Univerzitet u Banjaluci
Elektrotehnički fakultet
Katedra za opštu elektrotehniku
Obrada i analiza multimedijalnih signala

Vježba 4.
Wienerov filtar

FIR Wienerov filtar u vremenskom domenu

Pretpostavimo da želimo da estimiramo signal $x(n)$ narušen aditivnim šumom $v(t)$ na osnovu mjerenja:

$$z(n) = x(n) + v(n) \tag{1}$$

Posmatrajmo FIR filtar reda p, na čiji ulaz dovodimo diskretni signal $z(n)$, n = 0,1,... Signal na izlazu filtra $\hat{x}(n)$ dat je izrazom

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{p} h_k z(n-k), \quad n = 0,1,2,... \tag{2}$$

gdje su h_i, i = 0, 1,..., p koeficijenti filtra. Potrebno je odrediti njihove vrijednosti tako da se filtar može upotrebiti za estimaciju signala $x(n)$, n = 0, 1,...

Definišimo najprije trenutnu grešku, $e(n)$:

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n). \tag{3}$$

Pošto su u opštem slučaju signali $x(n)$ i $\hat{x}(n)$ slučajne veličine i trenutna greška, data jednačinom (3) biće slučajna veličina. Jasno je da u ovom slučaju kao kriterijum optimalnosti estimacije ne možemo uzeti sumu kvadrata trenutnih grešaka, jer bi ona ponovo bila slučajna veličina. Da bismo odredili optimalne koeficijente filtra, funkciju cijene moramo definisati korišćenjem matematičnog očekivanja, odnosno funkciju cijene predstavlja *srednjekvadratna greška*, definisana sa:

$$J = E\left[e^2(n)\right] = E\left[\left(x(n) - \hat{x}(n)\right)^2\right]. \tag{4}$$

Uvođenjem matrične notacije,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}(n) = \begin{bmatrix} z(n) \\ z(n-1) \\ \vdots \\ z(n-p) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

odziv filtra, dat jednačinom (2), možemo pisati u obliku:

$$\hat{x}(n) = \mathbf{H}^T \mathbf{Z}(n). \tag{6}$$

Funkcija cijene se za signale stacionarne u širem smislu može odrediti pomoću jednačine

$$J = r_{xx}(0) + \mathbf{H}^T \mathbf{R}_{zz} \mathbf{H} - 2\mathbf{R}_{xz}^T \mathbf{H}, \tag{7}$$

gdje su:

$r_{xx}(0)$ – varijansa signala $x(n)$,

$$\mathbf{R}_{zz} = \begin{bmatrix} r_{zz}(0) & r_{zz}(1) & r_{zz}(2) & \cdots & r_{zz}(p) \\ r_{zz}(1) & r_{zz}(0) & r_{zz}(1) & \cdots & r_{zz}(p-1) \\ r_{zz}(2) & r_{zz}(1) & r_{zz}(0) & \cdots & r_{zz}(p-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{zz}(p) & r_{zz}(p-1) & r_{zz}(p-2) & \cdots & r_{zz}(0) \end{bmatrix}$$ - autokorelaciona matrica signala $z(n)$,

$$\mathbf{R}_{xz} = \begin{bmatrix} r_{xz}(0) \\ r_{xz}(1) \\ r_{xz}(2) \\ \vdots \\ r_{xz}(p) \end{bmatrix}$$ - kroskorelaciona matrica signala $x(n)$ i $z(n)$.

Matrica $\mathbf{R}_{zz}$ je simetrična Toeplitzova matrica.

Minimizacijom funkcije cijene date jednačinom (4.4) s obzirom na vektor koeficijenata filtra $\mathbf{H}$, dobija se optimalni vektor koeficijenata filtra $\mathbf{H} = \mathbf{H}^*$ kao rješenje *Wiener-Hopfove jednačine*

$$\mathbf{R}_{zz}\mathbf{H} = \mathbf{R}_{xz}, \tag{8}$$

odnosno

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{R}_{zz}^{-1}\mathbf{R}_{xz}. \tag{9}$$

Za tako određen vektor koeficijenata filtra dobija se minimalna srednjekvadratna greška (minimalna funkcija cijene)

$$J_{\min} = r_{xx}(0) - \mathbf{R}_{xz}^{T}\mathbf{H}^*. \tag{10}$$

Wienerov filtar u frekvencijskom domenu

Wiener-Hopfova jednačina (8) se može napisati i u obliku:

$$r_{xz}(n) = \sum_k h_k r_{zz}(n-k) = h(n) * r_{zz}(n), \tag{11}$$

pri čemu suma može biti konačna (FIR filtar) ili beskonačna (IIR) filtar. Primjenom Furijeove transformacije na jednačinu (11) i na osnovu Wiener-Khinchinove teoreme dobijamo:

$$S_{xz}\left(e^{j\omega}\right) = H\left(e^{j\omega}\right) S_{zz}\left(e^{j\omega}\right). \tag{12}$$

Gdje je sa $S_{zz}(j\omega)$ označena spektralna gustina snage signala $z(n)$, sa $S_{xz}\left(e^{j\omega}\right)$ kros-spektralna gustina snage signala $x(n)$ i $z(n)$, a $H\left(e^{j\omega}\right)$ je funkcija prenosa Wienerovog filtra.

Sada je jednostavno dobiti funkciju prenosa filtra kao:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{S_{xz}\left(e^{j\omega}\right)}{S_{zz}\left(e^{j\omega}\right)}. \tag{13}$$

Pri praktičnoj realizaciji jednačine (13) umjesto Furijeove transformacije diskretnih signala koristi se diskretna Furijeova transformacija.

Rad na računaru

TOEPLITZ Formira Toeplitzovu matricu na osnovu zadatog vektora

`R = toeplitz(r)` vraća simetričnu Toeplitzovu matricu određenu vektorom `r`.

XCORR Kros-korelacija dva vektora

`r = xcorr(x, y, N, 'biased');` računa kros-korelaciju vektora `x` i `y` pri čemu je N broj pomaka u kojima se kros-korelacija računa. Ako se N izostavi koristi se vrijednost za 1 manja od dužine dužeg vektora. Rezultujući vektor sadrži vrijednost kros-korelacije za pomake od –N do N. Kros-korelacija se sada može nacrtati pomoću naredbe `plot(-N:N, r)`.

WKEEP

`Y = wkeep(X,L,OPT)` izdvaja iz vektora X dio dužine L. OPT može imati vrijednosti 'c', 'l' i 'r' kojima se izdvaja centralni, lijevi ili početni dio vektora, respektivno.

Zadatak

1. Dat je signal opisan jednačinom diferencija:

$$x(n) = 0.9x(n-1) + w(n),$$

   gdje je $w(n)$ Gausov bijeli šum nulte srednje vrijednosti i varijanse $\sigma_w^2 = 0.19$. Analitičkim putem odrediti autokorelacionu funkciju signala $x(n)$.

2. Neka je signal $z(n)$ dobijen mjerenjem signala $x(n)$ u prisustvu Gausovog bijelog šuma $v(n)$ nulte srednje vrijednosti i varijanse $\sigma_v^2 = 0.5$. Dakle, $z(n) = x(n) + v(n)$. Analitičkim putem odrediti autokorelacionu funkciju signala $z(n)$.

3. Napisati program u MATLAB-u koji će projektovati optimalni (Wienerov) FIR filtar zadatog reda za izdvajanje signala $x(n)$ iz signala $z(n)$. Kolika se srednjekvadratna greška dobija za filtre nultog, prvog, drugog i trećeg reda?

4. Generisati 100 odmjeraka signala $x(n)$ i $z(n)$. Signal $z(n)$ propustiti kroz filtar projektovan u prethodnoj tački. Uporedo nacrtati ulazni, $z(n)$, željeni, $x(n)$, i dobijeni signal, $\hat{x}(n)$ za svaki od filtara. Signale crtati pomoću komande plot, označavajući tačke i povezujući ih pravolinijskim segmentima. Obratiti pažnju na indekse nizova.

Uklanjanje šuma iz audio signala pomoću Wienerovog filtra

1. U priloženom fajlu a01.wav nalazi se snimljen glas a. Pošto je uzorak signala dugačak, izdvojite samo 8001 odmjerak ovog signala. Uklonite jednosmjernu komponentu signala i normalizujte snagu signala na jediničnu.

2. Signal ćemo narušiti obojenim šumom generisanim tako što se kroz FIR filtar sa koeficijentima $h_1(n) = \frac{1}{256}\{-16; -19; -22; -24; -25; 230; -25; -24; -22; -19; -16\}$ propusti Gausov bijeli šum nulte srednje vrijednosti i varijanse 1. Broj generisanih odmjeraka bijelog šuma treba da bude veći od 8001 bar za dvostruku dužinu impulsnog odziva filtra, da bi se izbjegli prelazni procesi prilikom generisanja obojenog šuma. Nakon toga, obojeni šum možete generisati pomoću funkcije `conv`. Konačno, prelazne procese na početku i na kraju odziva filtra možete izbjeći uzimanjem centralnog dijela odziva dužine 8001 odmjerak pomoću funkcije `wkeep`.
3. Generisati narušeni signal dodavanjem 10 puta pojačanog obojenog šuma signalu iz tačke 1. Poslušati dobijeni signal.
4. Projektovati Wienerov FIR filtar dužine 80 za uklanjanje šuma. Autokorelacione i kroskorelacione funkcije estimirajte pomoću funkcije `xcorr`. U ovom slučaju je moguće izvršiti ovu estimaciju zato što je uzorak signala približno stacionaran. Inače, potrebno je voditi računa o tome da je govorni signal kvazistacionaran i da vrijednosti korelacija za velike pomake mogu biti netačne. Odredite koeficijente Wienerovog filtra rješavanjem Wiener-Hopfove jednačine. Nacrtati impulsni odziv dobijenog filtra.
5. Filtrirati narušeni signal dobijenim filtrom. Poslušati dobijeni signal.
6. Projektovati Wienerov filtar u frekvencijskom domenu, korištenjem procjena spektralnih gustina snage na osnovu autokorelacionih i kroskorelacionih funkcija određenih u prethodnoj vježbi. Filtrirati narušeni signal u frekvencijskom domenu. Poslušati dobijeni signal. Komentarisati rezultate u odnosu na tačku 5.
7. Odrediti impulsni odziv filtra iz tačke 6 i nacrtati ga. Komentarisati.

8. Ponoviti zadatak ako su koeficijenti FIR filtra kojim se generiše šum $h_1(n) = \frac{1}{256}\{16;\ 19;\ 22;\ 24;\ 25;\ 26;\ 25;\ 24;\ 22;\ 19;\ 16\}$. Objasniti razlike u rezultatima.