Univerzitet u Banjaluci
Elektrotehnički fakultet
Katedra za opštu elektrotehniku
Digitalna obrada signala

Vježba 6.
Stohastički procesi

Funkcije MATLAB-a koje se koriste u ovoj vježbi

Stohastičke signale je u MATLAB-u moguće generisati pomoću ugrađenog generatora slučajnih brojeva. Ova funkcionalnost se može postići pomoću funkcija:

```
w = rand(M, N);
```

koja generiše matricu w dimenzija $M \times N$ slučajnih brojeva uzetih iz uniformne raspodjele na intervalu $[0,1]$, tj. $w \sim U(0,1)$ i

```
w = randn(M, N);
```

koja generiše matricu w dimenzija $M \times N$ slučajnih brojeva uzetih iz normalne (Gausove) raspodjele sa nultom srednjom vrijednošću i varijansom 1, tj. $w \sim N(0,1)$.

Funkciju gustine raspodjele datog stohastičkog signala je moguće estimirati pomoću histograma vrijednosti tog signala. Histogram vrijednosti vektora u MATLAB-u konstruiše i crta funkcija

```
hist(x, N)
```

gdje je x vektor, a N broj ćelija histograma.
Srednja vrijednost vektora se izračunava korištenjem funkcije

```
m = mean(x);
```

U slučaju da je x matrica srednja vrijednost se računa po kolonama i m je vektor sa onoliko elemenata koliko kolona ima matrica x. Ukoliko se želi računanje srednje vrijednosti po vrstama može se koristiti oblik

```
m = mean(x, 2);
```

Standardna devijacija vektora se izračunava korištenjem funkcije

```
s = std(x);
```

U slučaju da je x matrica srednja vrijednost se računa po kolonama i m je vektor sa onoliko elemenata koliko kolona ima matrica x. Ukoliko se želi računanje srednje vrijednosti po vrstama može se koristiti oblik

```
s = std(x,0,2);
```

Kros-korelacija dva vektora može se izračunati pomoću funkcije

```
r = xcorr(x, y, N, 'biased');
```

gdje je N broj pomaka u kojima se računa kros-korelacija. Ako se N izostavi koristi se vrijednost za 1 manja od dužine dužeg vektora. Rezultujući vektor sadrži vrijednost kros-korelacije za pomake od –N do N. Kros-korelacija se sada može nacrtati pomoću:

```
plot(-N:N, r)
```

Zadatak

Stacionarnost i ergodičnost stohastičkih procesa

1. Data su tri stohastička procesa:

$$v_1(n) = 5\big(w(n) - 0,5\big)\sin\frac{\pi n}{N} + 0.02n, \quad w(n) \sim U(0,1),$$

$$v_2(n) = \big(w(n) - 0,5\big)A + B, \quad w(n), A, B \sim U(0,1) \text{ i međusobno nezavisni},$$

$$v_3(n) = 3\big(w(n) - 0,5\big) + 0,5, \quad w(n) \sim U(0,1),$$

   gdje su $w(n)$ slučajni procesi, a A i B slučajne promjenljive uzeti iz iste raspodjele, ali međusobno statistički nezavisni.
   Napisati tri MATLAB funkcije `sp1.m`, `sp2.m` i `sp3.m` koje će generisati matrice slučajnih brojeva dimenzija $M \times N$, i to tako da svaka od M vrsta matrice sadrži po jednu realizaciju odgovarajućeg slučajnog procesa (v_1, v_2 i v_3). Svaka realizacija predstavljena je sa po N odmjeraka. M i N treba da budu argumenti ovih funkcija. Cilj nam je da ispitamo stacionarnost i ergodičnost ovih procesa.
2. Okvirna ideja o stacionarnosti i ergodičnosti procesa može se dobiti posmatranjem njihovih realizacija. Za svaki od procesa generisati po 4 realizacije dužine 100 odmjeraka (M=4, N=100) i prikažite ih pomoću `subplot`. Da li je moguće posmatranjem ovih realizacija reći nešto o stacionarnosti i ergodičnosti ovih signala?
3. Izračunati srednju vrijednost i standardnu devijaciju ovih procesa dobijene usrednjavanjem po ansamblu i nacrtati ih kao funkcije diskretnog vremena n. Strogo gledano, ansambl sadrži beskonačno mnogo realizacija procesa, ali za praktične potrebe veliki broj realizacija će biti dovoljan da bi se dobila pristojna aproksimacija ovih veličina, pokušajte npr. M=100 i M=1000. U oba slučaja možete izabrati N=100. Na osnovu dobijenih grafika (ponovo) komentarišite stacionarnost procesa.
4. Analitičkim putem, polazeći od jednačina procesa, odrediti njihove srednje vrijednosti i standardne devijacije. Uporediti dobijene rezultate sa eksperimentalnim tako što ćete na istim graficima nacrtati analitičke i eksperimentalne vrijednosti.
5. Odredite srednje vrijednosti i standardne devijacije datih procesa usrednjavanjem po vremenu za 4 realizacije svakog od procesa. Usrednjavanje po vremenu teorijski zahtijeva beskonačno veliki broj odmjeraka, ali praktično dovoljno je uzeti dugačak uzorak signala, npr. N=1000. Koji procesi su ergodični na osnovu ovog eksperimenta?

Prolazak stohastičkih procesa kroz linearne sisteme

6. Data su dva stohastička procesa čiji su odmjerci međusobno nekorelisani (bijeli šum):

$$v_1(n) = \sqrt{12}\big(w(n) - 0,5\big), \quad w(n) \sim U(0,1),$$

$$v_2(n) \sim N(0,1).$$

Analitičkim putem odrediti varijansu procesa $v_1(n)$. Kako izgledaju autokorelacione funkcije ovih procesa? Generisati N=5000 odmjeraka svakog od navedenih procesa. Na osnovu generisanih odmjeraka izračunati autokorelacije ova dva signala usrednjavanjem po vremenu. Nacrtati dobijene sekvence. Uporediti dobijene rezultate sa teorijskim.

7. Signale iz prethodne tačke propustiti kroz linearni sistem prvog reda čija je funkcija prenosa

$$H(z)=\frac{0,3}{1-0,8z^{-1}}.$$

Odrediti i nacrtati impulsni odziv ovog sistema. Za koje vrijeme se može smatrati da se završio prelazni režim?

8. Odrediti izlazne signale $y_1(n)$ i $y_2(n)$ koji se dobiju kada se signali iz tačke 6. dovedu na ulaz sistema iz tačke 7. U narednim tačkama potrebno je posmatrati izlazne signale nakon završetka prelaznog režima kako bismo obezbijedili njihovu stacionarnost. Dobijeni procesi pripadaju klasi Markovljevih stohastičkih procesa.
9. Aproksimacija funkcije gustine vjerovatnoće stohastičkog procesa može se dobiti pomoću histograma vrijednosti njegove realizacije. Nacrtati histograme signala $y_1(n)$ i $y_2(n)$ sa 100 ćelija. Komentarisati dobijene rezultate.
10. Estimirati autokorelacione funkcije signala $y_1(n)$ i $y_2(n)$ za 64 pomaka. Nacrtati ove estimacije.
11. Pronaći analitički izraz za autokorelacionu funkciju izlaznog signala ukoliko se na ulaz sistema iz tačke 7. dovede neki od signala iz tačke 6. Uporediti dobijene rezultate sa rezultatima estimacije iz tačke 10.
12. Estimirati kros-korelaciju ulaznog i izlaznog signala. Na osnovu ove kros-korelacije estimirati impulsni odziv sistema i uporediti ga sa tačnim impulsnim odzivom određenim u tački 7.
13. Korištenjem rezultata iz tačke 10. i Viner-Hinčinove teoreme estimirati i nacrtati spektralnu gustinu snage izlaznog signala.
14. Analitičkim putem odrediti spektralnu gustinu snage izlaznog signala i uporediti je sa rezultatom iz tačke 13.