

## Vježba 4. Diskretni signali i sistemi

### Priprema

#### Predstavljanje diskretnih signala u MATLAB-u

Osnovni signali koji se često koriste u digitalnoj obradi signala su jedinični impuls, eksponencijalne funkcije, sinusne funkcije i njihova generalizacija na kompleksne eksponencijalne funkcije. Budući da je digitalni signal sekvenca (niz) brojeva, a osnovna struktura podataka u MATLAB-u je matrica dimenzija  $M \times N$  onda je predstavljanje signala u MATLAB-u očigledno – pomoću matrica dimenzija  $1 \times N$  (vrsta-vektor) ili  $M \times 1$  (kolona-vektor) čiji su elementi odmjerci signala sa kojim radimo.

Kada se radi sa signalima u MATLAB-u važno je voditi računa o dva pitanja. Prvo je da su svi signali u MATLAB-u konačnog trajanja što se razlikuje od analitičkog rješavanja problema kada je signal beskonačnog trajanja moguće predstaviti matematičkim izrazom. Drugo pitanje se odnosi na korespondenciju vrijednosti indeksa vektora u kojem se nalazi signal i indeksa vremena. U MATLAB-u vrijednosti indeksa nizova počinju od 1. Dakle, indeksi elemenata vektora sa  $N$  elemenata su 1, 2, ...,  $N$ . Sa druge strane, signali se često posmatraju u vremenskom intervalu koji počinje u nuli tako da indeks vremena uzima vrijednosti od 0 do  $N-1$ . Moguće je čak i da posmatranje signala počne u bilo kojem proizvoljnom vremenskom trenutku kojem može odgovarati čak i negativan vremenski indeks, npr.  $-N$ . Nažalost, informaciju o vremenskom intervalu, tj. vremenskim indeksima u kojima su definisani odmjerci signala ne možemo pridružiti vektoru u kojem se nalazi signal već se o ova informacija mora čuvati odvojeno od signala i koristiti kada je to potrebno. Obično ovo pitanje nije od značaja sve dok se ne dođe do grafičke reprezentacije signala. U ovom slučaju potrebno je apscisu označiti na adekvatan način. Prilikom generisanja signala dobro je nastojati da se iskoriste MATLAB-ove mogućnosti za rad sa vektorima kako bi se izbjegle spore `for` petlje. Na primjer, da bi se generisao vektor sa odmjercima sinusnog signala najbolje je primijeniti `sin` funkciju na vektor u kojem se nalaze odmjerci vremena.

#### Primjeri generisanja signala

Najjednostavniji signal je (pomjereni) jedinični impuls:

$$\delta(n - n_0) = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

Da biste generisali impuls u MATLAB-u morate odlučiti koliki dio signala je od interesa. Pretpostavimo da želimo da posmatramo signal na intervalu od 0 do  $L-1$ . Ako je  $L=32$  onda impuls generišemo sledećim kodom u MATLAB-u:

```
L = 32;
nn = 0:(L - 1);
imp = zeros(L, 1);
imp(1) = 1;
```

U ovom slučaju se pogodno može iskoristiti i vektorski operator poređenja:

```
L = 32;
nn = 0:(L - 1);
imp = (nn == 0);
```

Signal crtamo sa:

```
stem(nn, imp);
```

Prvi argument se koristi da bi se dobila korektno označena apscisa. Predefinisano označavanje apscise možete dobiti sa `stem(x)`. U elementu `x(1)` će biti vrijednost impulsne funkcije u nuli.

Drugi osnovni signal je sinusni. Ovaj signal je u potpunosti specificiran pomoću tri parametra: amplitude ( $A$ ), frekvencije ( $\omega_0$ ) i početne faze ( $\phi$ ):

$$x(n) = A \cos(\omega_0 n + \phi).$$

Sledećim kodom u MATLAB-u se generiše 31 odmjeraka diskretne sinusoide:

```
nn = 0:30; % vektor vremenskih indeksa
x = sin(nn/2 + 1); % odmjeraci signala su u vektoru x
Vrijednost x(1) će biti vrijednost sinusoide u nuli.
```

I ovaj signal se može nacrtati naredbom:

```
stem(nn, x);
```

Osim impulsa i sinusa u digitalnoj obradi signala često se sreću i eksponencijalni signali.

Generisati signal  $x(n) = (0.9)^n$  na intervalu  $n=0, \dots, 20$ . Nacrtati grafik dobijenog signala.

```
nn = 0:20;
x = 0.9 .^ n;
stem(nn, x);
```

U mnogim primjenama vrlo važnu ulogu igraju i kompleksni signali. Iako su u stvarnosti signali realni, kompleksni signali se koriste kao pogodnost u prikazivanju parova realnih signala. Posebno su važni kompleksni eksponencijalni signali koji se koriste npr. u radaru, prostiranju talasa i Furijeovoj analizi.

Sledeći kod generiše kompleksni eksponencijalni signal i crta njegov realni i imaginarni dio:

```
nn = 0:25;
xx = exp(j*nn/3);
subplot(211)
stem(nn, real(xx)); % realni dio
```

```

title('Realni dio')
xlabel('Indeks (n)')
subplot(212)
title('Imaginarni dio')
xlabel('Indeks (n)')

```

U opštem slučaju kompleksni eksponencijalni signal je dat *fazorskom notacijom*, oblika:

$$x(n) = Gz_0^n = Ae^{j\phi} r^n e^{j\theta n} = Ar^n e^{j(\theta n + \phi)} = Ar^n [\cos(\theta n + \phi) + j \sin(\theta n + \phi)],$$

gdje je  $G = Ae^{j\phi} = A\angle\phi$  kompleksna amplituda kompleksnog eksponencijalnog signala, a  $z_0 = re^{j\theta} = r\angle\theta$ .

Često diskretni signali nastaju odmjeravanjem kontinualnih signala, kao što je npr. sinusni signal. U opštem slučaju kontinualna sinusoida je data sledećom jednačinom:

$$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi),$$

gdje je  $A$  amplituda,  $f_0$  frekvencija u Hercima, a  $\phi$  početna faza signala. Ako se diskretni signal dobija odmjeravanjem signala  $s(t)$  brzinom odmjeravanja  $f_s = 1/T$  dobijamo:

$$s(n) = s(t)\Big|_{t=n\Delta t} = A \cos(2\pi f_0 \Delta t n + \phi) = A \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} n + \phi\right).$$

Poređenjem ove jednačine sa jednačinom diskretne sinusoida vidimo da je frekvencija dobijene diskretne sinusoida jednaka  $\omega_0 = 2\pi f_0 / f_s = 2\pi f_0 \Delta t$ .

## Primjer diskretnog signala - zvučni signal

Zvučni signal se u MATLAB-u predstavlja kao vektor čiji su elementi odmjeri signala. MATLAB može čitati WAV i AU muzičke fajlove korištenjem funkcija `wavread()` i `auread()`, respektivno. Npr. naredba:

```
[y, Fs, nbits] = wavread('handel.wav');
```

učitava zvučni signal u datom WAV fajlu u vektor  $y$ . U promjenljivoj  $F_s$  će se nalaziti frekvencija odmjeravanja, a u promjenljivoj  $nbits$  broj bita korišten za kodiranje signala.

Najjednostavnija naredba kojom se može reprodukovati zvuk je `sound()`. Njena sintaksa je:

```
sound(y, Fs)
```

MATLAB može i vrijednosti vektora zapisi u WAV ili AU formatu korištenjem funkcija `wavwrite()` i `auwrite()`. Npr.

```
wavwrite(y, Fs, nbits, filename)
```

upisuje u fajl `filename` elemente vektora  $y$  sa frekvencijom odmjeravanja  $F_s$  i  $nbits$  za kodiranje odmjeraka.

## Analiza i simulacija diskretnih mreža

Veza između ulaznog i izlaznog niza linearnog, vremenski nepromjenljivog sistema određena je linearnom jednačinom diferencija sa konstantnim koeficijentima. U opštem slučaju ova jednačina ima sledeći oblik:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{l=0}^M b_l x(n-l).$$

U MATLAB-u jednačina diferencija se može predstaviti korištenjem dva vektora: jedan vektor sadrži koeficijente u direktnoj sprezi  $b_l$ , a drugi koeficijente u povratnoj sprezi  $a_k$ . Obično se smatra da je koeficijent  $a_0 \neq 0$  pa se može pisati:

$$y(n) = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{l=0}^M b_l x(n-l).$$

Koeficijenti jednačine diferencija su ujedno i koeficijenti funkcije prenosa sistema:

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

U MATLAB-u se koeficijenti brojnika i nazivnika funkcije prenosa predstavljaju pomoću dva niza  $b$  i  $a$ . Simulacija diskretnog sistema se sada može izvršiti pomoću funkcije `filter`, čija je sintaksa:

```
y = filter(b, a, x);
```

U ovoj funkciji  $b$  i  $a$  su brojnik i nazivnik funkcije prenosa filtra, respektivno, a u vektoru  $x$  nalazi se ulazni signal. Vrijednosti odmjeraka izlaznog signala nalaze se u vektoru  $y$ .

Za izračunavanje konvolucije nizova koristi se funkcija `conv(y, z)` čiji su parametri dva niza (diskretna signala) i koja kao rezultat vraća niz koji predstavlja konvoluciju nizova  $y$  i  $z$ . Ukoliko su u nizovima  $y$  i  $z$  koeficijenti polinoma onda ova funkcija vraća koeficijente polinoma koji se dobija množenjem polaznih polinoma.

Za određivanje frekvencijske karakteristike sistema koristi se funkcija `freqz` čija je sintaksa:

```
[h, f] = freqz(b, a, N, Fs);
```

gdje su  $b$  i  $a$  brojnik i nazivnik funkcije prenosa sistema, respektivno,  $N$  je broj tačaka u kojima se izračunava frekvencijska karakteristika, a  $Fs$  je frekvencija odmjeravanja. U vektoru  $h$  nalaze se vrijednosti frekvencijske karakteristike u frekvencijama koje se nalaze u vektoru  $f$ .

Pokušajte da iskoristite naredbu `freqz` bez izlaznih parametara, dakle samo `freqz(b, a)`. Kakav rezultat se dobija?

## Priprema

1. Dat je linearan vremenski nepromjenljiv sistem opisan jednačinom diferencija

$$y(n) - \frac{1}{2} y(n-1) = x(n).$$

Odrediti funkciju prenosa, sopstvene učestanosti i impulsni odziv ovog sistema.

2. Odrediti frekvencijski odziv sistema. Odrediti amplitudnu i faznu karakteristiku sistema.
3. Odrediti odziv sistema na kompleksne eksponencijalne sekvence:

$$\text{a. } x(n) = Ae^{j\frac{\pi}{2}n}, \quad -\infty < n < \infty,$$

$$\text{b. } x(n) = Ae^{j\pi n}, \quad -\infty < n < \infty.$$

4. Odrediti odziv sistema na ulazni signal:

$$x(n) = 10 - 5\sin\frac{\pi}{2}n + 20\cos\pi n, \quad -\infty < n < \infty.$$

## Rad u laboratoriji

1. Generisati i nacrtati sledeće diskretne signale. U svakom od slučajeva apscisa (n-osa) treba da obuhvata označeni domen i da bude adekvatno označena:

$$\text{a. } x_1(n) = 0.9\delta(n-5), \quad 1 \leq n \leq 20,$$

$$\text{b. } x_2(n) = 0.8\delta(n), \quad -15 \leq n \leq 15,$$

$$\text{c. } x_3(n) = 4.5\delta(n+7), \quad -10 \leq n \leq 0.$$

2. Generisati i nacrtati sledeće diskretne signale. U svakom od slučajeva apscisa (n-osa) treba da obuhvata označeni domen i da bude adekvatno označena.

$$\text{a. } x_1(n) = \sin\frac{\pi}{17}n, \quad -15 \leq n \leq 25$$

$$\text{b. } x_2(n) = \sin\left(3\pi n + \frac{\pi}{2}\right), \quad -10 \leq n \leq 10,$$

$$\text{c. } x_3(n) = 1.1^n \cos\left(\frac{\pi}{11}n + \frac{\pi}{4}\right), \quad 0 \leq n \leq 50.$$

3. Generisati i nacrtati diskretne signale dobijene odmeravanjem sinusnih signala frekvencija 100, 225, 350 i 475Hz, sa frekvencijom odmeravanja 8000Hz. Signale nacrtati u trajanju od 10ms. Zadatak ponoviti sa signalima frekvencija 7525, 7650, 7775 i 7900Hz. Frekvencija odmeravanja i trajanje signala ostaje isto. Šta se može zaključiti? Kako bi sinusoidalna priroda signala bila očiglednija grafike možete nacrtati i korištenjem komande `plot`.
4. Učitati zvučni signal u fajlu [handel44100.wav](#) u radni prostor MATLAB-a. Kakvom strukturom podataka je zvučni signal predstavljen u memoriji? Kolika je frekvencija odmeravanja ovog signala i sa koliko bita je kodovan svaki odmjerač signala? Kolike su dimenzije vektora u kojem su odmjerci signala i koliko memorije zauzima? Koliko je trajanje signala u sekundama? Nacrtati signal korištenjem naredbe `plot`, kao da se radi o analognom signalu. Na apscisi označiti vrijeme u sekundama.
5. Reprodukovati zvučni signal iz tačke 1. Zašto je prilikom reprodukcije zvučnog signala potrebno zadati frekvenciju odmeravanja? Šta bi se desilo ako biste koristili nižu ili višu frekvenciju odmeravanja? Pokušajte upotrebiti npr. 22050Hz ili 88200Hz. Komentarisati rezultate.
6. Vrijednosti odmjerača signala vezane su za intenzitet zvučnog signala. Na primjer, množenjem signala nekom konstantom dobija se njegovo pojačanje (ili slabljenje). Generišite novi signal koji je pojačan 10% u odnosu na signal iz tačke 1. Obratite pažnju na to da će ukoliko amplituda signala pređe vrijednost doći do

- njegovog odsijecanja. Reprodukujte dobijeni signal. Zadatak ponoviti sa signalom utišanim 50%.
7. Za diskretni sistem iz tačke 1. pripreme generisati i nacrtati impulsni odziv na intervalu  $-10 \leq n \leq 100$ .
  8. Izračunati i nacrtati amplitudnu i faznu karakteristiku ovog sistema. Odrediti vrijednosti amplitudne i fazne karakteristike na frekvencijama  $0, \pi/16, \pi/4, \pi/2, \pi$ ?
  9. Generisati i nacrtati realni i imaginarni dio odziva ovog sistema na signal  $x(n) = \sin(n\pi/2)u(n)$ . Prikazati dovoljno dugo trajanje odziva tako da prelazni režim nestane. Korištenjem rezultata iz prethodne tačke pokazati da je rezultujući signal jednak  $y(n) = \left| G(e^{j\pi/2}) \right| \sin(n\pi/2 + \phi(\pi/2))$ .

## Izveštaj

U izvještaj sa laboratorijskih vježbi uključiti MATLAB naredbe korištene za rješavanje zadataka iz svake tačke, dobijene grafike i odgovore na postavljena pitanja.