Glava 1

SIGNALI I SISTEMI

1.1 UVOD

Koncept signala i sistema se pojavljuje u veoma mnogo različitih oblasti nauke i tehnologije, kao što su kominikacije, obrada govora, slike i video signala, biomedicinski inženjering, aeronautika i astronautika, seizmologija, kontrola hemijskih procesa, proizvodnja energije i distributivni sistemi, itd... Iako fizička priroda signala i sitema u ovim oblastima može biti veoma različita, signali se svugdje posmatraju kao funkcije jedne ili više nezavisnih varijabli koje sadrže informacije o ponašanju ili prirodi nekih fenomena, dok sistemi odgovaraju na pobudu jednim (ili više) signalom proizvodeći drugi signal (signale).

Postoji mnogo problema i pitanja vezanih za signale i sisteme. U nekim slučajevima želimo da okarakterišemo dati sistem kako bismo mogli razumjeti kako će on reagovati na različite pobude, dok se nekad bavimo projektovanjem sistema koji će na željeni način obrađivati signale. Jedna od uobičajenih aplikacija je restauracija signala koji je na neki način degradiran, npr. uklanjanje šuma u komunikacijama ili poboljšanje kvaliteta slike. Ponekad želimo da modifikujemo dati sistem zasnovano na mjerenju nekih fizičkih veličina, kao što su temperatura, pritisak i sl., što nazivamo kontrolom procesa.

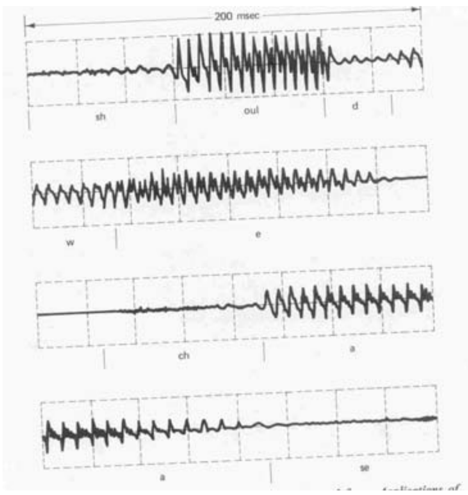
U ovom kursu ćemo se baviti filtriranjem signala. Filtrirati signal, u najširem smislu, znači djelovati na signal i modifikovati ga na unaprijed zadani način, najčešće tako da neke komponente signala pojačavamo ili propuštamo bez ili sa malim dozvoljenim slabljenjem, dok druge komponente signala slabimo ispod propisanog nivoa.

U nekim aplikacijama, signali su funkcije kontinualne varijable (vremena ili prostora), te ih nazivamo kontinualni signali, dok su u drugim vrijednosti signala poznate samo u određenim vremenskim trenucima pa govorimo o dikretnim signalima. Na ovoj podjeli signala zasnovana je i jedna od osnovnih klasifikacija filtara na analogne i digitalne filtre.

1.2 SIGNALI

Signal je kvantitativna ili kvalitativna fizička veličina koja sadrži informacije. Priroda signala, ovisno o njegovom porijeklu, može biti raznolika.

Signalima se može opisati mnoštvo različitih fizičkih fenomena. Npr. ljudski govorni mehanizam proizvodi glasove kreiranjem varijacija akustičkog pritiska. Koristeći mikrofon te varijacije se mogu prevesti u električni signal (napon ili struja). Kao što se može vidjeti na sljedećoj slici, različiti glasovi odgovaraju različitim oblicima signala. Slično je i sa slikom koja je dvodimenzionalni signal, gdje vrijednosti signala u prostoru odgovaraju intenzitetu svjetline.



Primjer zapisa govornog signala

Bilo koji signal (mehanički, električni, akustični, video, biološki…), da bi se podvrgao obradi elektronskim putem, mora biti konvertovan u električni signal. Električni signali nastaju mjerenjem fizičkih fenomena, kao što su temperatura, pritisak, zvuk, svjetlost i slično, ili vještačkim putem, npr. pri generisanju elektronske muzike i sintetičkih slika (računarska grafika i sl.).

Pod obradom signala podrazumijevamo konverziju pobudnog signala u signal odziva na način definisan sistemom na koji pobudni signal djeluje. Primjere obrade signala susrećemo svakog časa, svuda oko nas. Čak i biološke jedinke možemo posmatrati kao sisteme koji reaguju na zvukove, svjetlost i mnoštvo drugih signala iz okoline. Jedan od jednostavnih primjera je navlačenje roletni pri čemu ne samo da smanjujemo količinu već mijenjamo i boju svjelosti u sobi. Na taj način djelujemo na signal svjetlosti, mijenjajući pobudni signal, svjetlost koja pada na otvor, u odziv, odnosno svjetlost koja ulazi u sobu. Način na koji smo promijenili količinu i boju svjetlosti zavisi od upotrijebljenih roletni i naravno, naše odluke, dakle sistema na koji pobudni signal djeluje.

Obrada električnih signala podrazumijeva konverziju električnog signala pobude u električni signal odziva. U daljnjem izlaganju ćemo pod riječju signal podrazumijevati električni signal.

1.2.1 Klasifikacija signala

Budući da se signal predstavlja kao funkcija jedne ili više nezavisnih varijabli, te možemo govoriti o *jednodimenzionalnim* ili *višedimenzionalnim* signalima. Jednodimenzionalni signali su npr. temperatura ili pritisak mjereni u jednoj tački u prostoru, dok se kao primjer višedimenzionalnih signala mogu navesti dvodimenzionalne ili trodimenzionalne slike, gdje su nezavisne varijable koordinate u ravni, odnosno prostoru, respektivno. Iako se kod jednodimenzionalnih signala ne ograničavamo samo na vrijeme kao nezavisnu varijablu, često to usvajamo radi jednostavnijeg izlaganja.

Na osnovu toga da li signal postoji u svakom trenutku vremena ili ne, govorimo o *kontinualnom* ili *diskretnom* signalu u vremenu, respektivno. Za signale koji mogu da poprime proizvoljnu vrijednost iz dozvoljenog opsega kažemo da su *kontinualni po amplitudi*, dok za signale čije vrijednosti amplitude pripadaju konačnom skupu kažemo da su *kvantovani*. Ako je signal kontinualan u vremenu i po amplitudi kažemo da se radi o *analognom* signalu. Za signal diskretan u vremenu i kvantovane amplitude kažemo da je *digitalan*.

1.2.2 Kontinualni signali

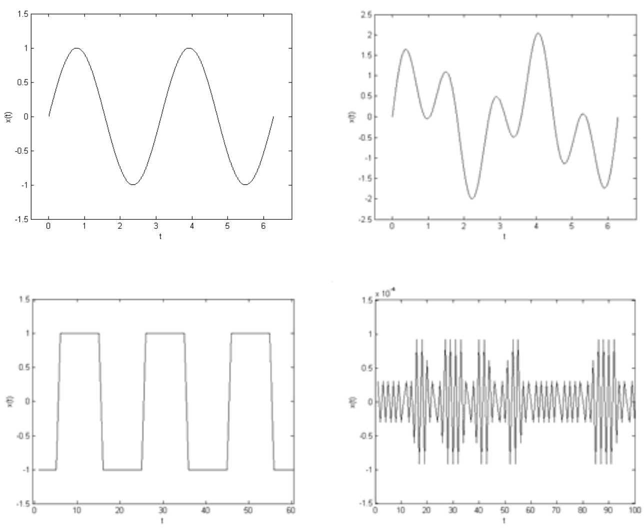
Kontinualni signal se definiše kao signal koji postoji za svaku vrijednost nezavisne varijable. Pri tome se podrazumijeva da je nezavisna varijabla kontinualna varijabla.

Kontinualni signal označavamo sa $x(t)$, gdje je t simbol za nezavisnu kontinualnu varijablu. Primjeri kontinualnih signala su:

$x(t) = e^{-t}$,

$x(t) = \cos t$.

Na sljedećoj slici je grafička predstava nekih kontinualnih signala.



Kontinualni signali

1.2.3 Odmjeravanje signala

Signali koji se javljaju u prirodi su uglavnom kontinualni. Međutim, vrlo često se dovoljno informacija o signalu može dobiti i na osnovu njegovih odmjeraka uzetih u odvojenim vremenskim intervalima. Posmatrajmo, npr., dnevno mjerenje vodostaja rijeke ili mjerenje temperature nekog hemijskog procesa koje se obavlja svakih nekoliko mikrosekundi. Kao rezultat ovih mjerenja nastaju signali čije vrijednosti poznajemo samo u pojedinim vremenskim trenucima. Za takve signale kažemo da su diskretni. Vremenski intervali između dva susjedna uzorkovanja ne moraju biti jednaki, iako ćemo mi u daljnjem izlaganju smatrati da se odmjeravanje (uzimanje uzoraka signala u vremenu) vrši u jednakim vremenskim intervalima. Intuitivno je jasno da signal treba češće mjeriti ako se on brzo mijenja. Na taj način obezbjeđujemo dovoljno informacija o signalu, odnosno osiguravamo da neka brza promjena signala ne prođe neopaženo. To znači da interval odmjeravanja signala koji sadrže visoke frekvencije (odnosno brze promjene u vremenskim oblicima signala) mora biti dovoljno mali. Ako je signal frekvencijski ograničen, onda je moguće period odmjeravanja izabrati tako da se na osnovu odmjeraka signala može u potpunosti rekonstruisati originalni siganal. Uslov koji za to mora biti ispunjen je dat poznatim *teoremom odmjeravanja* (matematičko izvođenje je zasnovano na osobinama Furijeove transformacije):

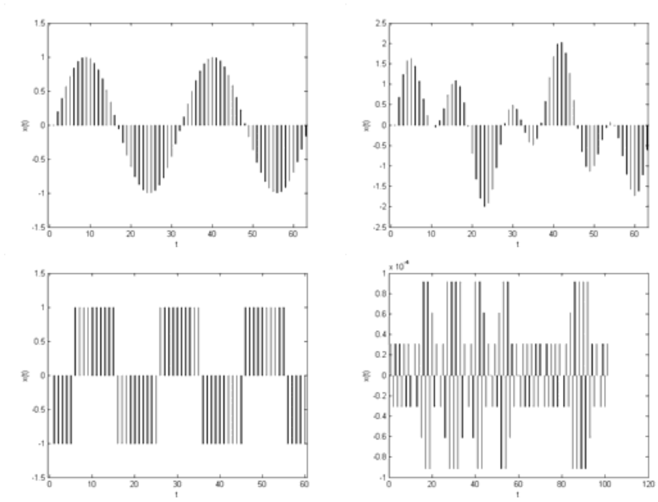
$$T_0 = \frac{1}{F_0} \le \frac{1}{2F_g}$$

gdje je T_0 period odmjeravanja, F_0 frekvencija odmjeravanja, a F_g granična frekvencija signala. Minimalna frekvencija odmjeravanja F_0 koja zadovoljava dati uslov, naziva se Nikvistova frekvencija, a uslov koji postavlja teorema odmjeravanja Nikvistov kriterij.

Ako želima da iz odmjerenog signala rekonstruišemo originalni signal potrebno je da unaprijed poznajemo opseg frekvencija originalnog signala. Pretpostavimo da se kontinualni signal sastoji od jednog ili više sinusoidalnih signala i da je najviša frekvencija sinusoidalnog signala $F_{\max}$. Ako je Nikvistov kriterij zadovoljen, originalni kontinualni signal se može rekonstruisati iz njegovih odmjeraka propuštajući odmjereni signal kroz sistem koji ima osobinu da odbaci sve sinusoidalne signale čija je frekvencija veća od $F_{\max}$.

1.2.4 Diskretni signali

Signal definisan samo u pojedinim (diskretnim) vremenskim trenucima nazivamo diskretni signal. Njegova amplituda može, ali ne mora biti kontinualna. Amplituda odmjeraka signala $x_k = x\left(kT_0\right)$ se grafički predstavlja u zavisnosti od rednog broja odmjerka *k*. Sljedeća slika prikazuje neke signale koji su diskretni u vremenu ali sa kontinualnom amplitudom.



Vremenski diskretni signali sa kontinualnom amplitudom

1.2.5 Analogni signali

Često se pojam analognog signala poistovjećuje sa pojmom kontinualni signal. To nije u potpunosti korektno. Čak i ako se prihvati i koristi takva terminologija, neophodno je razumijevanje razlike pojmova kontinualni i analogni signal. Signal kontinualan u vremenu smo već definisali. Ako amplituda signala može da poprimi proizvoljnu vrijednost iz dozvoljenog opsega kažemo da je amplituda signala kontinualna. Signal kontinualan u vremenu i sa kontinualnom amplitudom nazivamo analogni signal.

1.2.6 Kvantizacija i kodovanje signala

Kvantizacija je proces kojim se ulazni signal kontinualne amplitude preslikava u izlazni signal čija amplituda može da poprimi konačno mnogo različitih nivoa.

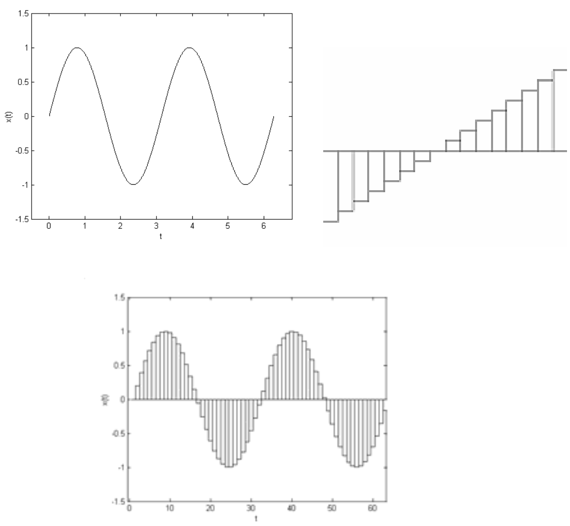
Pretpostavimo da amplituda ulaznog signala leži u opsegu $x_{\min} \le x(t) < x_{\max}$, gdje $D = x_{\max} - x_{\min}$ nazivamo dinamički opseg signala, te da želimo da signal kvantujemo sa L različitih nivoa $\hat{x}_k, k = 0,1,...,L-1$. Definišimo L nivoa ulaznog signala $x_k, k = 0,1,...,L-1$ takvih da je

$$x_0 = x_{\min} \langle x_0 \langle x_2 ... \langle x_{L-2} \langle x_{L-1} = x_{\max} .$$

Preslikavanje ulaznog u izlazni signal se vrši na osnovu kvantizacione funkcije na sljedeći način:

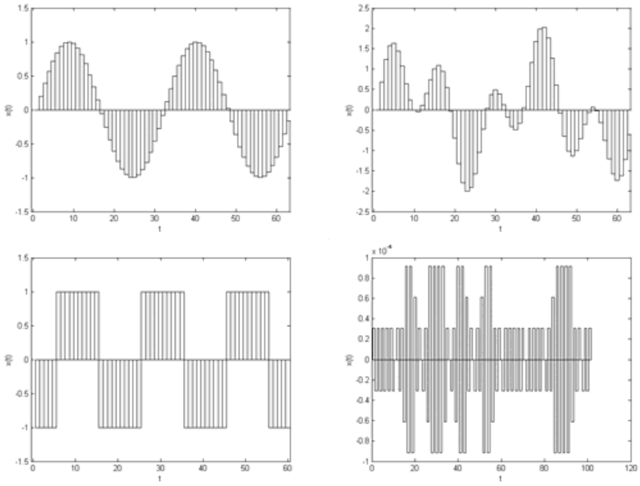
$$x(t) \in [x_k, x_{k+1}) \Rightarrow \hat{x}(t) = \hat{x}_k .$$

Zbog toga što amplituda kvantovanog signala poprima konačan broj različitih nivoa, vrijednosti signala se zapisuju (koduju) sa konačnim brojem bita B i uobičajeno je $L = 2^B$. Očigledno je da amplituda signala prije i poslije kvantizacije nije ista. Greška kvantizacije koja nastupa zavisi od dinamičkog opsega D i broja novoa kvantizacije L, kao i od izbora nivoa ulaznog signala i kvantizacionih nivoa. Broj bita kojim se koduje kvantovani signal je veoma važan. Pri memorisanju, procesiranju i prenosu signala poželjno je baratati sa što manjim brojem bita. Međutim, kvantovanjem signala sa malim brojem kvantizacionih nivoa gubimo informacije koje ima originalni signal. Stoga je neophodno naći kompromis između ova dva oprečna zahtijeva, tako da se odabere najmanji mogući broj bita za zapis amplitude, a da se pri tome sačuvaju neophodne informacije u signalu. Sljedeća slika prikazuje kvantizaciju signala sa šesnaest kvantizacionih nivoa. U praksi se koristi znatno veći broj kvantizacionih nova, vrlo rijetko manje od 2^8=256.



Kvantizacija sa šesnaest kvantizacionih nivoa

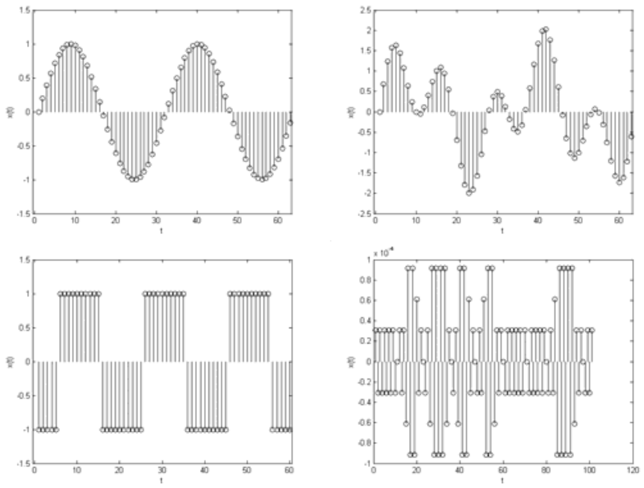
Na sljedećoj slici dati su primjeri kvantovanih signala kontinualnog trajanja u vremenu.



Kvantovani signali kontinualnog trajanja

1.2.7 Digitalni signali

Kvantizacijom dikretnog signala, a zatim kodovanjem kvantovanih nivoa dolazimo do digitalnog signala. Digitalni signal je niz brojeva koji predstavljaju kvantovane vrijednosti signala u diskretnim trenucima vremena. Kodovane vrijednosti amplitude odmjeraka kvantovanog signala $\hat{x}_k = x(kT)$ se grafički predstavljaju u zavisnosti od rednog broja odmjerka *k*. Radi jednostavnije notacije, u daljnjem izlaganju ćemo koristiti oznaku $x(n)$ da označimo digitalni signal. Sljedeća slika prikazuje primjere digitalnih signala.



Digitalni signali

1.3 SISTEMI

Sistem posmatramo kao proces čiji rezultat je transformacija signala. Prema tome, sistem ima ulazne i izlazne signale koji su međusobno vezani kroz transformaciju koju nad ulaznim signalima vrši sistem. Npr., neki muzički sistem na osnovu ulaznog audio signala vrši reprodukciju tog signala. Ako takav sistem ima tonsku kontrolu, moguće je mijenjati karakteristike sistem, te za sisteme sa sličnim mogućnostima kažemo da osim ulaznih i izlaznih signala imaju i kontrolne signale.

Pod riječju *filtar*, u najširem smislu, podrazumijevamo sistem koji djeluje na komponente signala modifikujući ih na unaprijed zadani način. Pri tome se željene komponente signala pojačavaju ili propuštaju sa dozvoljenim malim slabljenjem, dok se neželjene komponente signala blokiraju ili slabe ispod propisanog nivoa. Električni filtar je sistem koji modifikuje frekvencijske komponente ulaznog signala na način zadan prenosnom funkcijom sistema. U daljnjem izlaganju ćemo pri korištenju riječi filtar podrazumijevati da se radi o električnom filtru.

1.3.1 KONTINUALNI SISTEMI

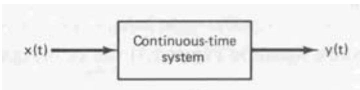
Kontinualni sistemi su oni sistemi koji transformišu kontinualni ulazni signal u kontinualni izlazni signal. Kontinualni sistemi se često predstavljaju blok dijagramima kao na sljedećoj slici, dok se za transformaciju koristi notacija:

$$x(t) \to y(t)$$

ili

$$y(t) = L\{x(t)\}$$

gdje je sa $x(t)$ označen ulazni, sa $y(t)$ izlazni signal, dok L označava funkciju preslikavanja.



Blok dijagram kontinualnog sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom

Predstavljanje linearnih vremenski invarijantnih (LTI) kontinualnih sistema

Ukoliko sistem posjeduje svojstvo linearnosti i vremenske invarijantnosti, moguća je njegova potpuna karakterizacija preko odziva na jediničnu impulsnu funkciju, odnosno impulsnog odziva $h(t)$. Odziv kontinualnog LTI sistema na proizvoljnu pobudu se može dobiti konvolucijom ulaznog signala i impulsnog odziva:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t) = h(t) * x(t).$$

Odziv kauzalnog sistema uz uslov da je $x(t) = 0$ za $t \langle 0$ je dat sa:

$$y(t) = \int_{0}^{t} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

LTI sistem je moguće opisati i linearnim diferencijalnim jednačinama sa konstantnim koeficijentima.

Posmatrajmo primjer kontinualnog sistema kod koga su ulaz i izlaz vezani relacijom:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t).$$

Ova relacija na implicitan način opisuje odziv sistema i da bi dobili izlaz kao funkciju ulaza moramo riješiti diferencijalnu jednačinu. Znamo da se rješenje diferencijalne jednačine sastoji od *homogenog* i *partikularnog* dijela:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Partikularno rješenje je istog oblika kao pobuda i mora da zadovoljava datu diferencijalnu jednačinu, dok je $y_h(t)$ rješenje homogene diferencijalne jednačine:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0.$$

Homogeno rješenje se pretpostavlja u obliku:

$$y_h(t) = Ae^{st},$$

pa nakon zamjene pretpostavljenog rješenja u homogenu diferencijalnu jednačinu imamo:

$$Ase^{st} + 2Ae^{st} = Ae^{st}(s+2) = 0.$$

Rješenje *karakteristične jednačine* ovog sistema:

$$s + 2 = 0$$

je $s = -2$, te je homogeno rješenje oblika:

$$y_h(t) = Ae^{-2t}.$$

Da bi rješenje bilo u potpunosti određeno (u ovom slučaju preostaje određivanje konstante *A*), nakon kombinovanja homogenog i partikularnog rješenja, neophodno je specificirati dodatne uslove koji se odnose na vrijednost odziva (u diferencijalnim jednačinama višeg reda i vrijednosti derivacija odziva) u nekom trenutku vremena, npr. $y(0) = y_0$.

Ako pretostavimo da je ulazni signal jednak nuli, kompletan odziv sistema će biti jednak homogenom dijelu odziva:

$$y_h(t) = y_0 e^{-2t}, \text{ za } t \geq 0.$$

Ovaj sistem nije linearan izuzev u slučaju kada je $y_0 = 0$, ali je inkrementalno linearan, jer se odziv sistema može posmatrati kao zbir odziva na početne uslove i zbir odziva na pobudu. Ovaj zaključak se generalizuje na sve sisteme koji se mogu opisati linearnim diferencijalnim jednačinama.

U opštem slučaju, sistem sa jednim ulazom i jednim izlazom opisuje se linearnom diferencijalnom jednačine N-tog reda sa konstantnim koeficijentima:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} ,$$

ili, napisano u razvijenoj formi:

$$a_N \frac{d^N y}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \cdots + a_0 y = b_M \frac{d^M x}{dt^M} + b_{M-1} \frac{d^{M-1} x}{dt^{M-1}} + \cdots + b_0 x$$

gdje su $a_i, i = 1,2,\ldots,M$ i $b_j, j = 1,2,\ldots,N$ realni koeficijenti koji zavise od elemenata sistema i njihovih međusobnih veza.

Napomena: kod nelinearnih sistema neki od koeficijenata može biti funkcija od x i/ili y, a kod vremenski zavisnih sistema od vremena.

Primjenom Laplasove transformacije na diferencijalnu jednačinu, uz podsjećanje da je Laplasova transformacija izvoda:

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n y}{dt^n}\right) = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} \frac{dy(0)}{dt} - \cdots - \frac{d^{n-1} y(0)}{dt^{n-1}}$$

imamo:

$$\left(a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_0\right) Y(s) + IC_y(s) = \left(b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots b_0\right) X(s) + IC_x(s)$$

gdje su u $IC_y(s)$ i $IC_x(s)$ grupisani svi članovi koji uključuju početne uslove za y i x.

Pri određivanju kompletnog odziva, bilo u vremenskom domenu ili korištenjem Laplasove transformacije, neophodno specificarati dodatne (početne) uslove u nekom trenutku vremena:

$$y(t_0), \frac{dy(t_0)}{dt}, \ldots, \frac{d^{N-1} y(t_0)}{dt^{N-1}} .$$

U slučaju kad su svi početni uslovi jednaki nuli

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \ldots = \frac{d^{N-1} y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0$$

sistem opisan linearnom diferencijalnom jednačinom sa konstantnim koeficijentima je linearan, kauzalan i vremenski invarijantan.

Kako prilikom određivanja neke od karakteristika sistema, npr. impulsnog odziva ili funkcije mreže, ta karakteristika sistema ne smije da zavisi od trenutnog stanja sistema opisanog kroz početne uslove, svi početni uslovi se postavljaju na nulu.

Prema tome, funkcija mreže:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{b_M s^M+b_{M-1}s^{M-1}+\cdots+b_0}{a_N s^N+a_{N-1}s^{N-1}+\cdots+a_0}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

je količnik dva polinoma po s sa realnim koeficijentima, tzv. *realna racionalna funkcija*.

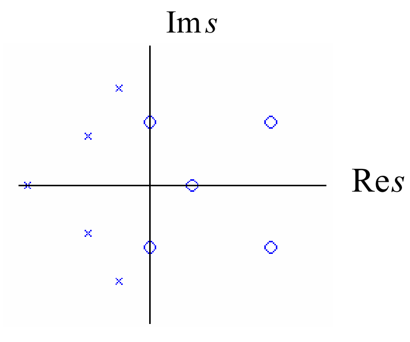
Nakon faktorizacije polinoma funkcija mreže se može zapisati u obliku:

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_M(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_M)}{a_N(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_N)}.$$

Budući da su koeficijenti funkcije $H(s)$ realni, njene nule i polovi dolaze u konjugovano-kompleksnim parovima.

Zavisno od rasporeda nula i polova u kompleksnoj ravni, mogu nastupiti različiti oblici odziva:

1. svi polovi se nalaze u lijevoj poluravni – odziv eksponencijalno pada kad $t\to\infty$,
2. pojavljuje se pol na jw osi – u odzivu se javljaju oscilacije,
3. postoje polovi u desnoj poluravni – odziv eksponencijalno raste s vremenom.
4. polovi u desnoj poluravni – odziv eksponencijalno raste s vremenom.



Mogući raspored nula i polova funkcije mreže u s-ravni

Uslov stabilnosti i minimalno fazni sistemi

Stabilnost je veoma važna osobina sistema. Intuitivno, sistem je stabilan ako mala promjena ulaza ne generiše izlaz koji divergira. Drugim riječima, odziv na ograničenu pobudu mora biti ograničen da bi sistem bio stabilan. Fizički fenomeni, kao što su lančane reakcije ili rast populacije, koji se mogu opisati rastućim eksponencijalnim signalima, su primjeri odziva nestabilnih sistema, dok fenomeni kao što su odziv *RLC* kola koji se opisuju opadajućim eksponencijalnim signalima predstavljaju primjere odziva stabilnih sistema.

Da bismo odredili uslove pod kojima je LTI sistem stabilan, pretpostavićemo sistem sa impulsnim odzivom $h(t)$ na koji djeluje ograničena pobuda, $|x(t)| \langle B, \forall t$. Tada je:

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)| d\tau \leq B \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau .$$

Prema tome, kontinualni LTI sistem je stabilan ako je njegov impulsni odziv *apsolutno integrabilan*,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau \langle \infty .$$

Kao primjer stabilnog sistema možemo navesti sistem čija je uloga samo da zakasni ulazni signal, pa je njegov impulsni odziv $h(t) = \delta(t - t_0)$. Ispitujući da li je sistem stabilan:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |\delta(\tau - t_0)| d\tau = 1$$

vidimo da je njegov impulsni odziv apsolutno integrabilan pa je sistem stabilan, što je bilo i za očekivati jer je odziv ovog sistema na bilo koju ograničenu pobudu jednak pomjerenoj verziji pobude, dakle ograničen.

Posmatrajmo sada sistem opisan sa:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$$

koji nazivamo *integrator*. Da bismo pronašli impulsni odziv sistema pretpostavimo $x(t) = \delta(t)$, pa imamo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = u(t).$$

Kako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(\tau)| d\tau = \int_{0}^{\infty} d\tau = \infty$$

vidimo da se radi o nestabilnom sistemu.

Gledano u s-ravni, za stabilne sisteme karakteristični polinom $D(s)$ mora biti *Hurvicov (Hurwitz) polinom*, tj., imati sve korijene u lijevoj poluravni. Korijene polinoma $D(s)$ nazivamo *polovima* funkcije mreže $H(s)$.

Ako svi korijeni polinoma $N(s)$ leže na *jw* osi ili u lijevoj poluravni s-ravni, funkcija $H(s)$ se naziva *minimalno fazna funkcija*. Korijene polinoma $N(s)$ nazivamo *nulama* funkcije mreže $H(s)$.

Ako želimo postići određenu magnitudu nevažno je da li funkcija mreže ima nule koje leže u lijevoj ili u desnoj poluravni, ako predstavljaju sliku u ogledalu onih u lijevoj poluravni. Međutim, funkcija mreže sa nulama u lijevoj poluravni ima manju fazu.

Primjer:

Funkcije

$H_1(s) = H_0(s)(s+\sigma)$ i $H_2(s) = H_0(s)(s-\sigma)$, gdje je σ realno i pozitivno, imaju istu magnitudu

$$|H_1(j\Omega)| = |H_2(j\Omega)| = |H_0(j\Omega)|\sqrt{\Omega^2+\sigma^2} ,$$

ali su im faze različite:

$$\varphi_1(\Omega) = \varphi_0(\Omega) + arctg\frac{\Omega}{\sigma} ,\ \varphi_2(\Omega) = \varphi_0(\Omega) + arctg\frac{\Omega}{-\sigma} = \varphi_0(\Omega) + \pi - arctg\frac{\Omega}{\sigma} .$$

Kako je

$$arctg\frac{\Omega}{\sigma} \le \frac{\pi}{2}$$

slijedi

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi - 2arctg\frac{\Omega}{\sigma} \ge 0 .$$

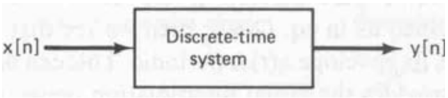
Dakle, sistem sa nulom u desnoj poluravni ima veću fazu. Razmatranje se lako proširi na sisteme sa više nula.

1.4 DISKRETNI SISTEMI

Slično kao kod kontinualnih sistema, *diskretni sistem* posmatramo kao proces čiji rezultat je transformacija diskretnog ulaznog signala u diskretni izlazni signal:

$$x(n) \rightarrow y(n),$$

gdje je sa $x(n)$ označen ulazni, a sa $y(n)$ izlazni signal.



Blok dijagram diskretnog sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom

Predstavljanje linearnih vremenski invarijantnih (LTI) diskretnih sistema

Slično kao kod kontinalnih sistema, osobina da se bilo koji diskretni signal može predstaviti preko impulsa nam, zajedno sa svojstvom linearnosti i vremenske invarijantnosti, omogućava potpunu karakterizaciju LTI diskretnog sistema preko njegovog odziva na jedinični impuls.

Konvolucioni suma omogućava pronalaženje odziva LTI sistema na proizvoljnu pobudu ako je poznat odziv sistema na jedinični impuls.

Definišimo impulsni odziv $h(n)$ kao odziv LTI sistema na impulsnu pobudu $\delta(n)$, $h(n) = L\{\delta(n)\}$ gdje je sa L označen operator kojim sistem transformiše ulazni signal u izlazni. Zbog vremenske invarijantnosti, odziv LTI sistema na $\delta(n-k)$ je $h(n-k)$. Znajući da proizvoljan diskretni signal možemo predstaviti sa

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

i koristeći princip superpozicije, slijedi odziv na proizvoljnu eksitaciju:

$$y(n) = L\{x(n)\} = L\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)L\{\delta(n-k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Posljednja jednakost predstavlja opštu formu odziva LTI diskretnih sistema na proizvoljnu pobudu $x(n)$ i označena je kao *konvoluciona suma*, ili jednostavno, *konvolucija*. Konvolucija dva diskretna signala se simbolički označava sa $y(n) = x(n) * h(n)$.

Opšti oblik jednačine diferencija koja opisuje LTI diskretan sistem je

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k).$$

Za sisteme opisane ovakvim jednačinama diferencija kažemo da su *rekurzivni*, jer izlazni signal zavisi ne samo od trenutnog i prethodnih stanja na ulazu, već i od prethodnih stanja na ilazu. U slučaju kad izlazni signal zavisi samo od trenutnog i prethodnih stanja na ulazu, a ne i od prethodnih stanja na izlazu, kažemo da se radi o *nerekurzivnom* sistemu. Tada su svi koeficijenti $a_k = 0,\ k = 1,2,...,N$ i jednačina diferencija poprima oblik

$$y(n) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k).$$

Impulsni odziv ovakvih sistema je konačnog trajanja i jednak

$$h(n) = \begin{cases} \dfrac{b_n}{a_0},\ 0 \le n \le M \\ 0,\ \textit{inače} \end{cases}.$$

Sisteme sa konačnim impulsnim odzivom nazivamo *FIR (Finite Impulse Response) sistemi*, dok sisteme sa neograničenim trajanjem impulsnog odziva nazivamo *IIR (Infinite Impulse Response) sistemi*. U specijalnim slučajevima rekurzivni sistemi mogu imati konačno trajanje impulsnog odziva.

Da bi dobili izlaz kao funkciju ulaza moramo riješiti jednačinu diferencija koja opisuje sistem. Rješenje se sastoji od *homogenog* i *partikularnog* dijela:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n).$$

Partikularno rješenje je istog oblika kao pobuda i mora da zadovoljava datu jednačinu diferencija, dok je $y_h(n)$ rješenje homogene jednačine diferencija:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0.$$

Homogeno rješenje se pretpostavlja u obliku:

$$y_h(n) = A\alpha^n,$$

pa nakon zamjene pretpostavljenog rješenja u homogenu diferencijalnu jednačinu imamo:

$$a_0 A\alpha^n + a_1 A\alpha^{n-1} + ... a_N A\alpha^{n-N} = 0$$

odosno

$$A\alpha^{n-N}\left[a_0\alpha^N + a_1\alpha^{N-1} + ... + a_{N-1}\alpha + a_N\right] = 0.$$

Karakteristična jednačina je

$$a_0\alpha^N + a_1\alpha^{N-1} + ... + a_{N-1}\alpha + a_N = 0.$$

U slučaju da su svi korijeni karakteristične jednačine različiti, homogeno rješenje ima oblik

$$y(n) = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + ... + A_N\alpha_N^n .$$

Partikularno rješenje se pretpostavlja u istom obliku kao eksitacija. Npr, ako je $x(n) = n^k$ patikularno rješenje se pretpostavlja u obliku $c_1 n^{k-1} + c_2 n^{k-2} + ... + c_k$. Ako je $x(n) = a^n$ pri čemu a nije korijen karakteristične jednačine, patikularno rješenje se pretpostavlja u obliku ca^n, a ako je a jednak jednom od korijena karakteristične jednačine, patikularno rješenje se pretpostavlja u obliku $c_1 n^{k-1} a^n + c_2 n^{k-3} a^n + c_3 n^{k-3} a^n + ... + c_k a^n$.

Da bi odredili odziv sistema na osnovu poznate jednačine diferencija, neophodno je poznavanje početnih uslova: $y(-N), y(-N+1), ..., y(-1)$ i $x(-M), x(-M+1), ..., y(-1)$. Pri određivanju neke od funkcija mreže smatramo da su svi početni uslovi jednaki nuli.

Ako na ulaz diskretne mreže, čiji je impulsni odziv jednak $h(n)$, dovedemo kompleksnu eksponencijalnu sekvencu $x(n) = z^n$, $z \in C$, signal na izlazu mreže će biti jednak:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) z^{n-k} = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) z^{-k} \right] z^n = H(z) z^n$$

.

Način kako diskretna mreža mijenja signal definisan je funkcijom prenosa diskretne mreže $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$. Primijetimo da je funkcija prenosa diskretne mreže jednaka z-transformaciji impulsnog odziva.

Poznavajući pravilo z-transformacije o konvoluciji diskretnih signala:

$$y(n) = h(n) * x(n) \leftrightarrow Y(z) = H(z) X(z),$$

funkcija prenosa diskretne mreže može se izraziti i kao količnik z-transformacije odziva i z-transformacije eksitacije:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} .$$

Kod diskretnih sistema opisanih rekurzivnom jednačinom diferencija:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$$

impulsni odziv je u opštem slučaju beskonačnog trajanja. Funkcija prenosa je racionalna funkcija i ima i nule z_k i polove p_k konačnih vrijednosti. Može da se zapiše u jednom od sljedećih oblika, kao količnik dva polinoma (u razvijenom ili faktorizovanom obliku, po z^{-1} ili po z):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = z^{N-M} \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}}{z^N + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{N-k}}$$

$$= k \frac{\prod_{k=1}^{M} \left(1 - z_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N} \left(1 - p_k z^{-1}\right)} = k z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^{M} \left(z - z_k\right)}{\prod_{k=1}^{N} \left(z - p_k\right)}$$

Ako je diskretni sistem opisan nerekurzivnom jednačinom diferencija $y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$,

onda je impulsni odziv konačnog trajanja. Funkcija prenosa ima M konačnih nula i pol reda N u nuli:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = z^{-M} \sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k} .$$

Ako je imulsni odziv konačnog trajanja, kažemo da se radi o FIR (Finite Impulse Responese) sistemu, a ako je impulsni odziv beskonačnog trajanja, onda kežemo da se radi o IIR ili I^2R (Infinite Impulse Responese) sistemu.

Posebnu klasu IIR sistema čine takozvani "all-pole" sistemi koji nemaju konačnih nula transmisije ($b_k = 0,\ k \neq 0$) i čija funkcija prenosa ima oblik:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = z^N \frac{b_0}{z^N + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{N-k}} .$$

Stabilnost digitalnih sistema

U vremenskom domenu diskretni sistem je stabilan ako njegov impulsni odziv zadovoljava uslov:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h(n)\right| < \infty .$$

Iz uslova stabilnosti datog u vremenskom domenu slijedi da funkcija prenosa konvergira na jediničnoj kružnici u z-ravi:

$$\left|H(z)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h(n) z^{-n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h(n)\right| \left|z^{-n}\right|\Big|_{|z|=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h(n)\right| < \infty ,$$

kao i u unutrašnjosti jediničnog kruga.

Vrijedi i obrnuto. Pretpostavimo kauzalan IIR digitalni sistem sa funkcijom prenosa:

$$H(z) = \frac{\alpha \prod_{i=1}^{M} \left(1 - z_i z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N} \left(1 - p_k z^{-1}\right)} .$$

Takođe pretpostavimo da je $M < N$. Za $M \ge N$ diskretni sistem se može predstaviti paralelnom vezom FIR sistema i IIR sistema kod koga je $M < N$. Razvojem na parcijalne razlomke, u slučaju da su svi polovi jednostruki, imamo:

$$H(z) = \frac{\xi_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{\xi_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \ldots + \frac{\xi_N}{1 - p_N z^{-1}} ,$$

gdje je

$$\xi_i = \lim_{z \to p_i} \left(1 - p_i z^{-1}\right) H(z), \; i = 1, 2, \ldots, N .$$

Tako je odgovarajući impulsni odziv jednak:

$$h(n) = \left[\xi_1 p_1^n + \xi_2 p_2^n + \ldots + \xi_N p_N^n\right] \mu(n) + \xi_0 \delta(n).$$

Ako su svi polovi diskretnog sistema u unutrašnjosti jediničnog kruga u z-ravni $|p_i| < 1, i = 1, 2, ..., N$, za impulsni odziv vrijedi da je $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$, te je diskretni sistem stabilan. Slično se može pokazati i za IIR diskretne sisteme čija funkcija prenosa ima višestruke polove.

Kada se radi o FIR sistemu sa funkcijom prenosa koja nema drugih polova osim pola reda N u nuli:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_M z^{-M}$$

zaključujemo da su ovakvi sistemi uvijek stabilni jer je njihov impulsni odziv konačnog trajanja: $h(n) = 0,\ n > M$ i $n < 0$.

Dakle, digitalni sistem je stabilan ako i samo ako oblast konvergencije funkcije prenosa obuhvata jediničnu kružnicu.

1.5 SPECIFIKACIJA I KLASIFIKACIJA FILTARA

Prije nego što se pristupi projektovanju i realizaciji filtra, neophodno je zadati zahtjeve koje filtar treba da zadovolji. Nakon toga, pristupa se projektovanju filtra, odnosno određivanju prenosne funkcije koja zadovoljava postavljene zahtjeve, nekom od aproksimacionih metoda. Kako najčešće postoji mnoštvo rješenja, neophodno je, po nekom od kriterija, odabrati jednu prenosnu funkciju. Nakon toga slijedi realizacija filtra, proces preslikavanja prenosne funkcije u električnu mrežu. Tu na raspolaganju stoji mnoštvo metoda, a izbor je najčešće određen specifičnom namjenom. Pri tome treba voditi računa da rješenje bude jednostavno, ekonomično, i da ne zavisi mnogo od tolerancija upotrijebljenih elemenata. Analizom realizovanog filtra (koja uključuje metode simulacije) utvrđuje se da li je dobijeno rješenje prihvatljivo i konačno slijedi implementacija, odnosno izrada i testiranje prototipa. Na kraju treba sagledati i troškove masovne proizvodnje, uzimajući u obzir cijene komponenti, tehnologiju proizvodnje, testiranja i podešavanja. Ako neki od postavljenih zahtjeva nije zadovoljen, pristupa se izmjenama u realizaciji, a ako je neophodno i izboru druge prenosne funkcije. Na sljedećoj slici je prikazana procedura projektovanja, realizacije i simulacije filtra.

Klasifikacija filtara može se uraditi na mnogo različitih načina. Posmatrajući karakter signala koji procesiraju, izvršena je podjela filtara na:

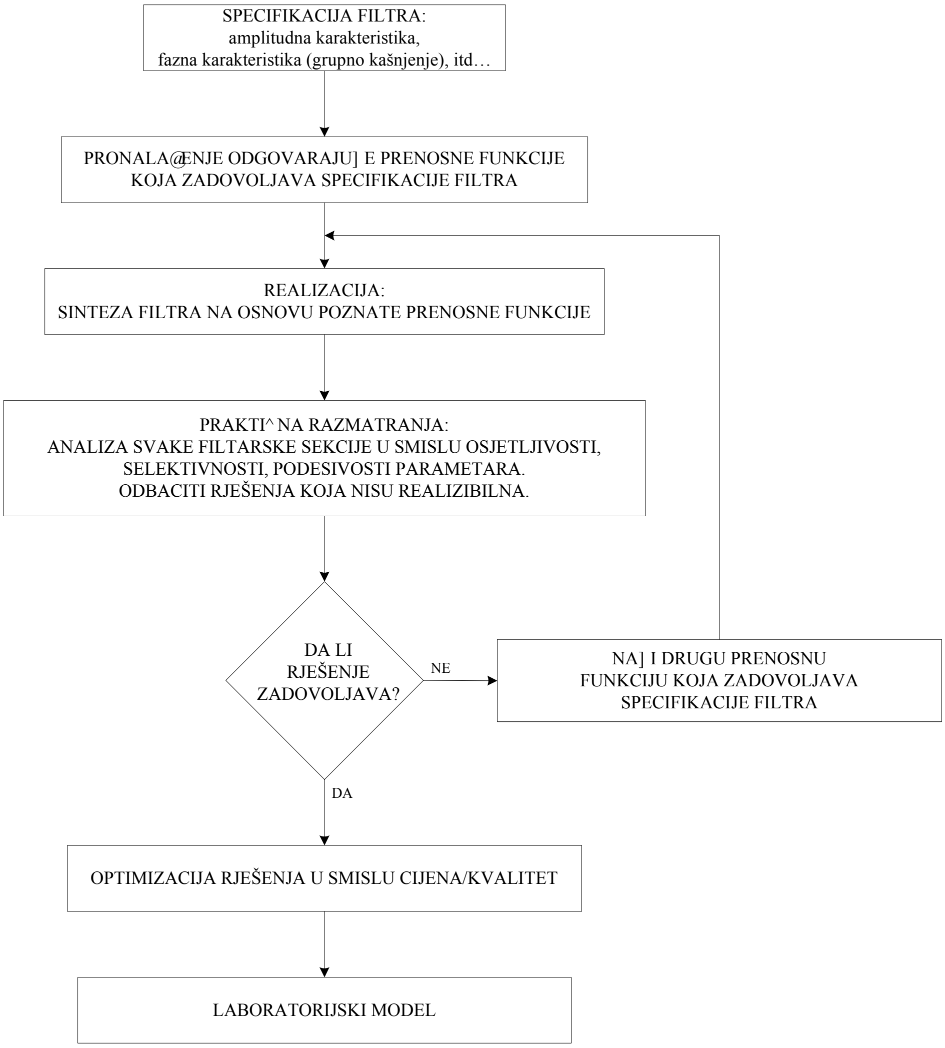
- analogne, koji procesiraju analogne signale i
- digitalne, koji procesiraju digitalne signale.

Ovisno o prirodi realizacije, analogni filtri se dijele na:

- pasivne, koji se realizuju samo pasivnim komponentama i
- aktivne, kod kojih se za realizaciju koriste i aktivne komponenete.

Saglasno funkciji koju vrše, filtri se najčešće dijele na osnovu opsega frekvencija koje propuštaju na:

- niskopropusne filtre (NP),
- visokopropusne filtre (VP),
- filtre propusnike opsega (PO),
- filtre nepropusnike opsega (NPO),
- svepropusnike (ekvalizatore kašnjenja).



Procedura projektovanja, realizacije i simulacije filtra