

Primjer 1.

Polazeći od analognog filtra čija je funkcija prenosa

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c},$$

gdje je Ω_c 3-dB granična učestanost analognog filtra, projektovati digitalni niskopropusni filter koristeći metodu impulsne invarijanse.

Rješenje

Preslikavanje analognog filtra u digitalni mora očuvati osnovne osobine frekvencijskog odziva filtra. Naime, imaginarna osa u s -ravni se mora preslikati u jediničnu kružnicu u z -ravni, i stabilan analogni filter mora dati stabilan digitalni filter.

Ovu funkciju prenosa preslikaćemo u digitalni domen korišćenjem metode impulsne invarijanse. Osnovna ideja je da se za impulsni odziv digitalnog filtra uzme periodično odmjeren impulsni odziv analognog filtra.

$$h(n) = h_a(n\Delta t),$$

gdje je Δt period odmjerenja.

Neka je data funkcija prenosa analognog filtra razvijena u parcijalne razlomke:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k},$$

funkcija prenosa digitalnog filtra dobijenog metodom impulsne invarijanse će biti:

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k \Delta t} z^{-1}}. \quad (1)$$

Dakle, polovi s_k funkcije prenosa analognog filtra će se preslikati u polove $z_k = e^{s_k \Delta t}$ odgovarajućeg digitalnog filtra. Međutim, važno je napomenuti da metoda impulsne invarijanse ne preslikava s -ravan u z -ravan pomoću ove jednačine, to je samo relacija kojom se preslikavaju polovi.

Iz jednačine (1) u ovom slučaju slijedi:

$$H(z) = \frac{\Omega_c}{1 - e^{-\Omega_c \Delta t} z^{-1}}.$$

Međutim, frekvenciju odmjerenja $\Omega_0 = 2\pi/\Delta t$ treba izabrati na takav način da se izbjegne preklapanje spektra. Dati su primjeri poređenja amplitudnih karakteristika filtera sa 3dB graničnom frekvencijom od 1Hz, 5Hz i 50Hz za frekvenciju odmjerenja od 2kHz, tj. $\Delta t = 0.5ms$.

Primjer 2.

Polazeći od analognog filtra čija je funkcija prenosa

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c},$$

gdje je Ω_c 3-dB granična učestanost analognog filtra, projektovati digitalni niskopropusni filter čija 3-dB granična učestanost iznosi $0,2\pi$ rad/odmjerku, koristeći bilinearnu transformaciju.

Rješenje:

Kada se za preslikavanje analognog filtra u digitalni koristi bilinearna transformacija polazi se od aproksimacije integrala trapezoidnim pravilom što rezultuje preslikavanjem s -ravni u z -ravan prema jednačini

$$s = \frac{2}{\Delta t} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right), \quad (2)$$

što daje relaciju između frekvencijskih promjenljivih u analognom i digitalnom domenu

$$\Omega = \frac{2}{\Delta t} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}, \quad (3)$$

odnosno

$$\omega = 2 \operatorname{arctg} \frac{\Omega \Delta t}{2}.$$

Cijeli frekvencijski opseg u domenu analognog filtra preslikava se u opseg $-\pi \leq \omega \leq \pi$, ali to preslikavanje je nelinearno. Dolazi do kompresije frekvencijskog opsega (*frequency warping*).

Korištenjem jednačine (3) sada dobijamo 3-dB frekvenciju analognog filtra

$\Omega_c = \frac{2}{\Delta t} \operatorname{tg} 0,1\pi = \frac{0,65}{\Delta t}$, pa je funkcija prenosa analognog filtra

$$H(s) = \frac{0,65/\Delta t}{s + 0,65/\Delta t}.$$

Korištenjem bilinearne transformacije (2) dobije se funkcija prenosa digitalnog filtra

$$H(z) = \frac{0,245(1 + z^{-1})}{1 - 0,509z^{-1}}.$$

Lako se provjerava da je 3-dB učestanost ovog filtra $\omega_c = 0,2\pi \frac{\text{rad}}{\text{odmjerku}}$, tj. da

zadovoljava specifikacije.

Važno je uočiti da vrijednost perioda odmjeravanja Δt u ovom slučaju ne utiče na konačni rezultat. Može se zaključiti da je ovaj parametar potpuno transparentan kada su specifikacije filtra zadate u digitalnom domenu pa ga je moguće izabrati proizvoljno, npr. $\Delta t = 1$.

Naravno, kada se filter koristi za obradu digitalnih signala dobijenih A/D konverzijom rezultujuća frekvencijska karakteristika zavisi od perioda odmjeravanja.

Primjer 2.

Korišćenjem metode impulsne invarijanse projektovati digitalni IIR filter koji zadovoljava sledeće specifikacije:

- maksimalno ravna magnituda u propusnom opsegu $0 \leq \omega \leq 0.2\pi$ rad,
- maksimalno dozvoljeno slabljenje u propusnom opsegu 1dB,
- nepropusni opseg $0.3\pi \leq \omega \leq \pi$ rad,
- minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu 15dB,
- period odmjeravanja 1s.

Realizovati ovaj filter korišćenjem prve i druge direktne forme.

Rješenje

Preslikaćemo zadate specifikacije u analogni domen. U odsustvu aliasinga impulsna invarijansa preslikava analognu u digitalnu frekvenciju na linearan način:

$$\Omega = \omega/\Delta t.$$

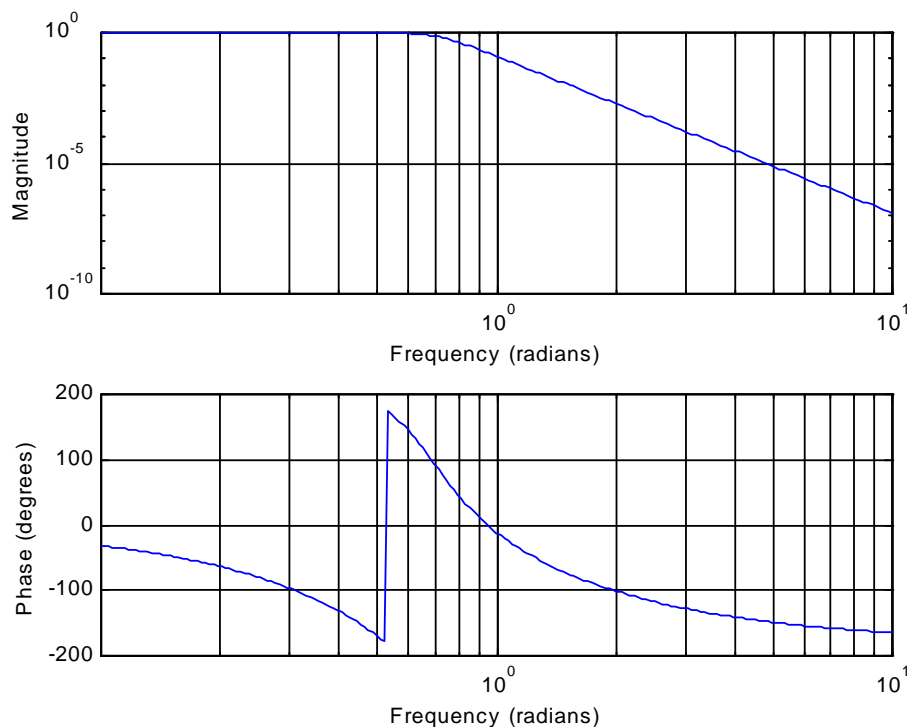
Sada su granične frekvencije u analognom domenu: $\Omega_p=0.2\pi$ rad/s i $\Omega_s=0.3\pi$ rad/s. Izvršićemo normalizaciju sa $\Omega_0=0.2\pi$ rad/s, pa su normalizovane granične frekvencije: $\omega_p=1$ i $\omega_s=1.5$.

Batervortov filter koji zadovoljava ove specifikacije je 6. reda i ima normalizovanu funkciju prenosa:

$$\hat{H}_N(s) = \frac{1.965}{s^6 + 4.324s^5 + 9.349s^4 + 12.82s^3 + 11.71s^2 + 6.784s + 1.965}.$$

Nakon denormalizacije funkcija prenosa analognog filtra je:

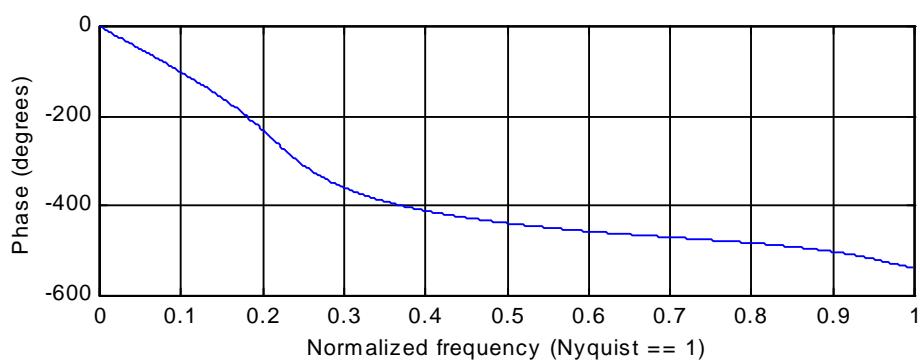
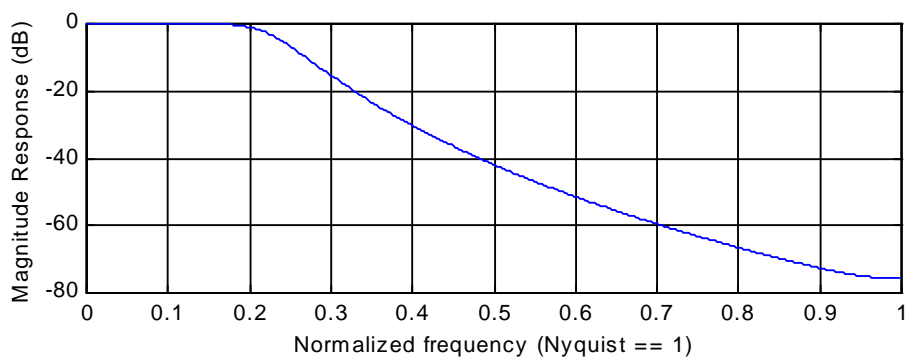
$$\hat{H}(s) = \frac{0.1209}{s^6 + 2.717s^5 + 3.691s^4 + 3.179s^3 + 1.825s^2 + 0.6644s + 0.1209}.$$



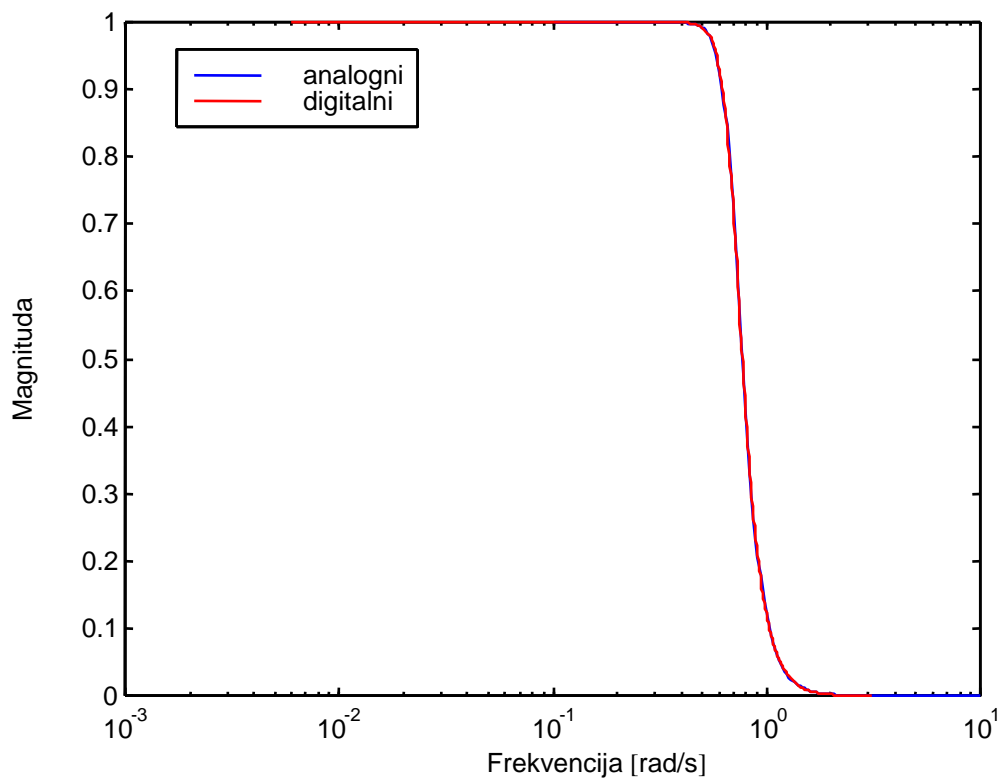
Frekvencijska karakteristika analognog filtra.

U MATLABu je metoda impulsne invarijanse realizovana funkcijom `impinvar`, koja u našem primjeru daje sledeći rezultat:

$$H(z) = \frac{-1.132e-014 z^{-1} + 0.000631 z^{-2} + 0.0101 z^{-3} + 0.01614 z^{-4} + 0.004101 z^{-5} + 0.0001033 z^{-6}}{1 - 3.364 z^{-1} + 5.068 z^{-2} - 4.276 z^{-3} + 2.107 z^{-4} - 0.5706 z^{-5} + 0.06607 z^{-6}}$$



Frekvencijska karakteristika digitalnog filtra.



Amplitudne karakteristike analognog i digitalnog filtra

Dobijene amplitudne karakteristike potvrđuju činjenicu da je frekvencijski odziv digitalnog filtra dobijen metodom impulsne invarijanse pod uslovom da nema preklapanja spektra:

$$H(e^{j\omega}) \approx \frac{1}{\Delta t} H_a\left(j \frac{\omega}{\Delta t}\right).$$

Vidimo da za visoke frekvencije odmjeravanja digitalni filter može imati vrlo veliko pojačanje, pa je zbog toga preporučljivo za impulsni odziv digitalnog filtra uzeti:

$$h(n) = \Delta t h_a(n\Delta t),$$

što se automatski dobija kada se koristi funkcija `impinvar`.

Takođe se može uočiti da ako su specifikacije zadate (kao u ovom slučaju) pomoću digitalnih frekvencija, vrijednost frekvencije odmjeravanja ne igra nikakvu ulogu u konačnom obliku digitalnog filtra.

Mana metode impulsne invarijanse je postojanje aliasinga.

Primjer 3.

Ponoviti prethodni primjer korišćenjem metode bilinearne transformacije.

Rješenje

Ponovo počinjemo preslikavanjem specifikacija u analogni domen. Veza između analogne i digitalne frekvencije je sada nelinearna:

$$\Omega = \frac{2}{\Delta t} \tan(\omega/2).$$

Sada su granične frekvencije u analognom domenu: $\Omega_p=0.6498$ rad/s i $\Omega_s=1.0191$ rad/s.

Normalizacija učestanosti: $\Omega_0=0.6498$ rad/s.

Normalizovane učestanosti: $\omega_p=1$, $\omega_s=1.5683$.

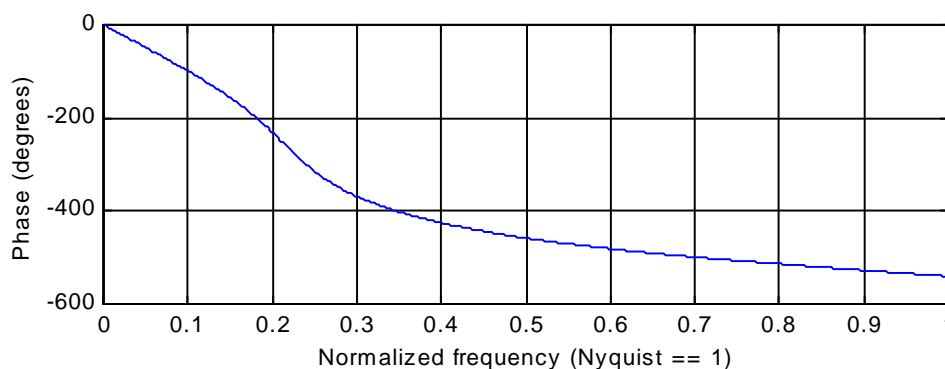
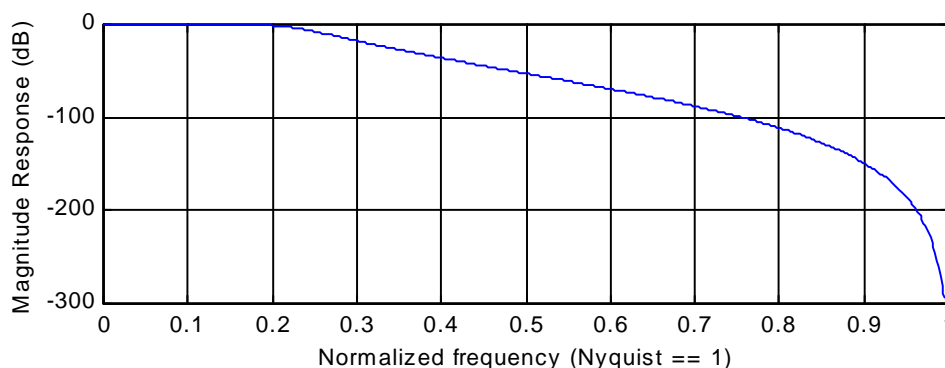
Ove specifikacije zadovoljava Batervortov filtar 6. reda, pa je normalizovana karakteristika ista kao i u prethodnom primjeru.

Nakon denormalizacije imamo:

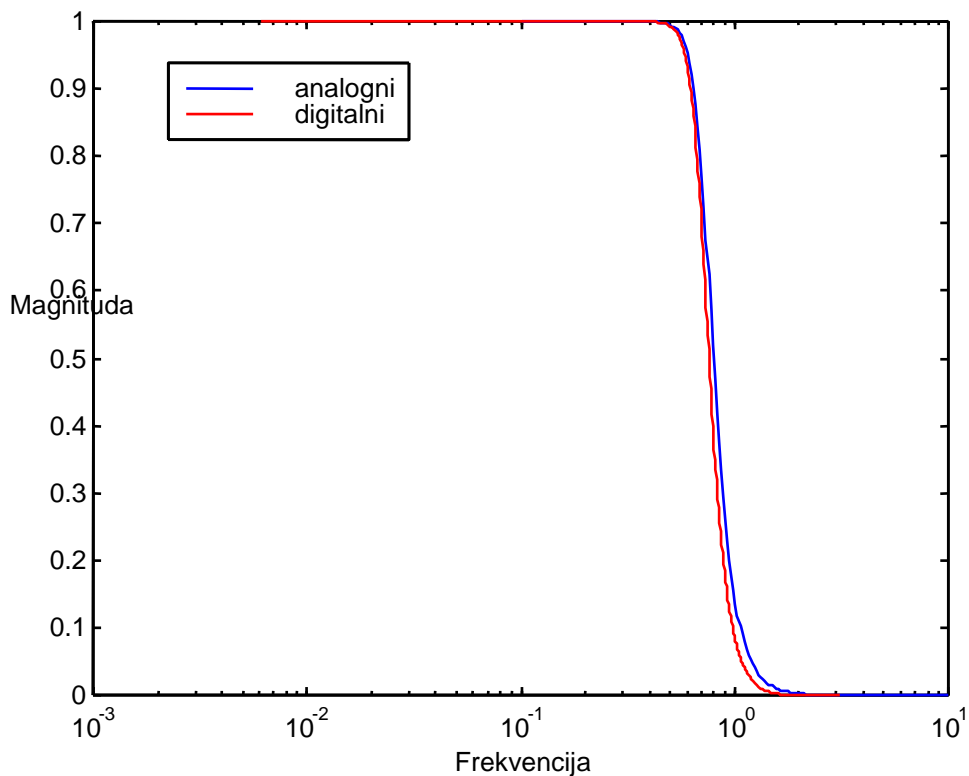
$$\hat{H}(s) = \frac{0.1479}{s^6 + 2.81s^5 + 3.948s^4 + 3.516s^3 + 2.088s^2 + 0.786s + 0.1479}.$$

Funkcija prenosa digitalnog filtra dobija se smjenom: $s = \frac{2}{\Delta t} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$.

$$H(z) = \frac{0.0005795 + 0.003477z^{-1} + 0.008693z^{-2} + 0.01159z^{-3} + 0.008693z^{-4} + 0.003477z^{-5} + 0.0005795z^{-6}}{1 - 3.314z^{-1} + 4.95z^{-2} - 4.144z^{-3} + 2.028z^{-4} - 0.5459z^{-5} + 0.06285z^{-6}}$$

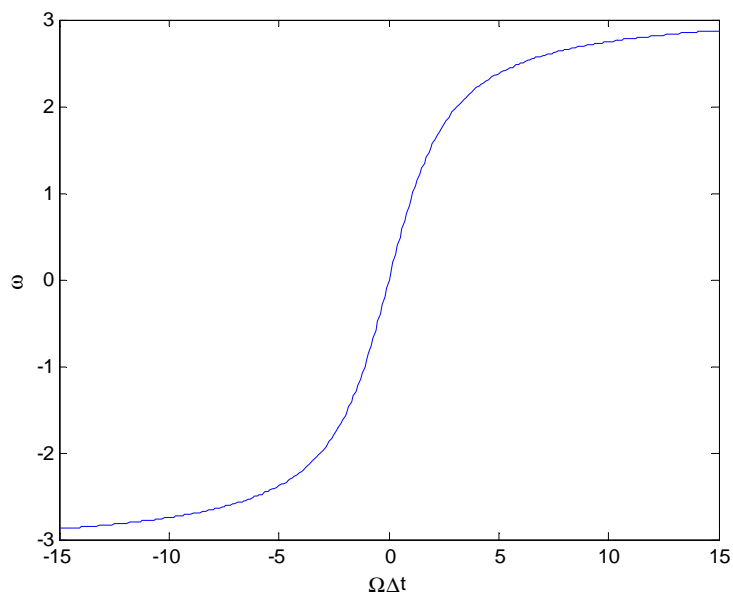


Frekvencijska karakteristika digitalnog filtra.



Amplitudne karakteristike analognog i digitalnog filtra.

Vidimo da je zbog nelinearnosti preslikavanja frekvencijske promjenljive koje sabija frekvencijski opseg amplitudna karakteristika digitalnog filtra nešto strmija. U stvari, sa sledeće slike se vidi da je ovo preslikavanje približno linearno samo za niske frekvencije. Sa porastom frekvencije odmjeravanja ovaj interval linearnosti se proširuje.



Preslikavanje između frekvencijskih promjenljivih.

Primjer 4.

Korišćenjem metoda impulsne invarijanse i bilinearne transformacije projektovati digitalni eliptički filter koji zadovoljava sledeće specifikacije:

- propusni opseg $0 \leq \omega \leq 0.2\pi$ rad,
- maksimalno dozvoljeno slabljenje u propusnom opsegu 1dB,
- nepropusni opseg $0.3\pi \leq \omega \leq \pi$ rad,
- minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu 15dB,
- period odmjeravanja 1s.

Rješenje

Preslikaćemo zadate specifikacije u analogni domen. U odsustvu aliasinga impulsna invarijansa preslikava analognu u digitalnu frekvenciju na linearan način:

$$\Omega = \omega/\Delta t .$$

Sada su granične frekvencije u analognom domenu: $\Omega_p=0.2\pi$ rad/s i $\Omega_s=0.3\pi$ rad/s. Izvršićemo normalizaciju sa $\Omega_0=0.2\pi$ rad/s, pa su normalizovane granične frekvencije: $\omega_p=1$ i $\omega_s=1.5$.

Eliptički filter koji zadovoljava ove specifikacije je trećeg reda i normalizovana funkcija prenosa analognog prototipa je:

$$\hat{H}_N(s) = \frac{0.4711s^2 + 0.7551}{s^3 + 0.9805s^2 + 1.225s + 0.7551} .$$

Njenom denormalizacijom se dobija:

$$\hat{H}(s) = \frac{0.296s^2 + 0.1873}{s^3 + 0.6161s^2 + 0.4837s + 0.1873}$$

Konačno, primjenom impulsne invarijanse dobija se funkcija prenosa digitalnog filtra:

$$H(z) = \frac{0.296z^{-1} - 0.4461z^{-2} + 0.3063z^{-3}}{1 - 2.119z^{-1} + 1.794z^{-2} - 0.5401z^{-3}}$$

Međutim, slabljenje ovog filtra na frekvenciji 0.2π iznosi 2.25dB, a na frekvenciji 0.3π 11.20dB. Očigledno, ove vrijednosti ne zadovoljavaju specifikacije filtra. Preklapanje spektra koje se javlja kod metode impulsne invarijanse uništilo je rezultujući eliptički filter zato što frekvencijska karakteristika analognog prototipa nije «frekvencijski ograničena».

Bilinearna transformacija, međutim, nema ovaj problem.

Preslikavanjem graničnih frekvencija u analogni domen dobijamo: $\Omega_p=0.6498$ rad/s i $\Omega_s=1.0191$ rad/s.

Normalizacija učestanosti: $\Omega_0=0.6498$ rad/s.

Normalizovane učestanosti: $\omega_p=1$, $\omega_s=1.5683$.

Ponovo dobijamo eliptički filter trećeg reda čiji je normalizovani analogni prototip:

$$\hat{H}_N(s) = \frac{0.4711s^2 + 0.7551}{s^3 + 0.9805s^2 + 1.225s + 0.7551} .$$

Denormalizacijom se dobija:

$$\hat{H}(s) = \frac{0.3061s^2 + 0.2072}{s^3 + 0.6371s^2 + 0.5173s + 0.2072}$$

Konačno, bilinearnom transformacijom, dobijamo:

$$H(z) = \frac{0.1214 - 0.05114z^{-1} - 0.05114z^{-2} + 0.1214z^{-3}}{1 - 2.111z^{-1} + 1.784z^{-2} - 0.5325z^{-3}}.$$

Slabljenja na graničnim frekvencijama propusnog i nepropusnog opsega su 1dB i 16dB, respektivno, što odgovara zadatim specifikacijama.

Primjer 5.

Dat je analogni filter sa funkcijom prenosa $\hat{H}(s) = \frac{s}{s+1}$.

O kakvom se filteru radi? Kolika je njegova granična učestanost? Nacrtati njegovu frekvencijsku karakteristiku.

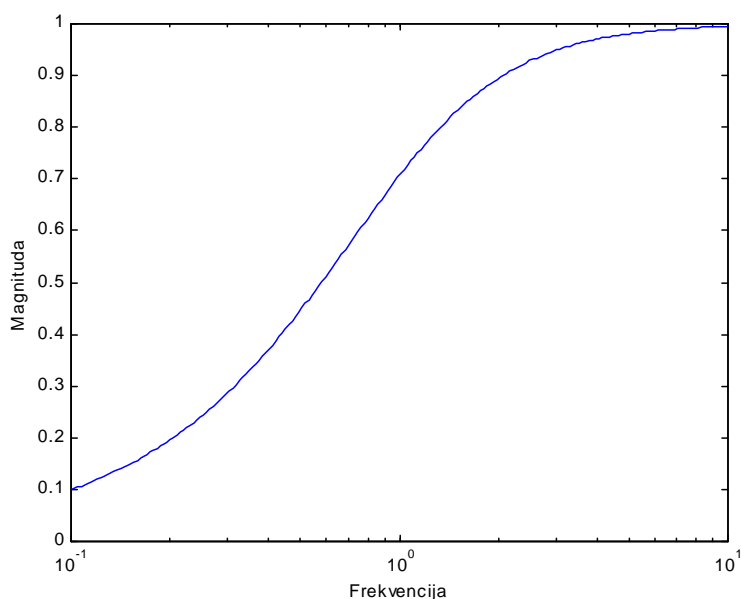
Preslikati ovaj filter u digitalni domen korišćenjem bilinearne transformacije sa frekvencijom odmjjeravanja $f_s=100\text{Hz}$. Kakav rezultat se dobija? Nacrtati frekvencijsku karakteristiku dobijenog filtra.

Preslikati sada filter u digitalni domen korišćenjem metode impulsne invarijanse sa istom frekvencijom odmjjeravanja. Kakav rezultat se dobija? Nacrtati frekvencijsku karakteristiku dobijenog filtra.

Komentarirati rezultate ovih transformacija i odrediti ograničenja metoda za preslikavanje funkcija prenosa iz analognog u digitalni domen.

Rješenje

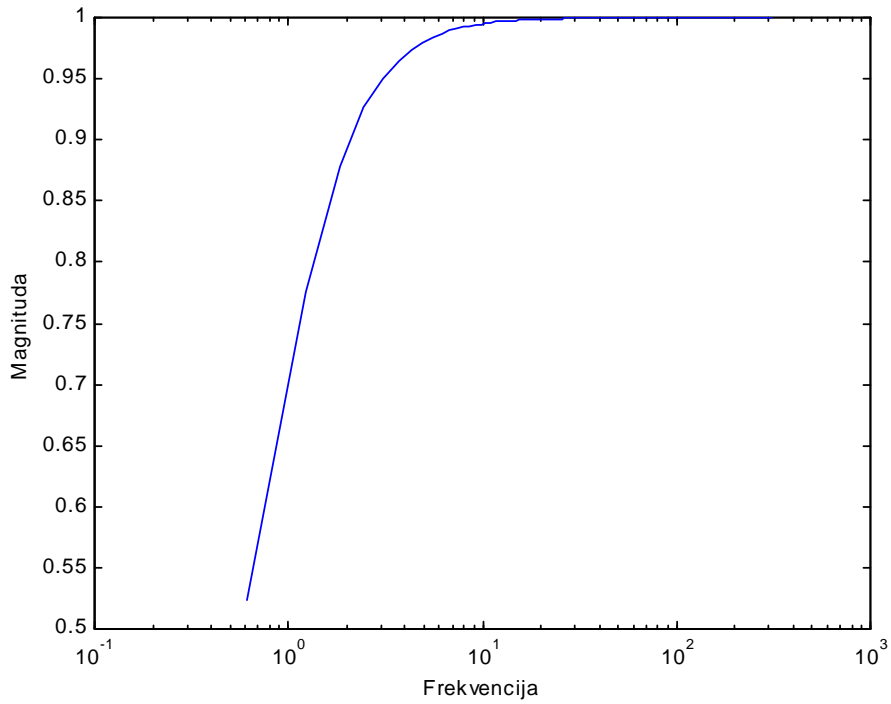
Dati filter je visokopropusni filter sa graničnom učestanošću $\Omega_c = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.



Amplitudna karakteristika analognog filtra.

Prenosna funkcija digitalnog filtra dobijenog primjenom bilinearne transformacije:

$$H(z) = \frac{2(1 - z^{-1})}{2 + \Delta t + (\Delta t - 2)z^{-1}}$$

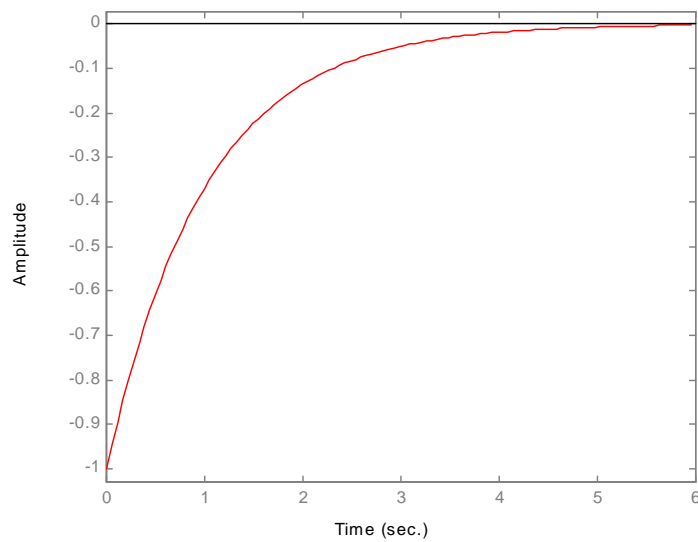


Amplitudna karakteristika.

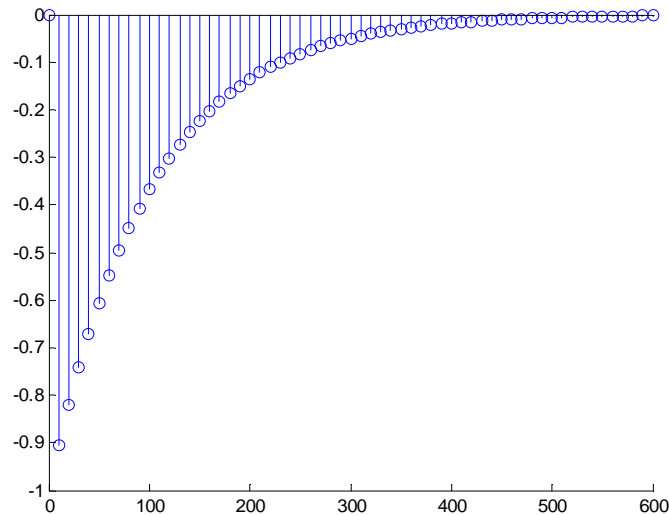
Prenosna funkcija digitalnog filtra dobijenog primjenom impulsne invarijanse:

$$H(z) = 1 - \frac{1}{1 - e^{-\Delta t} z^{-1}} = \frac{-e^{-\Delta t} z^{-1}}{1 - e^{-\Delta t} z^{-1}} .$$

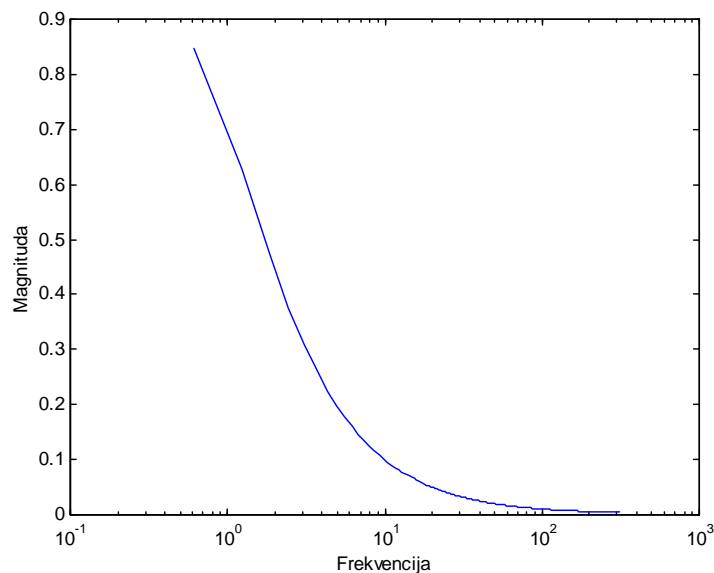
Impulse Response



Impulsni odziv analognog filtra.



Impulsni odziv digitalnog filtra dobijenog metodom impulsne invarijanse (nacrtan je svaki 10 odmjerak).



Amplitudna karakteristika digitalnog filtra dobijenog metodom impulsne invarijanse.

Problem je moguće izbjeći tako što se NF prototip preslika u digitalnim domen primjenom impulsne invarijanse:

$$\hat{H}(s) = \frac{1}{s+1},$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - e^{-\Delta t} z^{-1}}.$$

Sada pomoću frekvencijske transformacije $z^{-1} = -\frac{Z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha Z^{-1}}$, preslikavamo NF digitalni filter u VF:

$$H(z) = \frac{1 + \alpha z^{-1}}{1 + \alpha e^{-\Delta t} + (\alpha + e^{-\Delta t}) z^{-1}}.$$

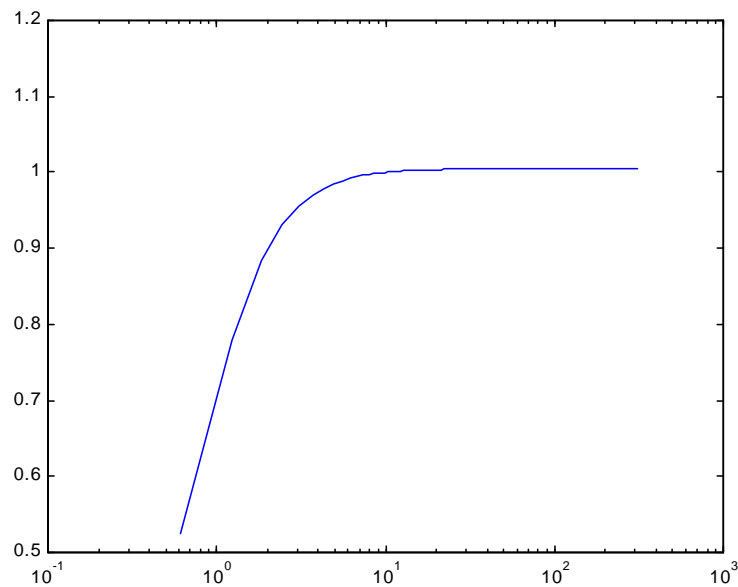
Neka je θ_p granična učestanost digitalnog NF filtra, a ω_p željena granična učestanost VF filtra. Konstantu α tada određujemo iz uslova:

$$e^{-j\theta_p} = -\frac{e^{-j\omega_p} + \alpha}{1 + \alpha e^{-j\omega_p}},$$

što daje:

$$\alpha = -\frac{\cos\left(\frac{\omega_p + \theta_p}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_p - \theta_p}{2}\right)}$$

U našem slučaju, pošto je $\Omega_c = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, i impulsna invarijansa linearno preslikava frekvenciju imamo da je $\omega_p = \theta_p = \Delta t$, pa je $\alpha = -\cos \theta_p = -\cos \Delta t$.



Frekvencijska karakteristika digitalnog filtra dobijenog impulsnom invarijansom i frekvencijskom transformacijom u digitalnom domenu.

Primjer 6.

Korištenjem bilinearne transformacije projektovati Čebiševljev digitalni filter koji će raditi na učestanosti odmjjeravanja $F_s = 800\text{Hz}$ i zadovoljava sledeće specifikacije

- granična učestanost propusnog opsega 100Hz,
- granična učestanost nepropusnog opsega 300Hz,
- maksimalno dozvoljeno slabljenje u propusnom opsegu 1dB,
- minimalno potrebno slabljenje u nepropusnom opsegu 20dB.

Rješenje

Korištenjem MATLAB-a se lako dobija da navedene specifikacije zadovoljava *analogni Čebiševljev filter trećeg reda*.

Da bismo projektovali digitalni filter moramo najprije specifikacije preslikati u digitalni domen. Maksimalna učestanost ulaznog signala u ovom slučaju može biti 400Hz. Na osnovu relacije $\omega = \Omega\Delta t$, dobijamo da su granične učestanosti odgovarajućeg digitalnog filtra

$$\omega_p = \Omega_p \Delta t = 2\pi 100/800 = 0,25\pi \text{ i}$$

$$\omega_s = \Omega_s \Delta t = 2\pi 300/800 = 0,75\pi.$$

Sada se problem svodi na projektovanje digitalnog filtra sa zadatim specifikacijama. Kada se filter projektuje korištenjem bilinearne transformacije ove granične učestanosti se preslikavaju u analogni domen korištenjem relacije

$$\Omega = \frac{2}{\Delta t} \tan(\omega/2),$$

pri čemu sada period odmjjeravanja više nije bitan pa možemo izabrati $\Delta t = 1$.

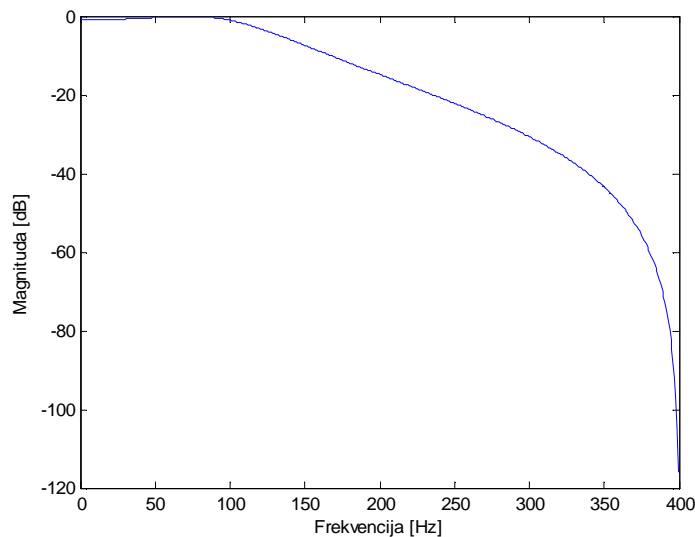
Dobijamo: $\Omega_p = 0,8284$ i $\Omega_s = 4,8284$. Ove specifikacije zadovoljava Čebiševljev filter *drugog reda*

$$\hat{H}(s) = \frac{0,6744}{s^2 + 0,9094s + 0,7566}.$$

Konačno, bilinearnom transformacijom ovaj filter se preslikava u digitalni filter

$$H(z) = \frac{0,1026 + 0,2051z^{-1} + 0,1026z^{-2}}{1 - 0,9865z^{-1} + 0,4468}.$$

Amplitudna karakteristika ovog filtra data je na slici



Primjer 7.

Data je pravougaona prozorska funkcija dužine N .

- Odrediti spektar pravougaone prozorske funkcije.
- Generisati i nacrtati u MATLAB-u pravougaonu prozorsku funkciju dužine $N=32$ i $N=128$.
- Izračunati i nacrtati u MATLAB-u spektar pravougaonog prozora.
- Definisati značajne parametre u spektru prozorske funkcije i uočiti njihovu zavisnost od dužine prozorske funkcije.

- a) Pravougaona prozorska funkcija definisana je izrazom:

$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

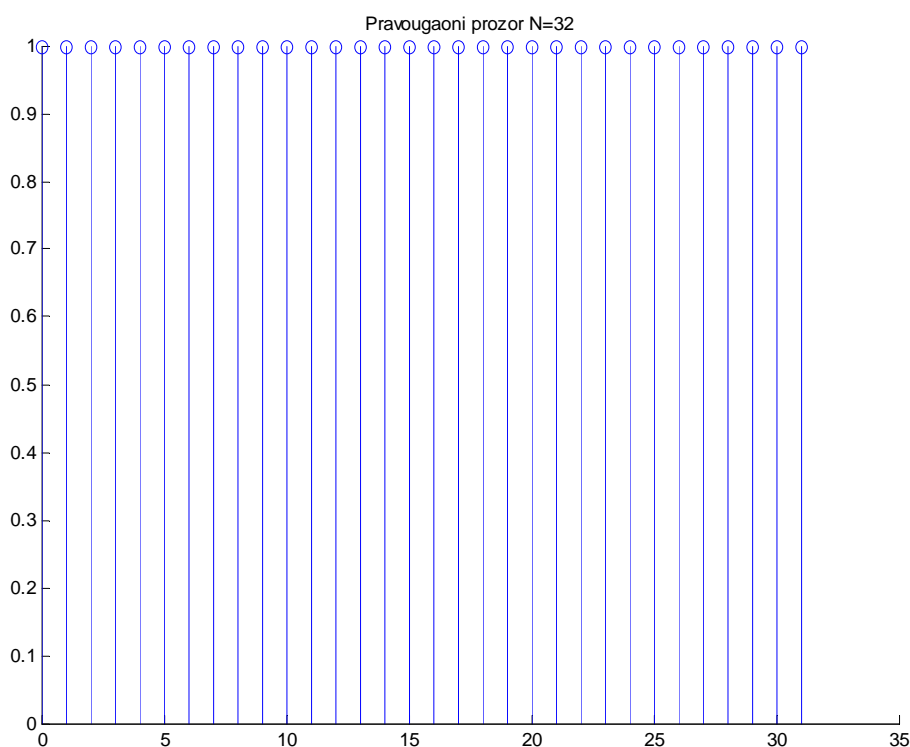
Dakle, pravougaona prozorska funkcija ne modifikuje ulazni signal, osim odsijecanja ako je dužina ulaznog signala veća od dužine prozorske funkcije.

Spektar pravougaone prozorske funkcije je:

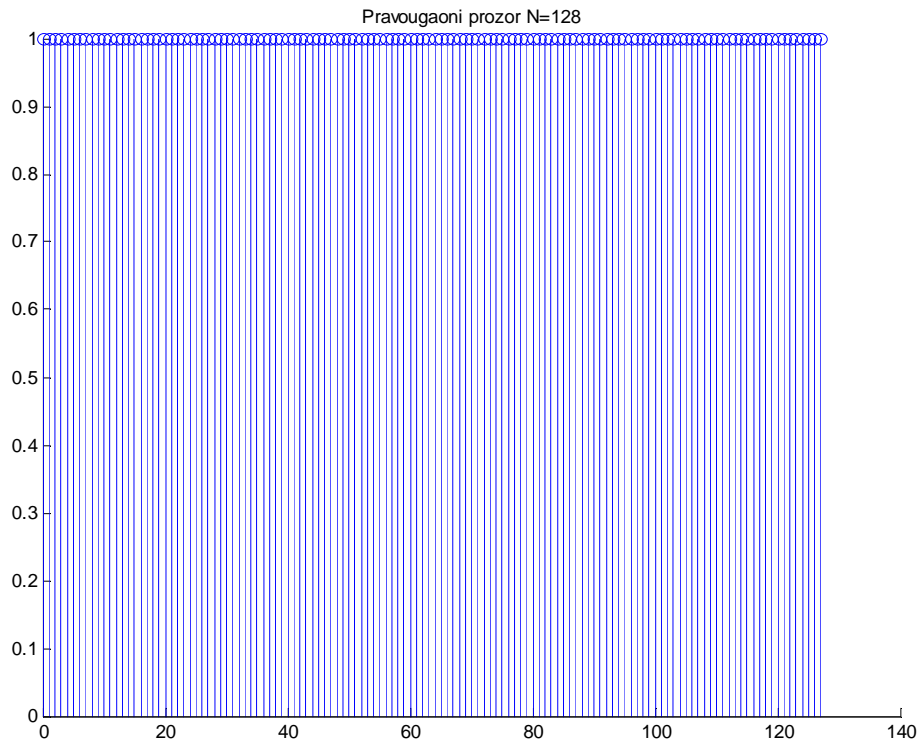
$$W_R(e^{j\theta}) = \sum_{n=0}^{N-1} w_R(n) e^{-j\theta n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\theta n} = \frac{1 - e^{-j\theta N}}{1 - e^{-j\theta}} = e^{-j\theta(N-1)/2} \frac{\sin \frac{\theta N}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

- b)

```
N = 32; %duzina prozora
nn = 0:N-1;
w = boxcar(N);
figure, stem(nn, w); title('Pravougaoni prozor N=32')
W = fft(w,1024);
Wnorm = abs(W)/N; %normalizacija spektra tako da bude W(0)=1
figure, plot(0:1/512:1-1/512, 20*log10(Wnorm(1:512)));
title('Amplitudska karakteristika (dB)');
xlabel('Normalizovana frekvencija');
```

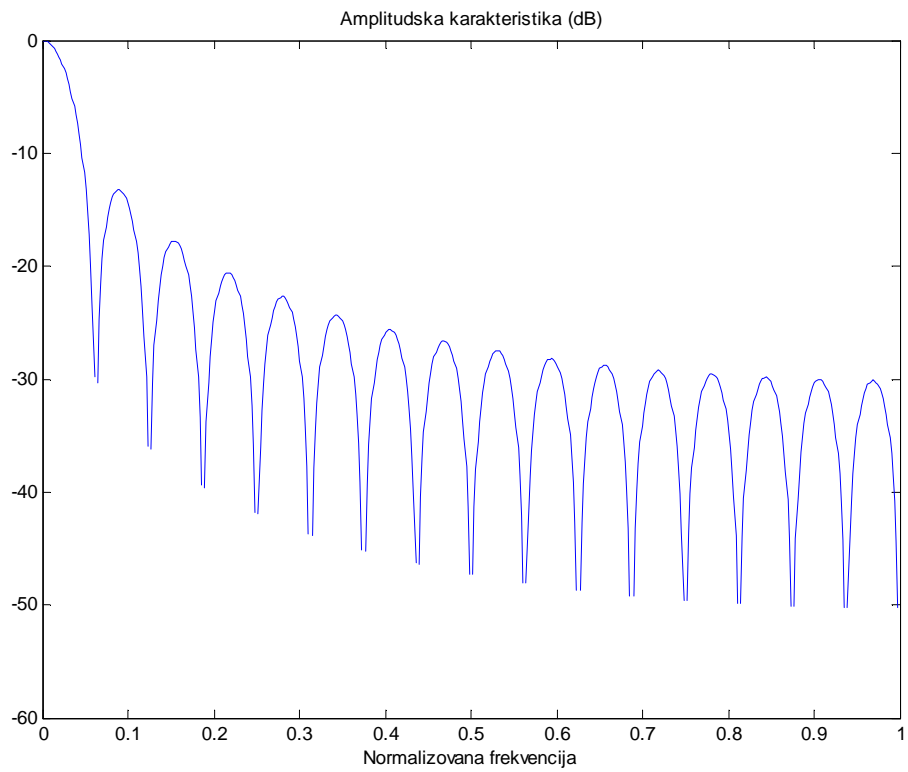


Pravougaona prozorska funkcija dužine $N = 32$.

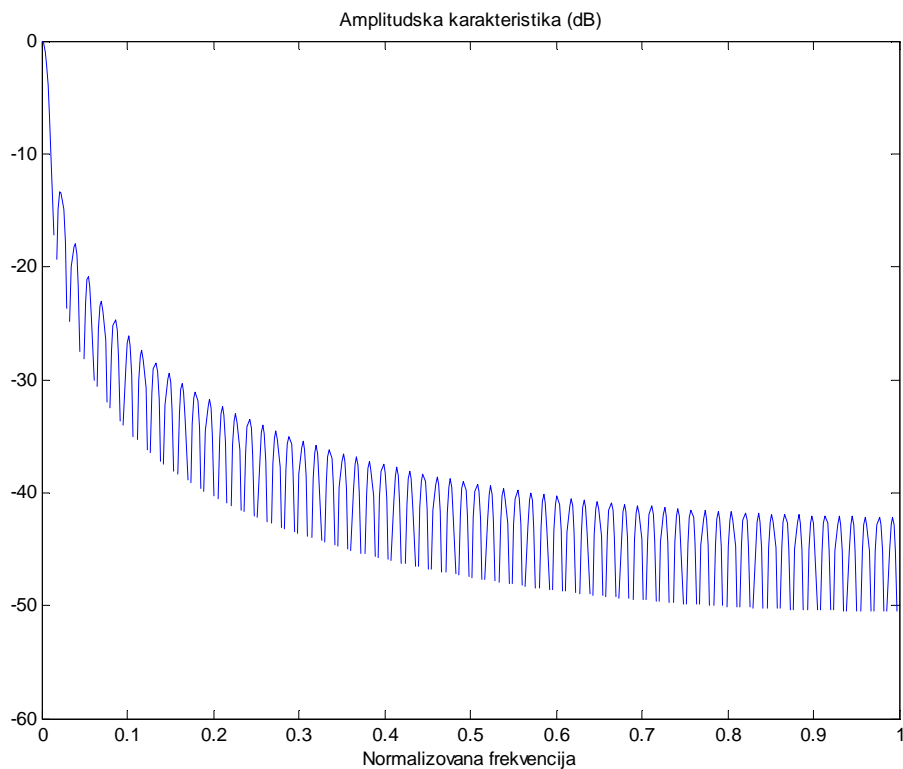


Pravougaona prozorska funkcija dužine $N = 128$.

c)



Amplitudna karakteristika pravougaonog prozora dužine $N = 32$.



Amplitudna karakteristika pravougaonog prozora dužine $N = 128$.

d) Najvažniji parametri prozorske funkcije su *širina glavnog luka* i *slabljenje prvog bočnog luka*.

Prva nula spektra pravougaone prozorske funkcije dobija se za $\frac{\omega N}{2} = \pi$, što odgovara

učestanosti $\omega = 2\pi/N$. Dakle, širina glavnog luka je $\Delta\omega_0 = 4\pi/N$. Vidimo da je širina glavnog luka obrnuto proporcionalna dužini prozorske funkcije. Pošto mi težimo da smanjimo širinu glavnog luka da bismo smanjili širinu prelaznog opsega to znači da moramo da koristimo dužu prozorsku funkciju. Sa druge strane, duža prozorska funkcija povećava složenost implementacije (izračunavanja), te su ova dva zahtjeva kontradiktorna.

Pošto su magnitude spektara pravougaonih prozorskih funkcija dužine $N=32$ i $N=128$ normalizovane dužinom prozorske funkcije N na slikama se čini da slabljenje prvog bočnog luka ne zavisi značajno od dužine prozora i da iznosi približno 13dB. Međutim, ovo slabljenje, u stvari, opada sa porastom N tako da površina ispod svakog luka ostane konstantna. Veće slabljenje bočnog luka može se postići drugačijim prozorskim funkcijama, npr. trougaonom, Hannovom itd.

Značajno je uočiti i da slabljenje ostalih bočnih lukova brže opada kod duže prozorske funkcije.

Primjer 8.

Ponoviti prethodni primjer za trougaoni (Bartletov) prozor.

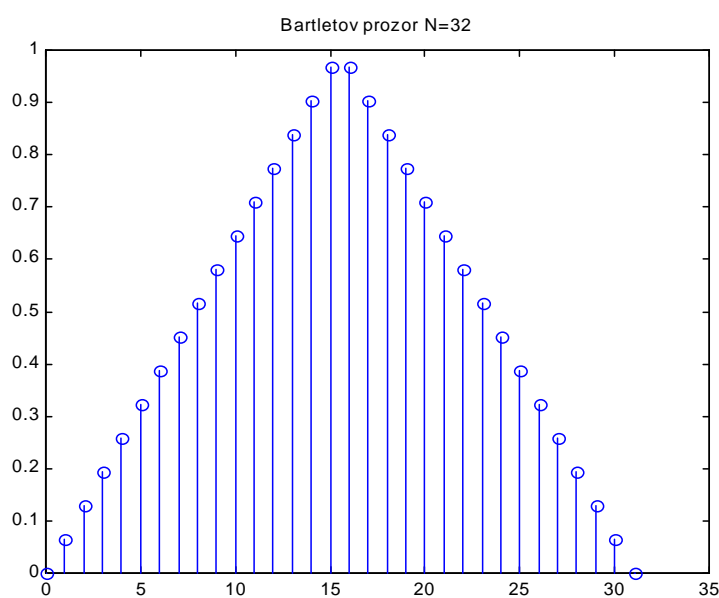
a) Bartletov prozor definisan je izrazom:

$$w_B(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

Spektar trougaone prozorske funkcije je

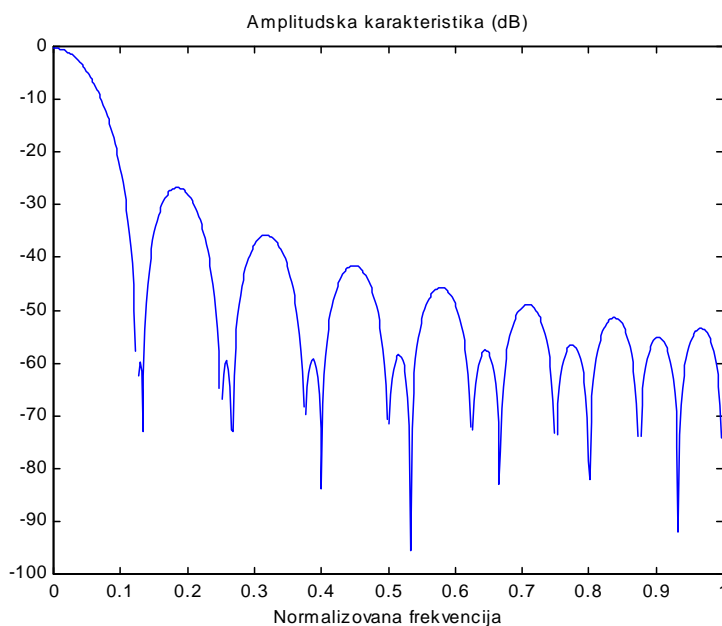
$$W_B(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} w_B(n) e^{-j\omega n} = \frac{2}{N} \left(\frac{\sin(\omega N/4)}{\sin(\omega/2)} \right)^2 e^{-j\omega(N-1)/2}$$

b)



Bartletov (trougaoni) prozor dužine $N = 32$.

c)



Amplitudna karakteristika Bartletovog prozora dužine $N = 32$.

- c) Slabljenje prvog bočnog luka trougaone prozorske funkcije iznosi 25dB, što je veće nego u slučaju pravougaone prozorske funkcije. Međutim ovo poboljšanje dobijeno je na račun veće širine glavnog luka koja sada iznosi $8\pi/N$.

U tabeli su date jednačine za neke prozorske funkcije koje se često koriste:

Pravougaoni	$w(n) = 1, \quad 0 \leq n \leq N-1$
Trougaoni (Bartletov)	$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases}$
Hanov	$w(n) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right], \quad 0 \leq n \leq N-1$
Hemingov	$w(n) = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1$
Blekmenov	$w(n) = 0,42 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$
Kajzerov	$w(n) = \frac{I_0\left(\omega_a \sqrt{\left(\frac{N-1}{2}\right)^2 - \left[n - \left(\frac{N-1}{2}\right)\right]^2}\right)}{I_0\left(\omega_a \left(\frac{N-1}{2}\right)\right)}$

Uporedne karakteristike prozorskih funkcija:

Prozor	Maksimalna amplituda bočnog luka (dB)	Širina glavnog luka	Minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu (dB)
Pravougaoni	-13	$4\pi/N$	-21
Bartletov	-25	$8\pi/N$	-25
Hanov	-31	$8\pi/N$	-44
Hemingov	-41	$8\pi/N$	-53
Blekmenov	-57	$12\pi/N$	-74

Primjer 9.

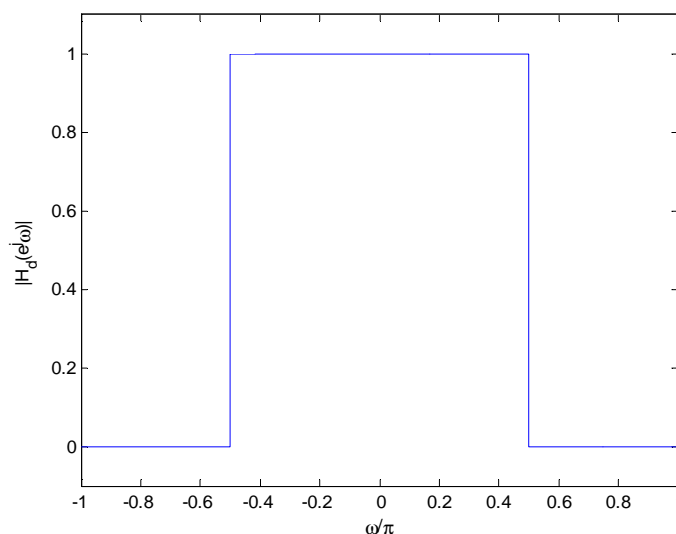
Dat je idealni niskopropusni filter:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

- Nacrtati frekvencijsku karakteristiku ovog filtra;
- Odrediti impulsni odziv h_d ovog filtra;

Rješenje

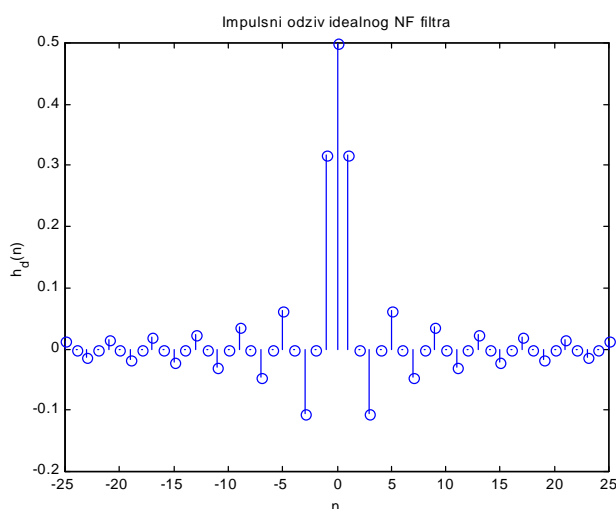
a)



Amplitudna karakteristika idealnog NP filtra.

b) Impulsni odziv ovog filtra je:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin(n\omega_c)}{\pi n}$$



Impulsni odziv idealnog NP filtra (51 odmjerak).

Očigledno je da se radi o nekauzalnom IIR filtru. Za razliku od analognih filtara gdje je nemoguće realizovati nekauzalan filter, kod digitalnih sistema to je moguće, ukoliko se ne zahtijeva rad u realnom vremenu. Međutim, u sledećem primjeru pozabavićemo se projektovanjem kauzalnog FIR filtra.

Primjer 10.

Metodom množenja prozorskom funkcijom projektovati kauzalan NF FIR filter dužine 51 (50. reda) sa graničnom frekvencijom $\omega_c=0.5\pi$.

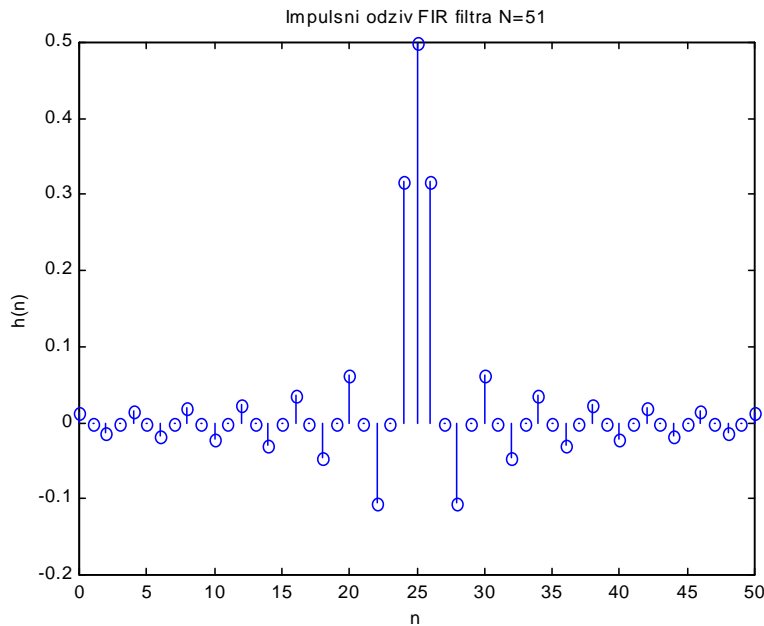
Rješenje

Najjednostavnija varijanta ove metode je upotreba pravougaonog prozora koji odgovara odsijecanju impulsnog odziva IIR filtra koji zadovoljava zadate specifikacije. Znači, u našem slučaju upotrebićemo prozorsku funkciju dužine $N=51$. Da bismo dobili kauzalan FIR filter potrebno je da prije množenja prozorskom funkcijom pomjerimo impulsni odziv IIR filtra za $(N-1)/2$ odmjeraka udesno. U

našem slučaju ovaj pomak iznosi 25 odmjeraka (vidi sliku) $h_1(n) = h_d\left(n - \frac{N-1}{2}\right)$.

Sada je impulsni odziv traženog FIR filtra (uz pretpostavku da koristimo pravougaoni prozor):

$$h(n) = h_1(n)w(n) = \begin{cases} h_d\left(n - \frac{N-1}{2}\right), & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & n < 0, n \geq N \end{cases}$$

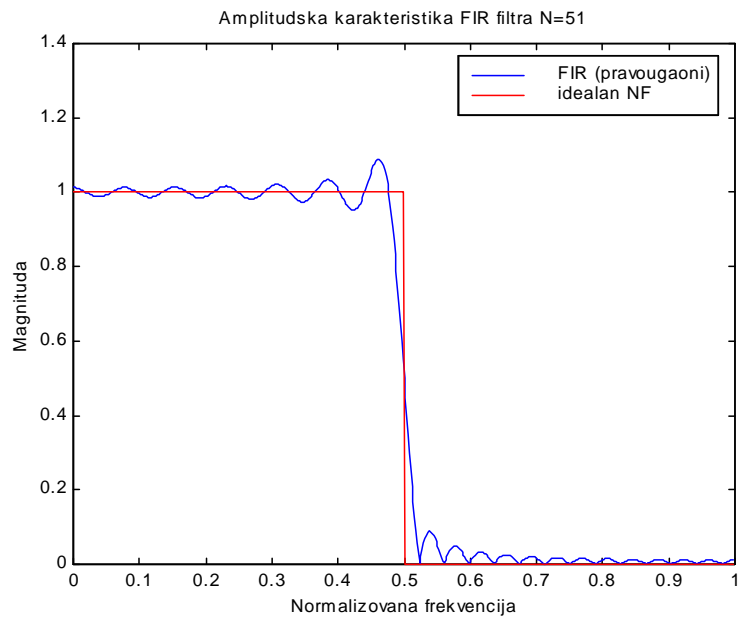


Impulsni odziv kauzalnog FIR filtra.

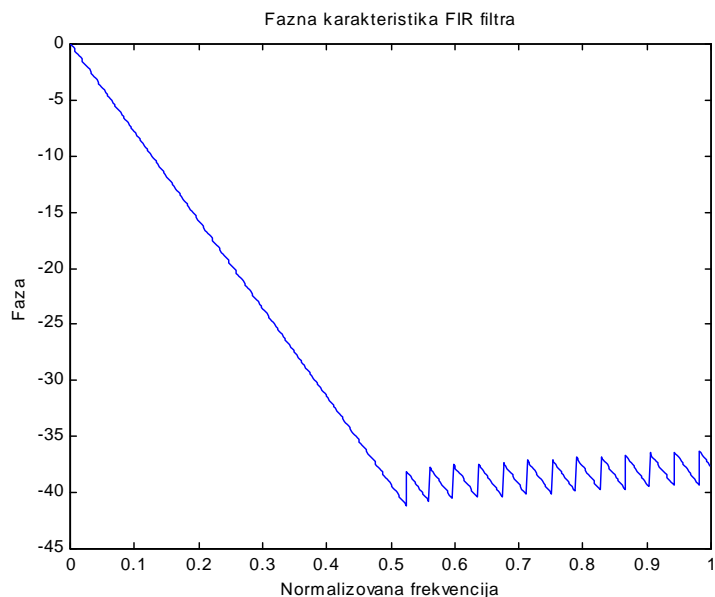
Primijetimo da pomjeranje impulsnog odziva IIR filtra ne mijenja amplitudsku karakteristiku, već samo faznu, jer je spektar pomjerenog IIR filtra:

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega \frac{N-1}{2}}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Na slikama su prikazane amplitudna i fazna karakteristika FIR filtra dobijenog korišćenjem pravougaone prozorske funkcije dužine $N=51$.



Amplitudna karakteristika FIR filtra dobijenog množenjem pravougaonom prozorskom funkcijom.



Fazna karakteristika.

Na slici vidimo da u blizini granične učestanosti amplitudna karakteristika ima značajne oscilacije. Ovo se može objasniti polazeći od frekvencijske karakteristike filtra

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n},$$

koja u suštini predstavlja Furijeov red čiji su koeficijenti odmjerci impulsnog odziva filtra. Uzimajući FIR filter praktično se željeni frekvencijski odziv aproksimira konačnim brojem članova Furijeovog reda što uvodi Gibsove oscilacije. Vrijednost pojačanja filtra na graničnoj učestanosti je prema tome -6dB.

Ukoliko želimo da smanjimo efekat Gibsovih oscilacija moramo posmatrati njihovu vezu sa prozorskom funkcijom. Impulzni odziv FIR filtra dobijen je množenjem željenog impulsnog odziva prozorskom funkcijom

$$h(n) = h_d(n)w(n).$$

Množenje u vremenskom domenu odgovara konvoluciji u frekvencijskom domenu

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(v)W(\omega - v)dv.$$

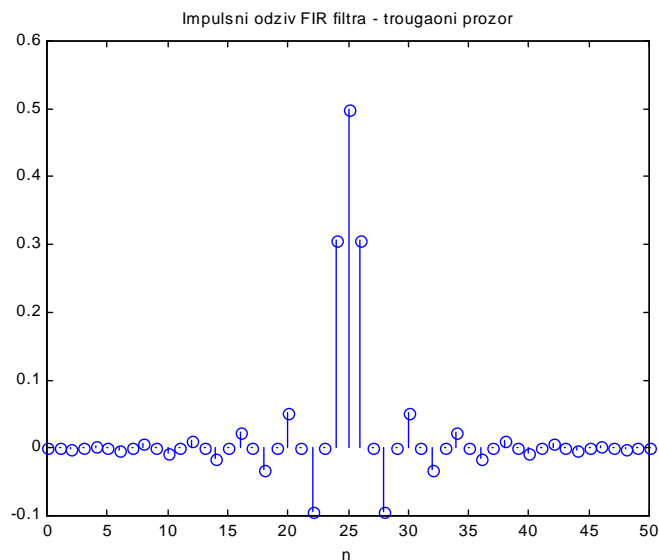
Sada je jasno da široki glavni luk u spektru prozorske funkcije unosi prelazni opseg u amplitudnu karakteristiku FIR filtra. Pored toga, izraženi bočni lukovi unose oscilacije u okolini granične učestanosti i utiču na slabljenje filtra u nepropusnom opsegu.

Da bismo smanjili efekat Gibsovih oscilacija možemo da iskoristimo neku drugu prozorsku funkciju, npr. trougaonu koja nema nagli prekid u vremenskom domenu. Vidimo da prozorska funkcija sa većim slabljenjem bočnog luka rezultuje manjom amplitudom Gibsovih oscilacija i većim slabljenjem u nepropusnom opsegu.

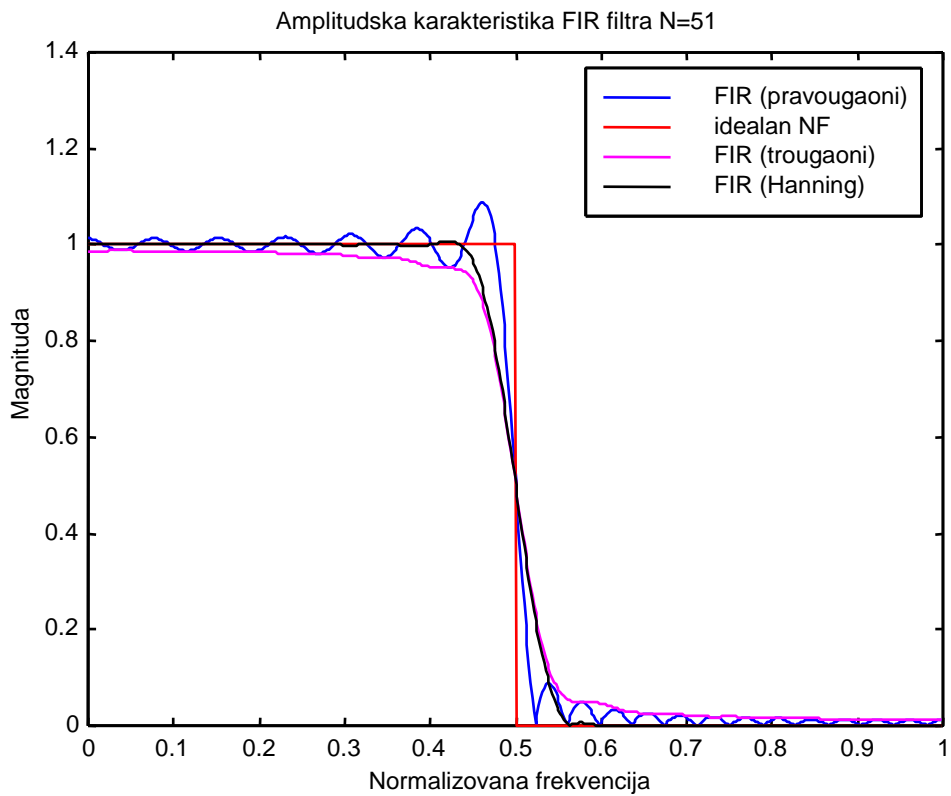
Međutim, ove funkcije imaju širi glavni luk, što rezultuje širim prelaznim opsegom. Takođe, povećanjem dužine prozorske funkcije može se smanjiti širina glavnog luka, odnosno prelazni opseg FIR filtra.

Slabljenje u nepropusnom opsegu uglavnom nije funkcija dužine prozorske funkcije, nego uglavnom njenog oblika.

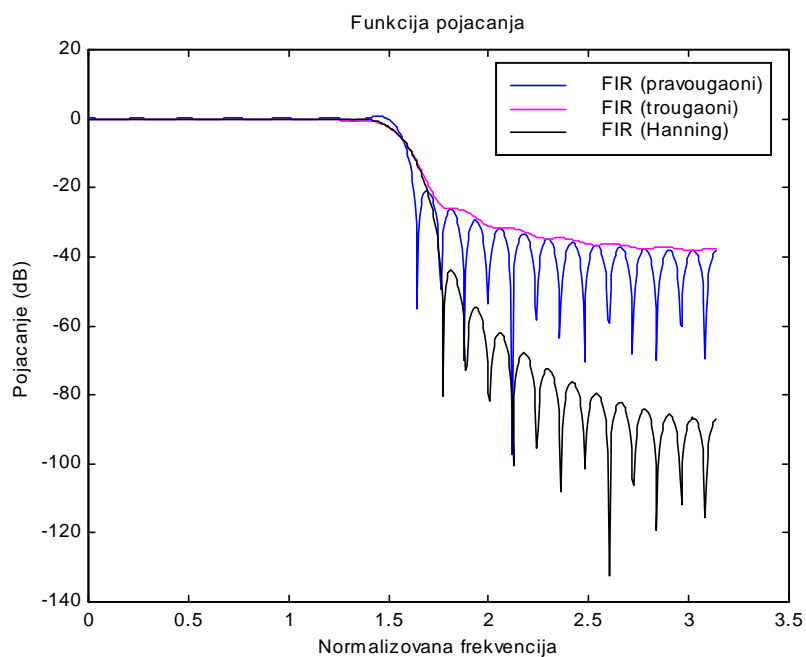
Kada se koristi trougaoni prozor impulsni odziv FIR filtra je:



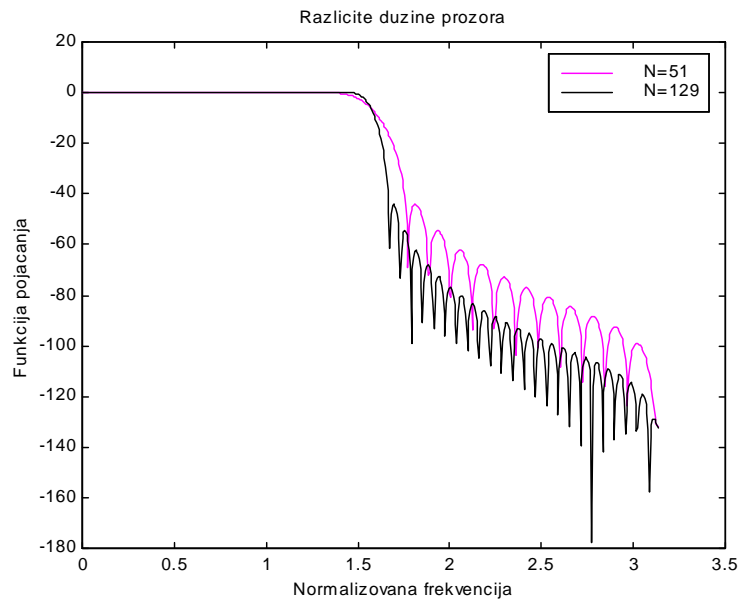
Impulsni odziv FIR filtra (trougaoni prozor)



Amplitudne karakteristike FIR filtara dobijenih korištenjem različitih prozorskih funkcija.



Funkcija pojaćanja FIR filtara dobijenih korištenjem različitih prozorskih funkcija.



Funkcija pojačanja FIR filtra u zavisnosti od dužine filtra.

Primjer 11.

Korišćenjem metode odmjerenja u frekvenciji projektovati niskopropusni FIR filtre dužine 33 i 34 sa graničnom frekvencijom $\omega_c=0.3\pi$. Razmotriti mogućnosti povećavanja slabljenja u nepropusnom opsegu.

Rješenje

Neka je $h(n)$, $n=0, \dots, N-1$ impulsni odziv FIR filtra dužine N (reda $N-1$). Njegova frekvencijska karakteristika data je jednačinom:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}.$$

DFT impulsnog odziva:

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j(2\pi/N)kn},$$

predstavlja uniformno odmjerenu frekvencijsku karakteristiku digitalnog FIR filtra.

Dakle, ako su poznati odmjerci frekvencijske karakteristike $H(k)$, $k=0, \dots, N-1$ moguće je korišćenjem IDFT odrediti impulsni odziv FIR filtra:

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k)e^{j(2\pi/N)nk}, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

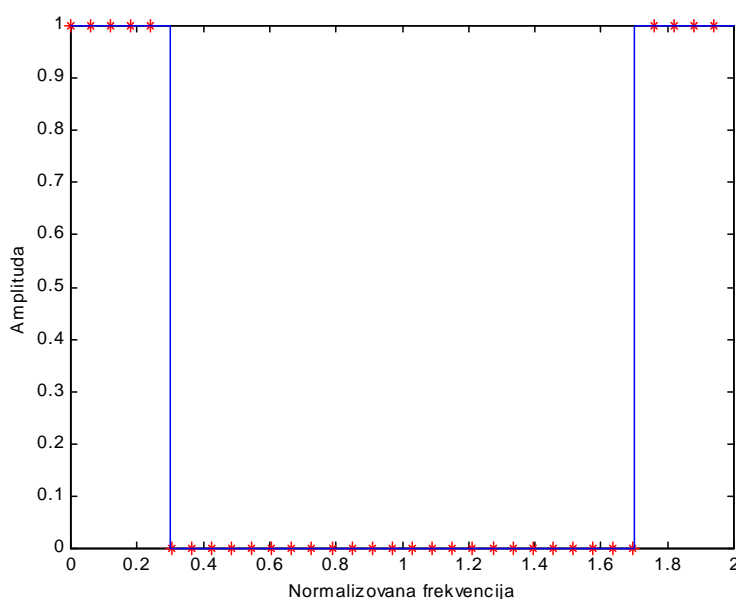
odnosno prenosnu funkciju:

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-e^{j(2\pi/N)k}z^{-1}}.$$

Frekvencijska karakteristika: $H(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)}$.

Odmjerci amplitudne karakteristike idealnog niskopropusnog filtra

$A(k) = A_d \left(e^{j\omega_k} \right) \Big|_{\omega_k = \frac{2\pi}{N}k}$, za $N=33$ prikazani su na slici.



Odmjerci u frekvenciji idealne niskopropusne amplitudne karakteristike.

Potrebno je još zadati odmjerke fazne karakteristike $\Phi(\omega_k)$. Najčešće je poželjno da fazna karakteristika bude linearna. Kod FIR filtera moguće je postići linearnu fazu,

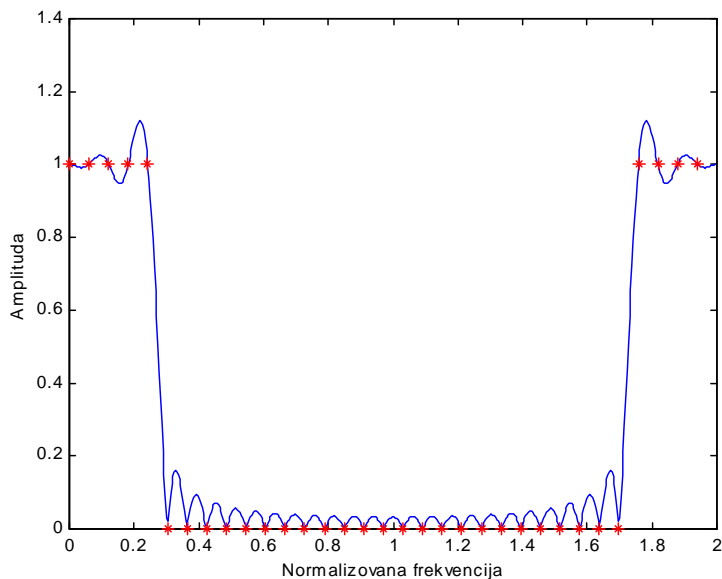
odnosno konstantno grupno kašnjenje. Ovo je osobina FIR filtera sa simetričnim impulsnim odzivom i njihova fazna karakteristika je oblika:

$$\Phi(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi.$$

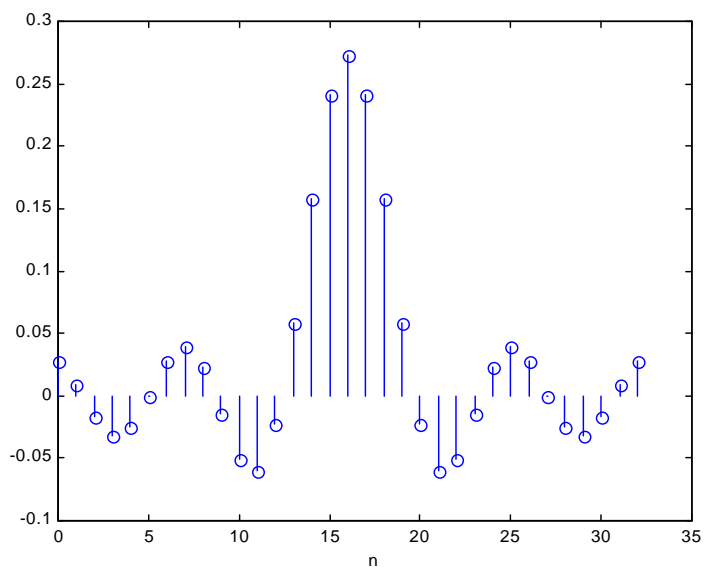
Dakle, odmjerke frekvencijske karakteristike konstruisaćemo kao:

$$H(k) = A(k)e^{j\Phi(k)}.$$

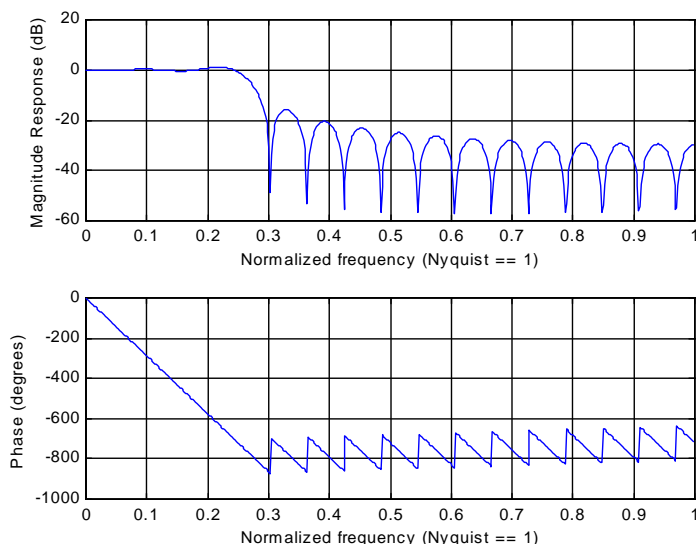
Ovim pristupom dobija se, za $N=33$ filter sa amplitudnom karakteristikom na slici.



Amplitudna karakteristika FIR filtera dobijenog odmjeravanjem u frekvenciji $N = 33$.

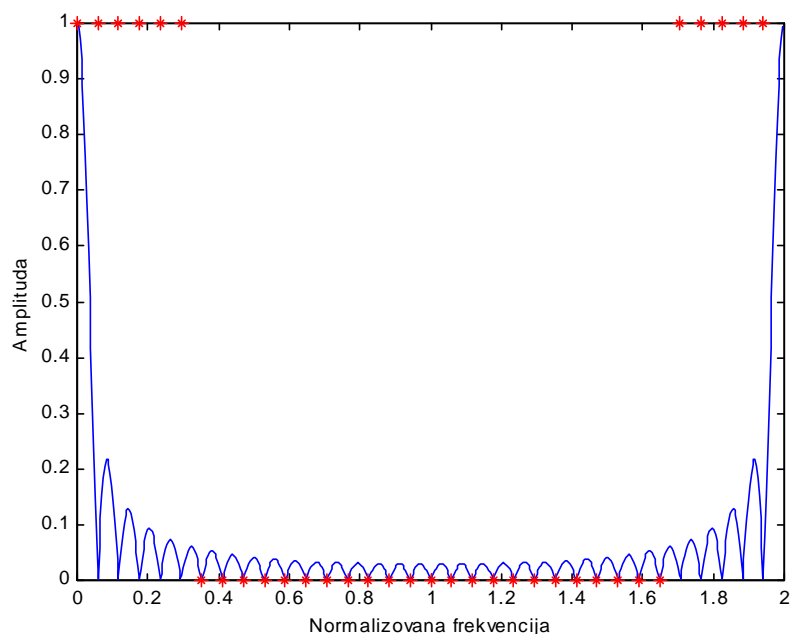


Impulsni odziv FIR filtera, $N = 33$.



Frekvencijska karakteristika $N = 33$.

Međutim, za N parno nailazimo na probleme jer $H(z)$ ima nule na jediničnoj kružnici, pa amplitudska karakteristika nije analitička funkcija, a fazna karakteristika ima diskontinuitete.



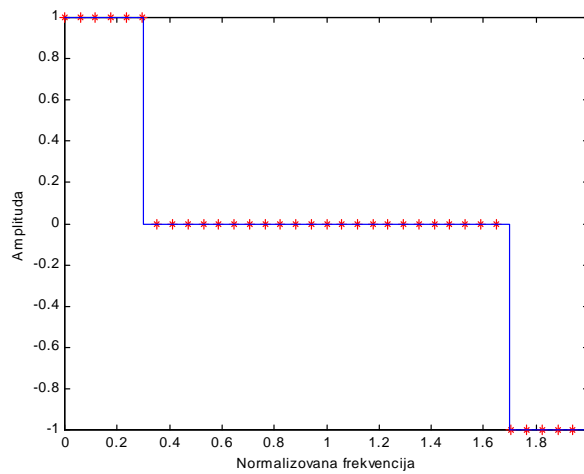
Rezultat primjene opisanog postupka na projektovanje filtra dužine $N = 34$.

Problem se može prevazići ako se $A(\omega)$ posmatra kao realna funkcija (koja može uzeti i pozitivne i negativne vrijednosti). Za FIR filtre sa simetričnim impulsnim odzivom frekvencijska karakteristika ima oblik:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left\{ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2h(n) \cos\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\right] \right\}, \quad N \text{ neparno}$$

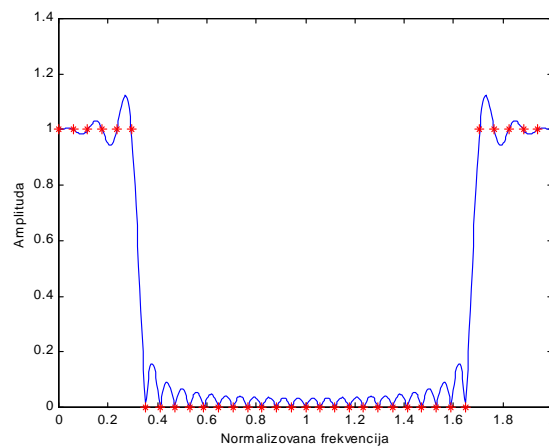
$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left\{ \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h(n) \cos\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\right] \right\}, \quad N \text{ parno,}$$

Može se pokazati da je $\cos\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)(2\pi - \omega)\right] = (-1)^{2n-N+1} \cos\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\right]$, što znači da je $A(\omega)$ simetrična za N neparno, a antisimetrična za N parno. To znači da za N parno odmjerkje moramo izabrati na sledeći način.

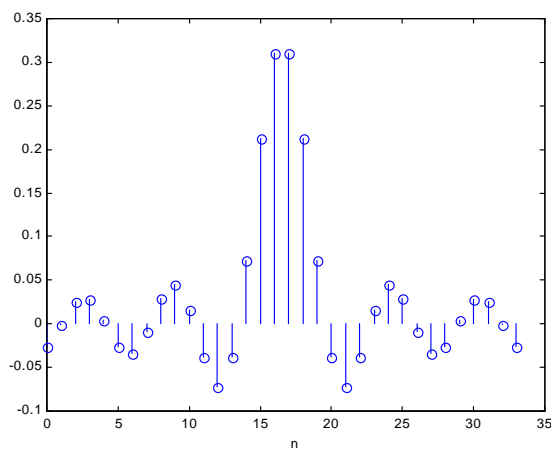


Odmjerci željene amplitudne karakteristike za $N = 34$.

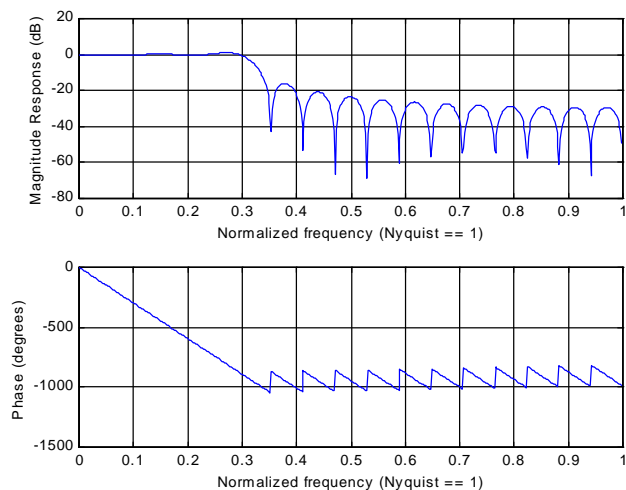
Ovim postupkom dobija se FIR filter...



Amplitudna karakteristika FIR filtra dužine $N = 34$.

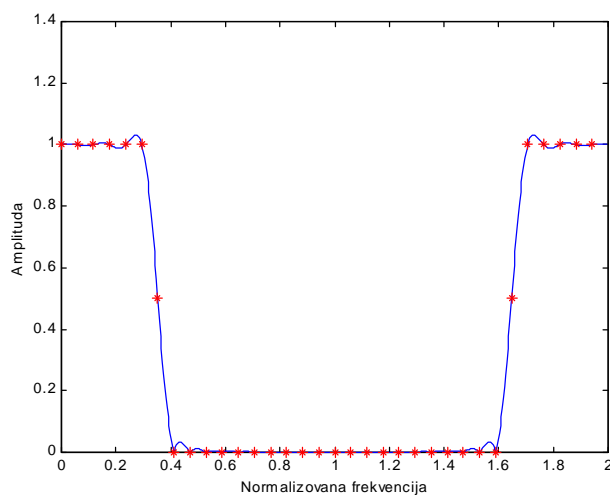


Impulsni odziv FIR filtra dužine $N = 34$.

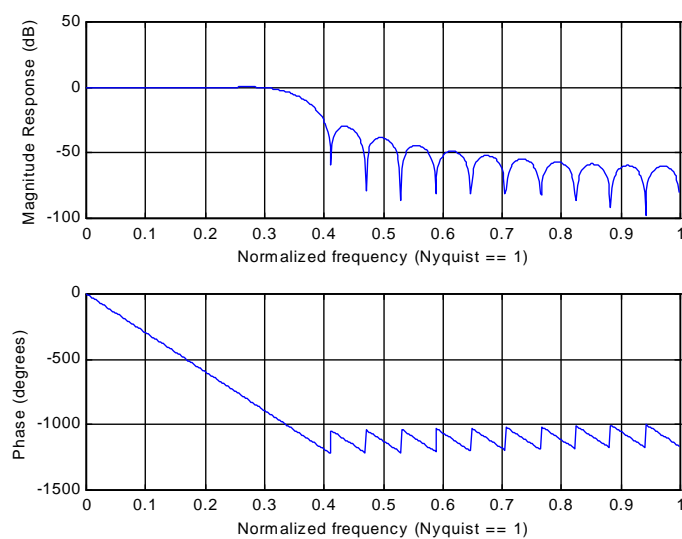


Frekvencijska karakteristika.

Ukoliko u prelaznom opsegu dodamo jedan ili dva odmjerka čija je vrijednost između 0 i 1 proširićemo prelazni opseg ali ćemo povećati slabljenje u nepropusnom opsegu.



Amplitudna karakteristika FIR filtra projektovanog metodom odmjeravanja u frekvenciji uz zadavanje odmjeraka u prelaznom opsegu.



Frekvencijska karakteristika.

Ako želimo da pored ovoga zadržimo istu širinu prelaznog opsega moraćemo udvostručiti red filtra.

Korišćenjem tehnika linearne optimizacije moguće je izabrati vrijednosti ovih odmjeraka tako da se dobije najbolja aproksimacija željenog filtra.