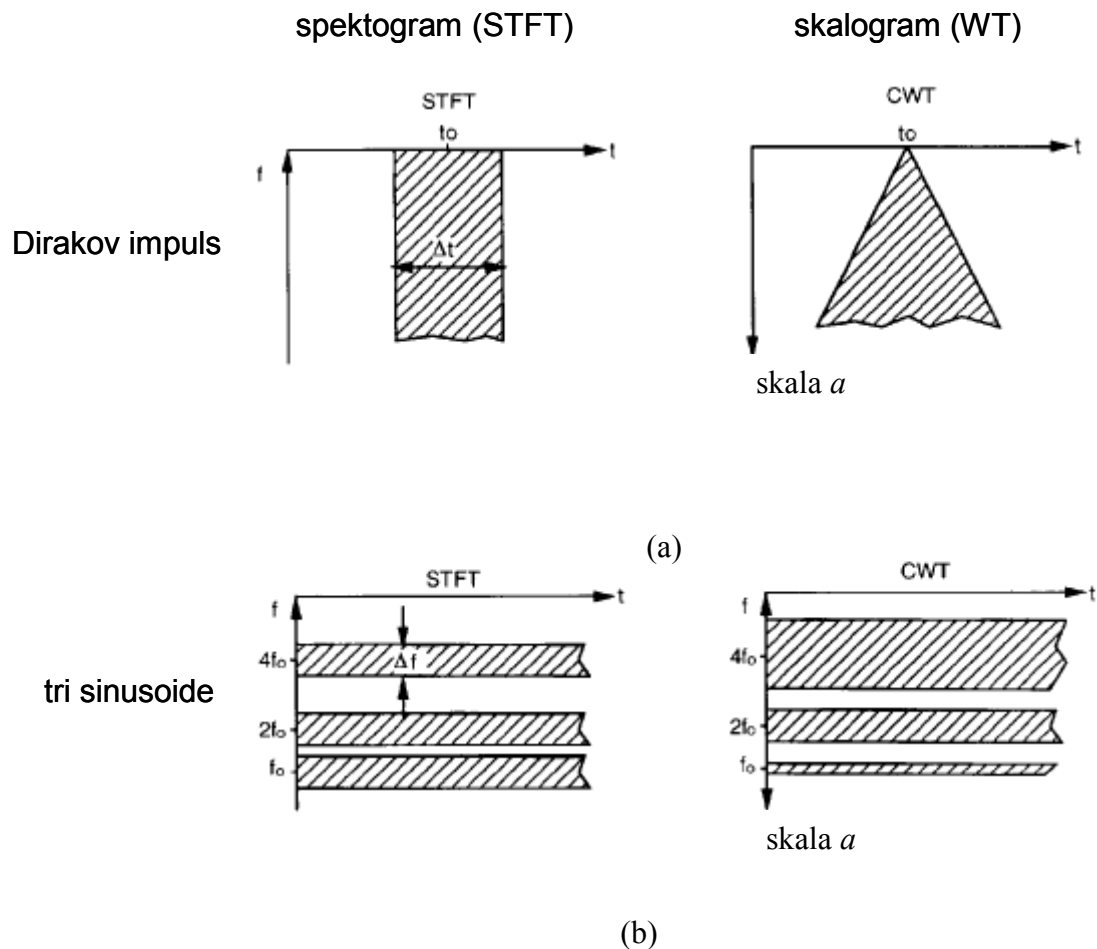
Vratimo se sada na interpretaciju prvog izraza za CWT. Sa porastom skale α impulsni odziv filtra $h(t)$, odnosno prozor kroz koji posmatramo signal, se širi u vremenu.

Posmatrajući drugi izraz za CWT vidimo da je sa porastom skale α širina prozora konstantna, a signal se sabija. Možemo reći da se sa porastom skale kroz prozor fiksne dužine vidi sve veći dio signala jer se vrši njegovo komprimovanje.

Na ovaj način posmatrano vidimo da skala kod wavelet transformacije ima isto značenje kao skala na mapama: velika skala odgovara globalnom pogledu, dok mala skala odgovara detaljnom pogledu (pri tome koristimo istu veličinu mape).

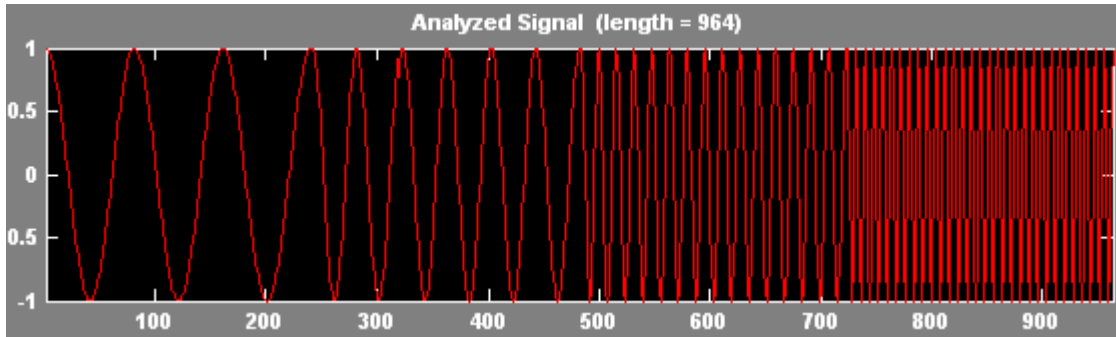
Stoga radije kažemo da WT preslikava signal u domen *vrijeme-skala* nego u domen vrijeme-frekvencija. Na malim skalama bolje su uočljive brze promjene (detalji) signala tako da mala skala odgovara visokim frekvencijama i obrnuto.

Predstavu STFT u ravni vrijeme-frekvencija nazivamo *spektrogram*, dok predstavu wavelet transformacije u ravni vrijeme-skala nazivamo *skalogram*. Primjer spektrograma i skalograma dirakovog impulsa, te signala sastavljenog od tri sinusoide različitih učestanosti, dat je na Slici 134.

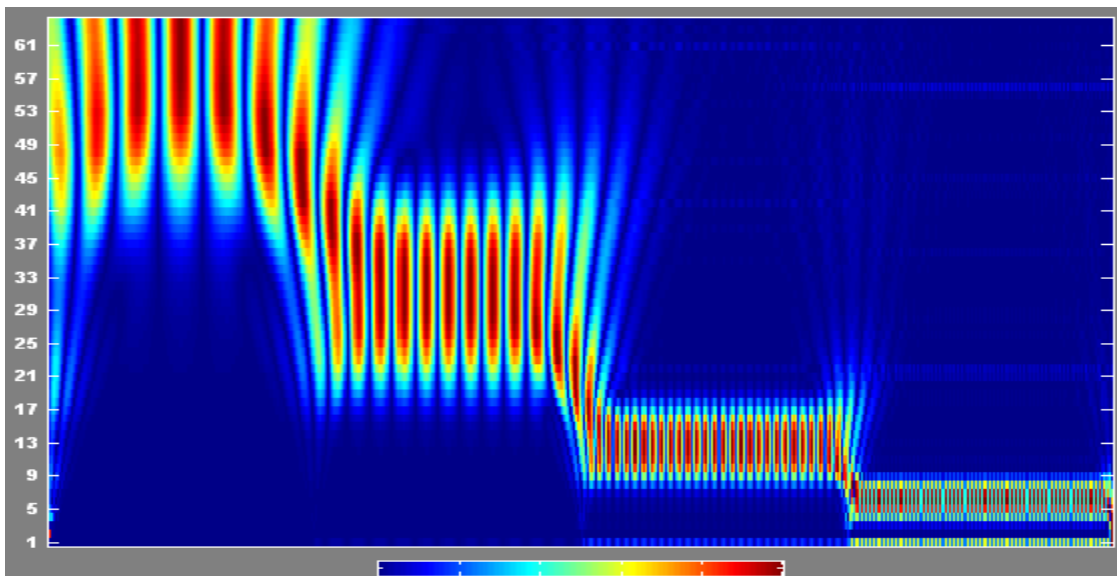


Slika 134. Raspodjela STFT u vremensko-frekvencijskoj ravni i CWT u ravni vrijeme-skala: (a) dirakovog impulsa i (b) signala sastavljenog od tri sinusoide

Na Slici 135 je data uobičajena dvodimenzionalna predstava CWT, gdje skala boja odgovara vrijednostima CWT. Na horizontalnoj osi je vrijeme, a na vertikalnoj skala.



(a)



(b)

Slika 135. Dvodimenzionalna grafička predstava wavelet transformacije.
 (a) Originalni signal. (b) Wavelet transformacija datog signala.

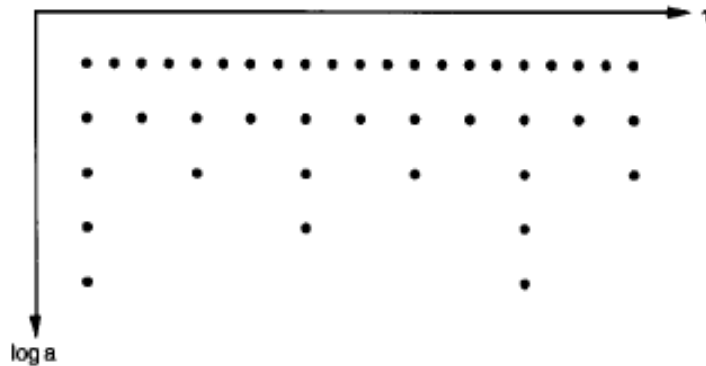
Diskretna Wavelet transformacija

Da bi se sa kontinualne wavelet transformacije prešlo na diskretnu wavelet transformaciju, odmjeravanje u ravni vrijeme-skala se radi na osnovu *dijadičke rešetke* prikazane na Slici 136, tako da je:

$$\alpha = \alpha_0^j,$$

$$\tau = k\alpha_0^j\tau_0,$$

gdje su τ_0 i α_0 koraci odmjeravanja po vremenu i skali, respektivno.



Slika 136. Dijadička rešetka

Odmjeravanjem se dolazi do sljedećih izraza:

$$c_{j,k} = \int x(t)h_{j,k}^*(t)dt,$$

$$h_{j,k}(t) = \alpha_0^{-j/2}h(\alpha_0^{-j}t - k\tau_0),$$

$$x(t) \approx c \sum_j \sum_k c_{j,k} h_{j,k}(t).$$

Detaljnou matematičkom analizom se pokazuje da poslednja relacija postaje jednakost ako se pronađe takav impulsni odziv $h(t)$ da wavelet-i čine ortonormalnu bazu.

Zbog svojih karakteristika u frekvencijskom domenu diskretni wavelet-i se biraju za impulsne odzive filtera kod piramidalnog i podopsežnog kodovanja.

Multirezoluciona piramida

Podsjetimo se da na velikim skalama široki wavelet-i daju globalni pogled. Signal je sabijen tako da unutar datog prozora staje veliki isječak signala, ali se ne vide njegovi detalji. Na malim skalama radi se sa uskim wavelet-ima tako da je signal razvučen. Kroz dati prozor se vidi mali dio signala ali sa visokom rezolucijom što omogućava da se analiziraju sitni detalji signala.

Neka je $h(n)$ impulsni odziv NF filtra sa propusnim opsegom jednakim polovini cijelog frekvencijskog opsega signala. Pretpostavimo da se faktor skaliranja odabere tako da se propusni opseg filtra smanji dva puta, što znači da signal posmatramo na dva puta većoj skali. Tako filtrirani signal ima dva puta manju rezoluciju, izgubili smo detalje signala koji se vide na nižoj skali. Granična frekvencija signala je sada dva puta manja te i frekvencija odmjerenja signala može biti dva puta manja. Po Nikvistovom kriteriju, zbog odsijecanja pola opsega, moguće je uraditi *subsampling*, odnosno ispustiti svaki drugi odmjerak:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(2n-k).$$

Dakle, subsampling uzrokuje povećanje skale, smanjenje rezolucije i gubljenje visokofrekventnih detalja.

Da bi rekonstrukcija signala bila moguća, Slika 137, neophodno je sačuvati subsamplovani signal $y(n)$, čije su dimenzije dva puta manje od polaznog signala, te razliku $d(n)$ originalnog signala i upsamplovane i filtrirane verzije signala $y(n)$, označene sa $a(n)$, koja se dobije na sljedeći način:

- upsampling signala $y(n)$ sa dva (ubacivanje po jedne nule između svaka dva odmjerka): $y'(2n) = y(n)$, $y'(2n+1) = 0$,
- interpolacija sa idealnim polupojasnim NF filtrom: $a(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h'(k)y'(n-k)$.

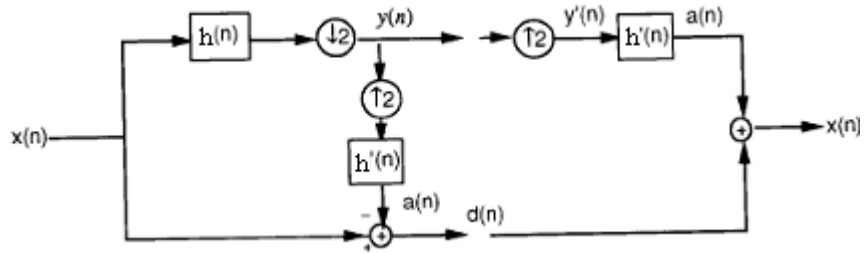
Zatim se formira signal razlike:

$$d(n) = x(n) - a(n).$$

Signal razlike $d(n)$ sadrži visokofrekvencijske detalje originalnog signala. Vrijednosti ovog signala razlike su mnogo manje od vrijednosti originalnog signala, $a(n) \approx x(n)$, što omogućava efikasnu kompresiju.

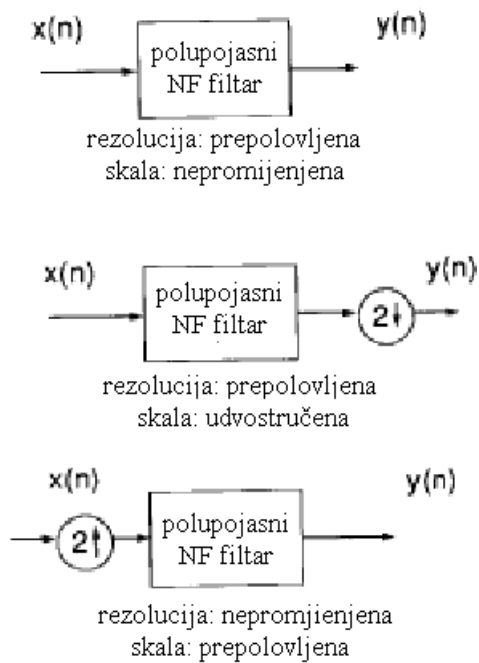
Pri rekonstrukciji signala vrši se upsampling i filtriranje signala $y(n)$, a zatim mu se dodaje signal razlike $d(n)$.

Dobijeni signal $y(n)$ možemo posmatrati kao originalni signal gledan na dva puta većoj skali. Postupak se može nastaviti tako da se sada signal $y(n)$ gleda na dva puta većoj skali što odgovara originalnom signalu posmatranom na četiri puta većoj skali, itd...



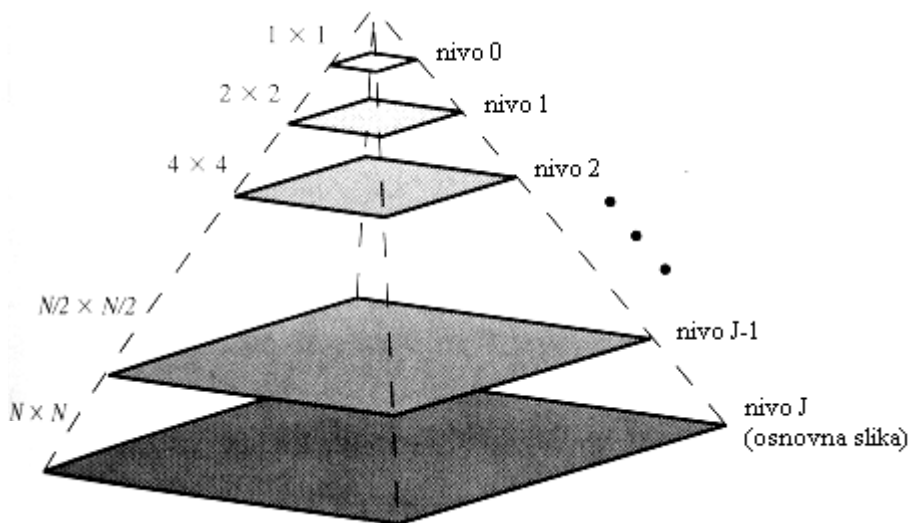
Slika 137. Jedna iteracija u formiranju multirezolucione piramide

Slika 138 prikazuje šta se dešava sa skalom i rezolucijom signala pri filtriranju idealnim polupojasnim NF filtrom, subsamplovanju i upsamplovanju.



Slika 138. Uticaj (a) filtriranja idealnim polupojasnim NF filtrom, (b) subsamplovanja i (c) upsamplovanja na rezoluciju i skalu signala

Kada se radi o dvodimenzionalnim signalima kao što je slika, na ovaj način se formira multirezoluciona piramida, Slika 139. Na svakom višem nivou se čuvaju slika dva puta manje rezolucije nego što je ona na prethodnom nivou i slika detalja neophodne za rekonstrukciju signala.

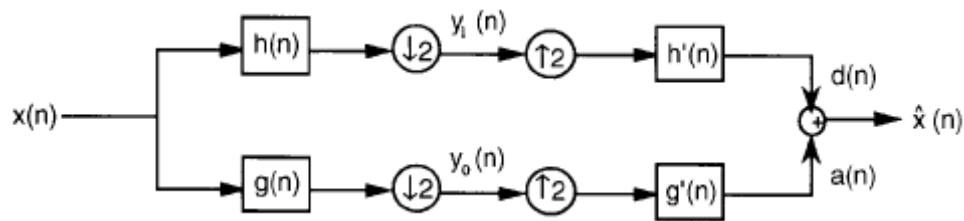


Slika 139. Multirezoluciona piramida

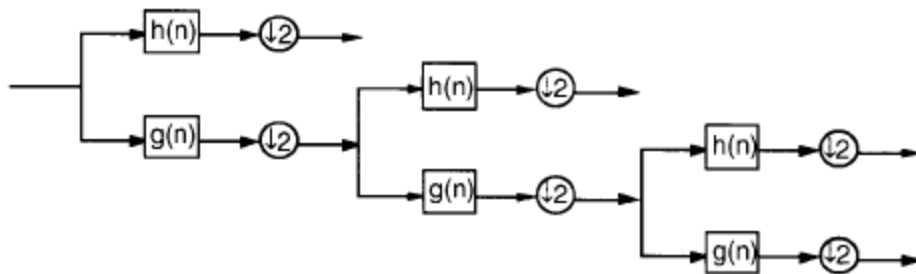
Podopsežno kodovanje

U postupku formiranja multirezolucione piramide postoji izvjesna doza redundantnosti: signal razlike $d(n)$ sadrži samo VF detalje signala $x(n)$, a odmjeran je jednakom frekvencijom odmjeravanja kao $x(n)$. Budući da se radi o signalu čija je širina frekvencijskog opsega dva puta manja nego širina frekvencijskog opsega originalnog signala, može se uzeti dva puta manje odmjeraka! Ovo vodi postupku koji se naziva *podopsežno kodovanje*.

Jedna iteracija podopsežnog kodovanja prikazana je na Slici 140. Postupak se nastavlja tako što se u svakoj sljedećoj iteraciji NF dio signala ponovo razdvaja na NF i VF dio i subsampluje, Slika 141. Impulsni odzivi NF filtera označeni su sa $g(n)$, dok su impulsni odzivi VF filtera označeni sa $h(n)$. Pri filtriranju se koristi banka filtera sa konstantnim relativnim propusnim opsezima, Slika 132. Subsampleovani VF dio se čuva kao slika detalja koja se koristi pri rekonstrukciji signala.



Slika 140. Jedna iteracija podopsežnog kodovanja



Slika 141. Postupak podopsežnog kodovanja

Dvodimenzionalne banke filtara i wavelet-i

Uobičajen način dvodimenzionalnog proširenja je da se koristi tzv. “separabilni wavelet-i”. Dvodimenzionalna skalirajuća funkcija i dvodimenzionalne wavelet funkcije se dobiju kao separabilni proizvodi jednodimenzionalne skalirajuće funkcije i jednodimenzionalnog wavelet-a:

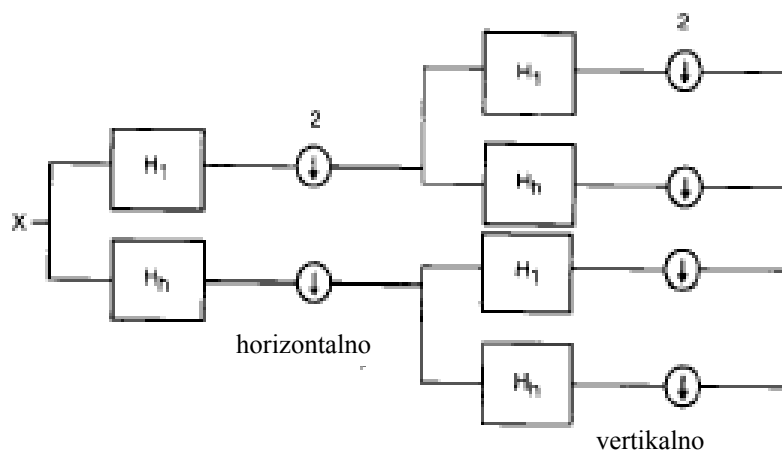
$$g_c(x, y) = g_c(x) \cdot g_c(y)$$

$$h_c^1(x, y) = g_c(x) \cdot h_c(y)$$

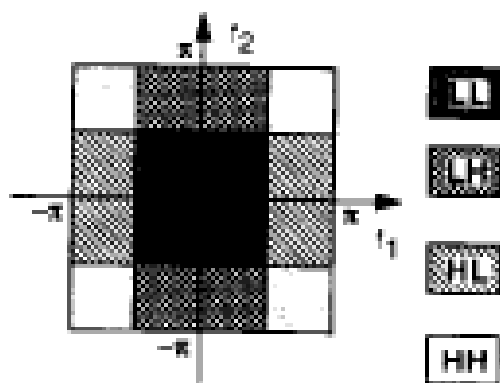
$$h_c^2(x, y) = h_c(x) \cdot g_c(y)$$

$$h_c^3(x, y) = h_c(x) \cdot h_c(y)$$

Na taj način se dobije separabilna dvodimenzionalna banka filtara. Subsampling sa 2 se radi po svakoj dimenziji, Slika 142, tako da se skale promijeni 4 puta.



Slika 142. Dvodimenzionalna banka filtara

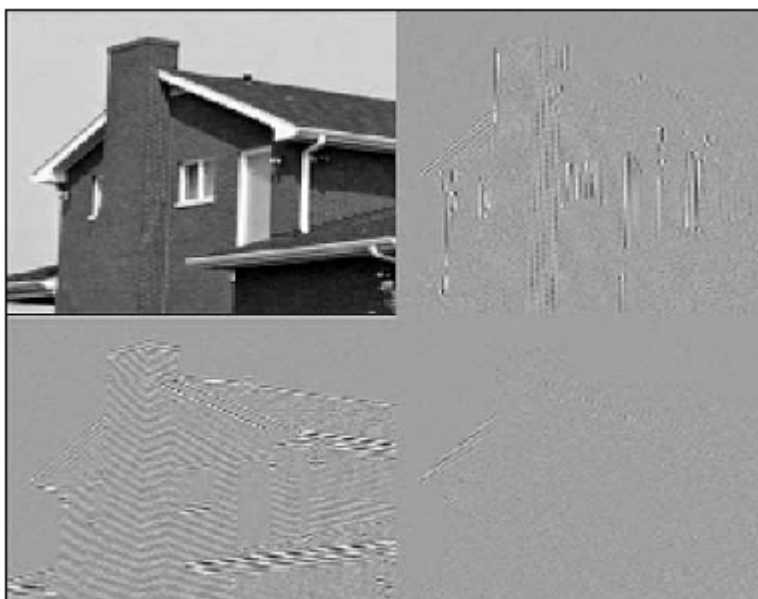


Slika 143. Dvodimenzionalno filtriranje

Multirezoluciona reprezentacija slike se u svakom nivou dekompozicije sastoji od jedne diskretne slike aproksimacije na nižoj rezoluciji i tri slike detalja, Slika 144. Aproksimaciji odgovara dio spektra koji se dobije NF filtriranjem po oba pravca u frekvencijskoj ravni. Jedna od slika detalja se dobije horizontalnim NF i vertikalnim VF filtriranjem, druga vertikalnim NF i horizontalnim VF filtriranjem, dok se dijagonalna slika detalja dobije VF filtriranjem po oba pravca, Slika 143. Višestrukim ponavljanjem dolazi se do slika sa sve lošijom rezolucijom, što odgovara piramidalnoj dekompoziciji, Slika 145.

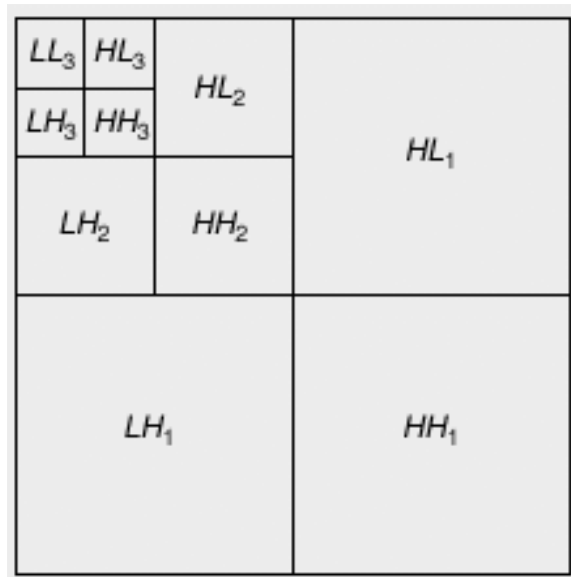


(a)



(b)

Slika 144. [10] Jedan nivo dekompozicije: (a)originalna slika, (b) dekompozicija



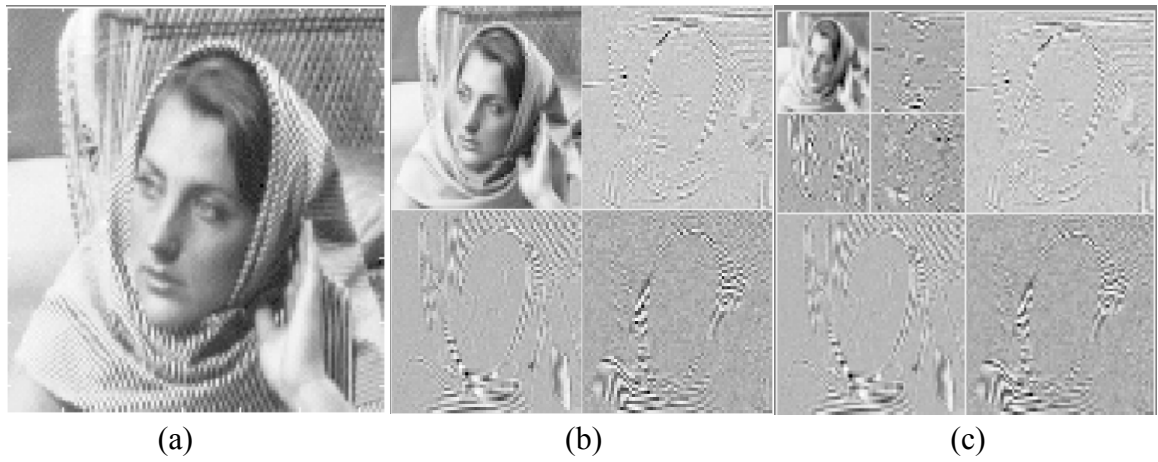
(a)



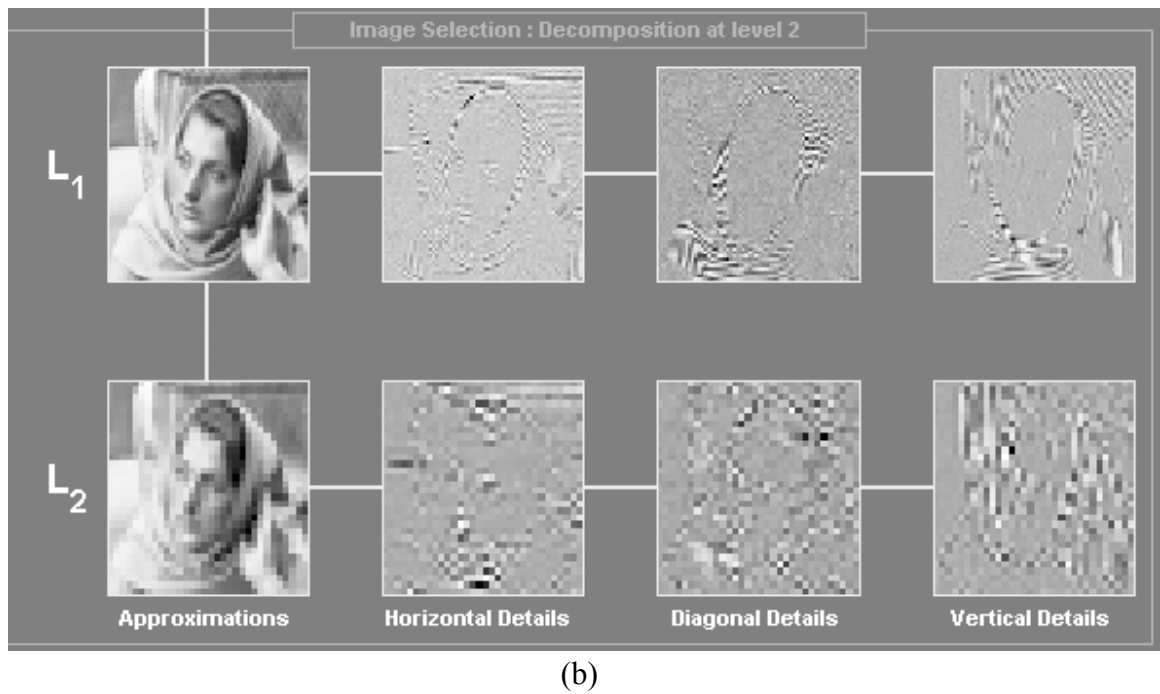
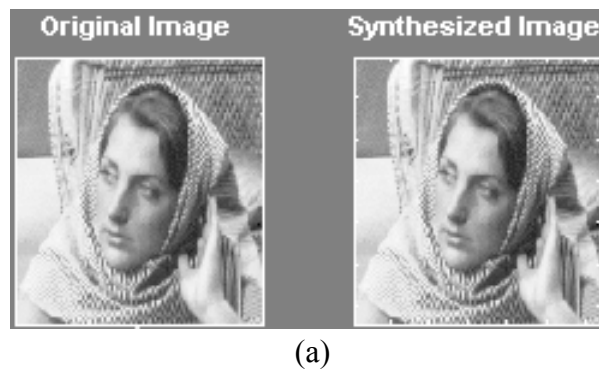
(b)

Slika 145. [10] Tri nivoa dekompozicije: (a) šematski prikaz dekompozicije, (b) dekompozicija slike 144(a)

Primjeri dedkompozicije prikazani su na Slici 146 i Slici 147.

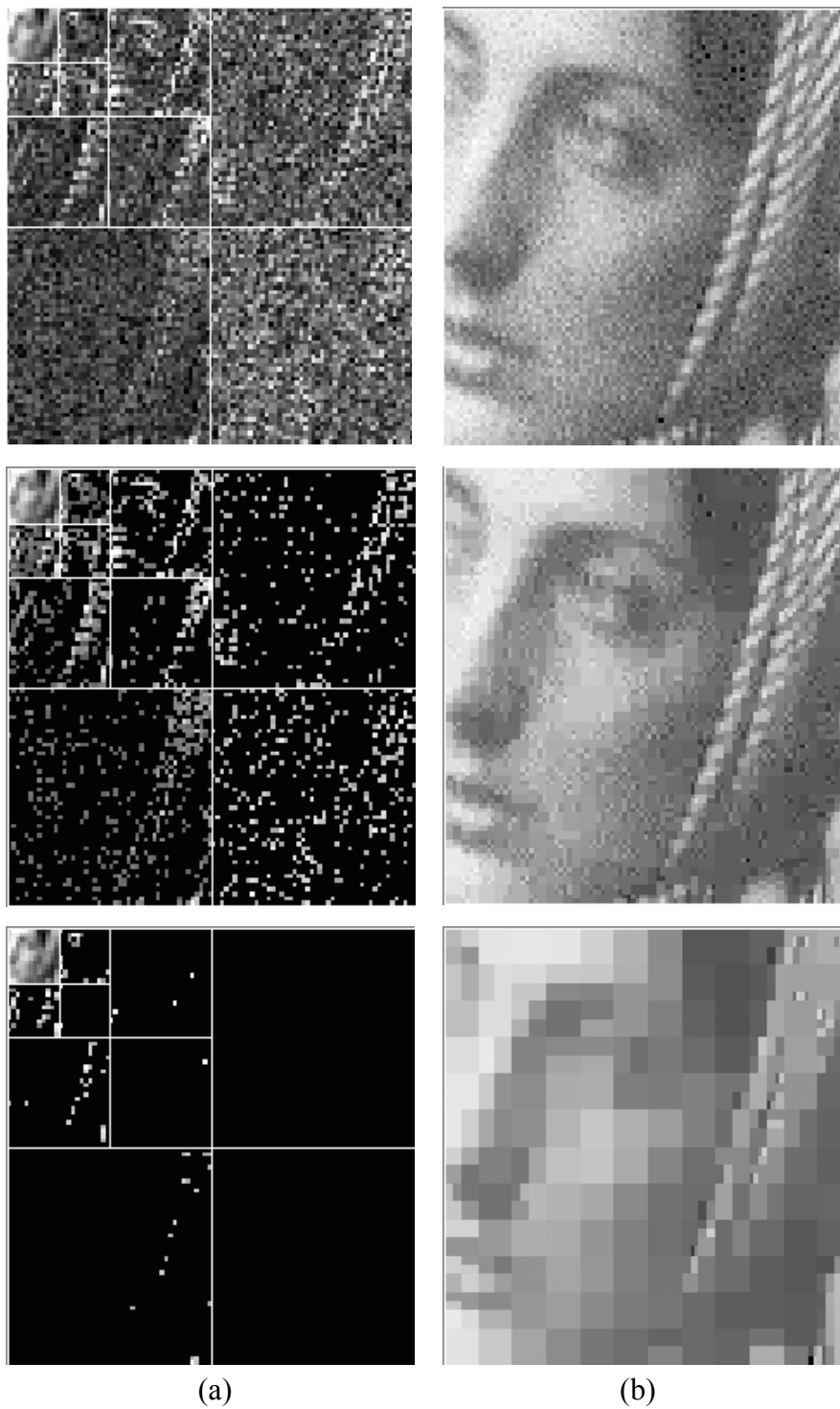


Slika 146. [11] (a) Original. (b) Jedan nivo dekompozicije. (c) Dva nivoa dekompozicije.



Slika 147. [11] (a) Originalna i rekonstruisana slika. (b) Prvi i drugi nivo dekompozicije.

Uobičajen pristup pri kompresiji slike wavelet transformacijom se svodi na piramidalnu dekompoziciju slike u veći broj podopsega, poslije čega se dobijeni podopsezi neovosno koduju. Primjeri rekonstruisanih slika koje se dobiju dekompozicijom na tri nivoa i zadržavanjem samo sve manjeg i manjeg broja wavelet koeficijenata su dati na Slici 148.



Slika 148. [11] Kompresija slike primjenom wavelet transformacije. (a) Dekompozicije slike uz poništene koeficijente niskog nivoa. (b) Rekonstruisane slike.