Binarna erozija

Binarna erozija smanjuje sliku uklanjajući rubne piksele objekta. Posmatrajući Sliku 155, lijevi skup je rezultat erozije desnog skupa. Takvu eroziju je moguće izvesti markirajući sve piksele koji imaju bar jedan susjedni piksel koji pripada pozadini, a zatim pridružujući vrijednost nula (bijelo) svim markiranim pikselima.

Erozija slike **A** strukturnim elementom **B** se definiše sa:

$$E(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \{c \mid (\mathbf{B})_c \subseteq \mathbf{A}\}.$$

Drugim riječima, erozija slike **A** strukturnim elementom **B** je skup tačaka *c* koje zadovoljavaju uslov da se sve tačke strukturnog elementa poklope sa crnim tačkama slike, kad se strukturni element translira za *c*.

Evo jednostavnog primjera. Posmatrajmo strukturni element $\mathbf{B} = \{(0,0),(0,1)\}$ i sliku $\mathbf{A} = \{(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$. Erozija je skup svih elemenata (vektora) koji vrše translaciju strukturnog elementa tako da se on preklopi sa crnim pikselima slike. To znači da nije neophodno razmatrati sve translacije, već samo one koje postavljaju koordinatni početak (ako on pripada strukturnom elementu) na poziciju jednog od elemenata **A**. Postoje četiri takve translacije:

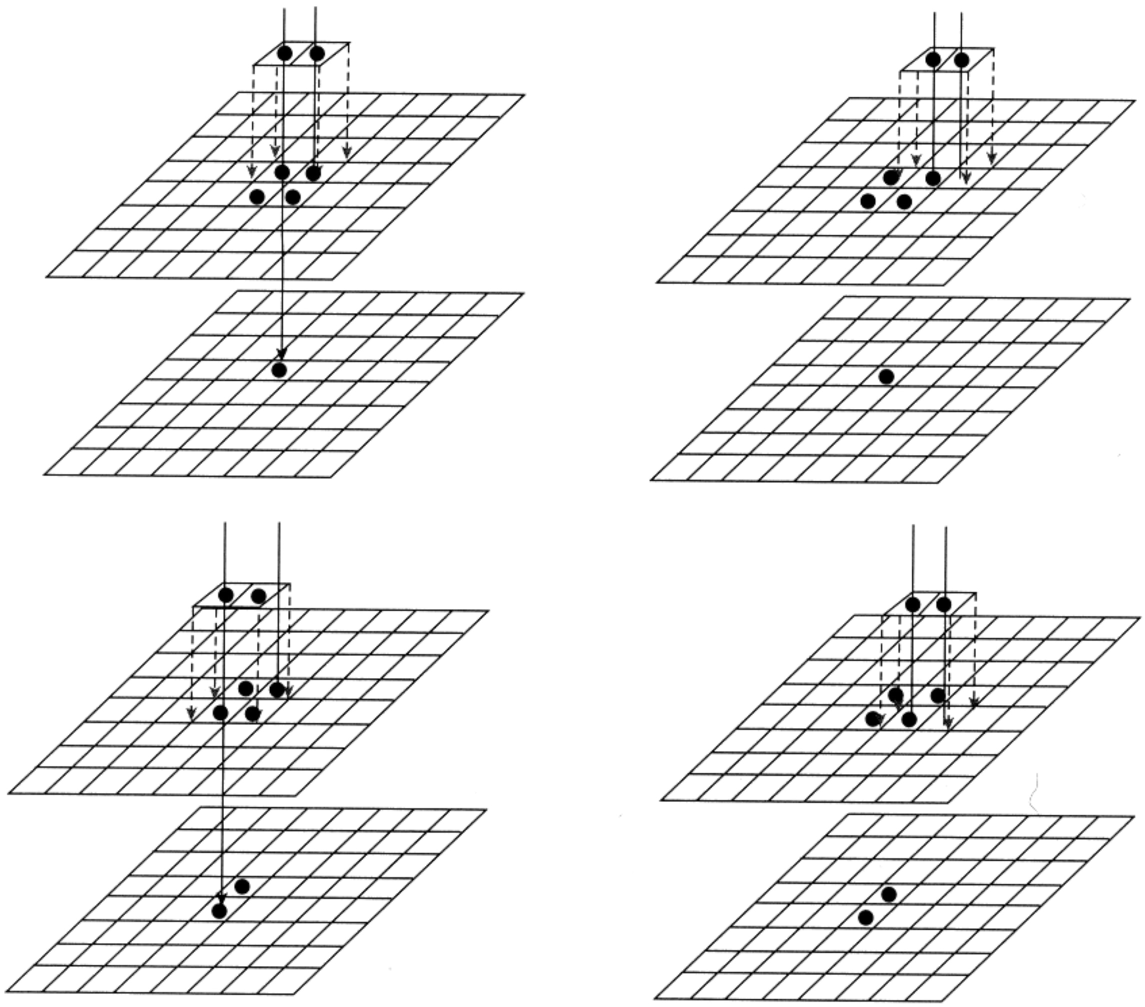
$$(\mathbf{B})_{(3,3)} = \{(3,3),(3,4)\},$$
$$(\mathbf{B})_{(3,4)} = \{(3,4),(3,5)\},$$
$$(\mathbf{B})_{(4,3)} = \{(4,3),(4,4)\},$$
$$(\mathbf{B})_{(4,4)} = \{(4,4),(4,5)\}.$$

U dva slučaja, $(\mathbf{B})_{(3,3)}$ i $(\mathbf{B})_{(4,3)}$, rezultujući (translirani) skupovi su podskupovi od **A**, te je rezultat erozije skup $\{(3,3),(4,3)\}$. Ovaj primjer je ilustrovan na Slici 155.

U slučajevima kada strukturni element sadrži koordinatni početak, rezultat erozije je podskup originalne slike, a ako strukturni element ne sadrži koordinatni početak to ne mora biti. Posmatrajmo strukturni element $\mathbf{B} = \{(1,0)\}$, koordinatni početak nije uključen. Erozija se računa kao i ranije, samo što nije dovoljno postaviti koordinatni početak strukturnog elementa samo u crne piksele slike, već se on mora translirati u sve moguće pozicije u kojima će se crni pikseli strukturnog elementa preklopiti sa crnim pikselima slike **A**. To su translacije:

$$(\mathbf{B})_{(2,3)} = \{(3,3)\},$$
$$(\mathbf{B})_{(2,4)} = \{(3,4)\},$$
$$(\mathbf{B})_{(3,3)} = \{(4,3)\},$$
$$(\mathbf{B})_{(3,4)} = \{(4,4)\}.$$

Rezultat erozije $\{(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}$ nije podskup originalne slike.



Slika 155. [4] Primjer erozije

Osim u specijalnim slučajevima erozija i dilatacija nisu inverzne operacije:

$$D(E(\mathbf{A},\mathbf{B}),\mathbf{B}) \neq \mathbf{A} \neq E(D(\mathbf{A},\mathbf{B}),\mathbf{B}).$$

Ipak, erozija i dilatacija su na neki način dualne operacije. *Princip dualnosti* glasi:

$$D^C(\mathbf{A},\mathbf{B}) = E(\mathbf{A}^C,\hat{\mathbf{B}}),$$
$$E^C(\mathbf{A},\mathbf{B}) = D(\mathbf{A}^C,\hat{\mathbf{B}}).$$

Dakle, ako posmatramo **A** kao objekat, a $\mathbf{A}^C$ kao pozadinu, poslednje relacije kažu da je komplement dilatacije objekta strukturnim elementom $\mathbf{B}$ osto što i erozija pozadine reflektovanim strukturnim elementom $\hat{\mathbf{B}}$, dok je komplement erozije objekta ekvivalentan dilataciji pozadine reflektovanim strukturnim elementom.

Dokaz ovog principa dualnosti je jednostavan i može poslužiti kao ilustracija manipulacije morfološkim izrazima.

Dokaz:
Na osnovu definicije erozije, njen komplement je:

$$E^C(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \{z | (\mathbf{B})_z \subseteq \mathbf{A}\}^C .$$

Kako je $(\mathbf{B})_z \subseteq \mathbf{A}$, slijedi da je presjek $(\mathbf{B})_z$ sa $\mathbf{A}^C$ prazan skup. Možemo reći da je erozija skup svih vektora *z* za koje vrijedi da strukturni element **B** nakon translacije za *z* ne zahvata ni jednu tačku pozadine:

$$E^C(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \{z | (\mathbf{B})_z \cap \mathbf{A}^C = \Phi\}^C .$$

Dakle, posmatramo one translacije strukturnog elementa (odnosno, tražimo odgovarajuće vektore *z*) koje nemaju zajedničkih tačaka sa pozadinom. Komplement tog skupa su oni vektori koji će sve tačke strukturnog elementa translirati tako da rezultujuće tačke pripadaju pozadini:

$$E^C(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \{z | b + z \in \mathbf{A}^C, b \in \mathbf{B}\},$$

što je isto što i

$$E^C(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \{z | b + z = a, a \in \mathbf{A}^C, b \in \mathbf{B}\}.$$

Sada, ako je $a = b + z$, slijedi:

$$z = a - b ,$$

$$E^C(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \{z | z = a - b, a \in \mathbf{A}^C, b \in \mathbf{B}\}.$$

Konačno, koristeći definiciju refleksije , dobijamo:

$$E^C(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \{z | z = a + b, a \in \mathbf{A}^C, b \in \hat{\mathbf{B}}\},$$

što je definicija $D(\mathbf{A}^C, \hat{\mathbf{B}})$.

Kada koristimo binarni strukturni element za eroziju, crni pikseli strukturnog elementa moraju odgovarati crnim pikselima slike da bi piksel rezultujuće slike bio postavljen na “1” (crno). Ovakva tvrdnja ne vrijedi za bijele piksele. Pri eroziji zanemarujemo šta se dešava sa bijelim pikselima strukturnog elementa, oni ne moraju da se poklope sa bijelim pikselima slike.

Koristeći princip dualnosti i De Morgan-ov teorem, eroziju je moguće definisati i preko Minkowski oduzimanja:

$$E(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \left(D\left(\mathbf{A}^C, \hat{\mathbf{B}}\right)\right)^C = \left(\bigcup_{b\in\mathbf{B}}\left(\mathbf{A}^C - b\right)\right)^C = \bigcap_{b\in\mathbf{B}}\left(\mathbf{A}^C - b\right)^C = \bigcap_{b\in\mathbf{B}}\left(\mathbf{A} - b\right) = \mathbf{A}\Theta\hat{\mathbf{B}}\,.$$

Osobine erozije

Erozija nije komutativna:

$$E(\mathbf{A},\mathbf{B}) \neq E(\mathbf{B},\mathbf{A}).$$

Erozija je invarijantna na translaciju:

$$E(\mathbf{A},(\mathbf{B}+z)) = \mathbf{A}\Theta\left(\left(\hat{\mathbf{B}}+z\right)\right) = \left(\mathbf{A}\Theta\hat{\mathbf{B}}\right) + z = E(\mathbf{A},\mathbf{B}) + z$$

Neophodno je navesti još neke osobine dilatacije i erozije. Za proizvoljni strukturni element **B** i dva objekta slike $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$ takva da je $\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}_2$ vrijedi:

$$D(\mathbf{A}_1,\mathbf{B}) \subset D(\mathbf{A}_2,\mathbf{B}),$$
$$E(\mathbf{A}_1,\mathbf{B}) \subset E(\mathbf{A}_2,\mathbf{B}).$$

Za dva strukturna elementa $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{B}_2$ takva da je $\mathbf{B}_1 \subset \mathbf{B}_2$ vrijedi:

$$E(\mathbf{A},\mathbf{B}_1) \supset E(\mathbf{A},\mathbf{B}_2).$$

Boole-ova konvolucija

Proizvoljnu binarnu sliku (skup “crnih” piksela) **A** je moguće predstaviti kao:

$$\mathbf{A} \leftrightarrow \boldsymbol{a} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} a[j,k] \bullet \delta[m-j, n-k],$$

gdje $\sum$ označava ”ILI”, $\bullet$ “I” operaciju, $a[j,k]$ je *karakteristična funkcija* data sa:

$$a[j,k]=\begin{cases}1 & a\in \mathbf{A}\\ 0 & a\notin \mathbf{A}\end{cases},$$

a $\delta[m,n]$ je Boole-ova verzija Dirakove delta funkcije:

$$\delta[m,n]=\begin{cases}1 & m=n=0\\ 0 & \textit{inače}\end{cases}.$$

Ako posmatramo sliku **A** kao niz Diraco-vih funkcija, konvolucija strukturnog elementa **B** sa slikom **A** ponavlja strukturni element na mjestu svake Dirac-ove funkcije. Dakle, izlazana slika je skup svih translacija strukturnog elementa za koje je $a[j,k]=1$, što je definicija dilatacije. Dakle, dilataciju možemo posmatrati kao Boole-ovu konvoluciju:

$$D(\mathbf{A},\mathbf{B})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}a[j,k]\bullet b[m-j,n-k]=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\,.$$

Kako su operacije “I” i “ILI” komutativne, to se može pisati i kao:

$$D(\mathbf{A},\mathbf{B})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}a[m-j,n-k]\bullet b[j,k]=\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}=D(\mathbf{B},\mathbf{A}).$$

Strukturni element za matematičku morfologiju predstavlja isto što i konvolucioni kernel za teoriju linearnog filtriranja.

Primjenjujući De Morgan-ov teorem na prethodnu relaciju dobijamo:

$$E(\mathbf{A},\mathbf{B})=D^{C}\left(\mathbf{A}^{C},\hat{\mathbf{B}}\right),$$

$$\begin{aligned}E(\mathbf{A},\mathbf{B})&=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}a^{C}[m-j,n-k]\bullet b[-j,-k]\right)^{C}=\\&=\prod_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^{C}[m-j,n-k]\bullet b[-j,-k]\right)^{C}=\\&=\prod_{k=-\infty}^{\infty}\prod_{k=-\infty}^{\infty}\left(a^{C}[m-j,n-k]\bullet b[-j,-k]\right)^{C}=\\&=\prod_{k=-\infty}^{\infty}\prod_{k=-\infty}^{\infty}\left(a[m-j,n-k]+b^{C}[-j,-k]\right)\end{aligned}$$

Prema tome, i dilatacija i erozija se mogu prikazati u formi konvolucije u Boole-ovoj algebri.