Glava 4

ANALIZA I OBRADA DISKRETNIH SIGNALA U VREMENSKOM DOMENU

Dinamički linearni diskretni sistemi opisani su jednačinama diferencija. Određivanje odziva na pobudu proizvoljnog oblika njihovim direktnim rješavanjem u domenu diskretnog vremena u opštem slučaju nije jednostavan problem. U okviru ove knjige zadržaćemo se na analizi i obradi determinističkih signala linearnim, vremenski invarijantnim (Linear Time Invariant - LTI) sistemima. LTI sistemi su opisani jednačinama diferencija sa konstantnim koeficijentima i odziv na proizvoljnu pobudu se može odrediti njihovim rješavanjem. Osim toga, vidjećemo da je LTI sistem u potpunosti moguće okarakterisati i preko njegovog odziva na jedinični impuls, koji nazivamo impulsnim odzivom. Ukoliko je poznat impulsni odziv, odziv na pobudu proizvoljnog oblika se može dobiti pomoću operacije konvolucije. Do definicije konvolucije doći ćemo predstavljajući diskretni signal preko sume pojedinačnih elemenata signala. Dalje ćemo analizirajući osobine LTI sistema vidjeti da se, osim impulsnim odzivom, LTI sistem može okarakterisati i drugim funkcijama sistema, od kojih je pri obradi signala u vremenskom domenu najznačajniji jedinični odskočni odziv, definisan kao odziv na jediničnu odskočnu sekvencu.

4.1 Impulsni odziv LTI sistema

Kod linearnih, vremenski invarijantnih sistema *impulsni odziv* $h(n)$ se definiše kao odziv na pobudu u obliku jediničnog impulsa $\delta(n)$:

$$h(n) = \mathcal{T}_{LTI}\{\delta(n)\}. \tag{4.1}$$

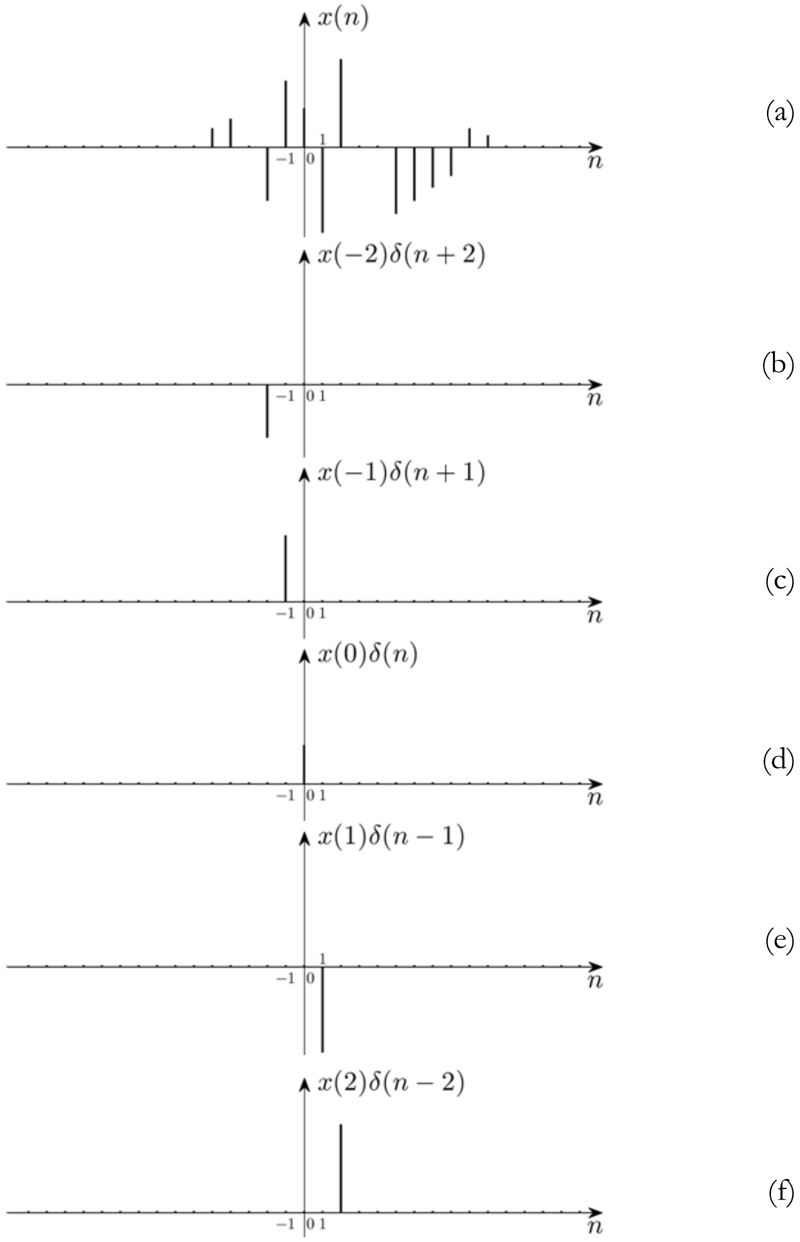
Sa $\mathcal{T}_{LTI}$ je označen operator kojim LTI sistem transformiše pobudni signal u signal odziva.

4.2 Konvolucija

Osobina da se bilo koji diskretni signal može predstaviti preko impulsa nam, zajedno sa svojstvom linearnosti i vremenske invarijantnosti, omogućava potpunu karakterizaciju LTI diskretnog sistema preko njegovog odziva na jedinični impuls. Poznavajući impulsni odziv sistema, matematičkom operacijom koja je označena kao konvolucija, moguće je odrediti odziv LTI sistema na pobudni signal proizvoljnog oblika. Da bismo došli do ovog zaključka, prvo ćemo pokazati da proizvoljan pobudni signal možemo predstaviti kao sumu vremenskih pomjerenih impulsa. Zatim ćemo, koristeći osobinu linearnosti i vremenske invarijantnosti LTI sistema, odrediti odziv na tako zapisan pobudni signal.

4.2.1 Predstavljanje signala impulsima

Posmatrajmo proizvoljan diskretni signal, kao na Slici 4.1.a. Neki od pojedinačnih elemenata ovog signala prikazani su na slikama 4.1.b-f.



Slika 4.1 Predstava diskretnog signala preko impulsa: (a) diskretni signal proizvoljnog oblika; (b-f) neki od elemenata sume (4.1): vrijednosti pomjerenih impulsa jednake su vrijednostima signala u trenucima djelovanja.

Koristeći svojstvo odabiranja jediničnog impulsa, svaki od tih elemenata se može analitički zapisati sa:

$$x(k)\delta(n-k)=\begin{cases} x(k), \; n=k \\ 0, \; n\neq k \end{cases}. \tag{4.2}$$

Sumiranjem svih elemenata signala bilo koji diskretni signal može se predstaviti preko težinske sume impulsa:

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k). \tag{4.3}$$

Jednakost (4.3) nam govori da je diskretni signal proizvoljnog oblika moguće izraziti preko težinske sume jediničnih impulsa koji su pomjereni u vremenu i čije su amplitude jednake vrijednostima signala u trenucima u kojima djeluju. Iako na prvi pogled ovakva interpretacija signala proizvoljnog oblika nema svrhu, ona je veoma korisna prilikom izvođenja izraza za konvoluciju kao metoda za određivanje odziva na proizvoljnu pobudu.

4.2.2 Konvoluciona suma

Konvoluciona suma omogućava pronalaženje odziva LTI sistema na proizvoljnu pobudu ako je poznat odziv sistema na jedinični impuls. Neka je poznat impulsni odziv $h(n)$ LTI sistema:

$$h(n)=\mathscr{T}_{LTI}\{\delta(n)\}, \tag{4.4}$$

gdje je sa $\mathscr{T}_{LTI}$ označen operator kojim LTI sistem transformiše ulazni u izlazni signal. Zbog vremenske invarijantnosti LTI sistema vrijedi da je:

$$h(n-k)=\mathscr{T}_{LTI}\{\delta(n-k)\}. \tag{4.5}$$

Znajući da proizvoljan diskretni signal možemo predstaviti kao težinsku sumu jediničnih impulsa:

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k), \tag{4.6}$$

koristeći principe linearnosti i vremenske invarijantnosti, odziv na proizvoljnu pobudu možemo odrediti na sljedeći način:

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathcal{T}_{LTI}\{x(n)\} = \mathcal{T}_{LTI}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right\} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot\mathcal{T}_{LTI}\{\delta(n-k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \end{aligned}. \tag{4.7}$$

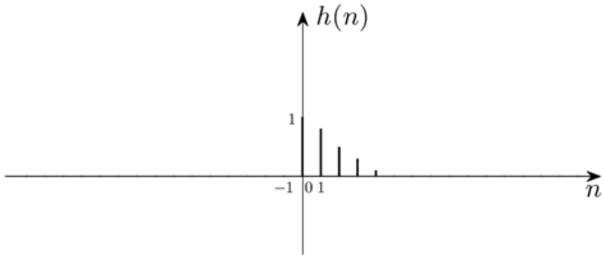
Jednakost (4.7) predstavlja opštu formu odziva LTI diskretnih sistema na proizvoljnu pobudu $x(n)$ i označena je kao *konvoluciona suma*, ili jednostavno, *konvolucija*. Postupak određivanja odziva na signal proizvoljnog oblika preko težinske sume impulsnih odziva (4.7) ilustrovan je na Slici 4.2. Amplitude pomjerenih impulsnih odziva u (4.7) jednake su vrijednostima signala u trenucima u koje su pomjereni. Na Slici 4.2 posebno su prikazani odzivi na pojedinačne impulse čije su amplitude jednake vrijednostima signala u trenucima djelovanja, a zatim odziv na kompletan signal kao zbir tih pojedinačnih odziva.

Konvolucija diskretnih signala (4.7) se simbolički označava sa:

$$y(n) = x(n) * h(n). \tag{4.8}$$

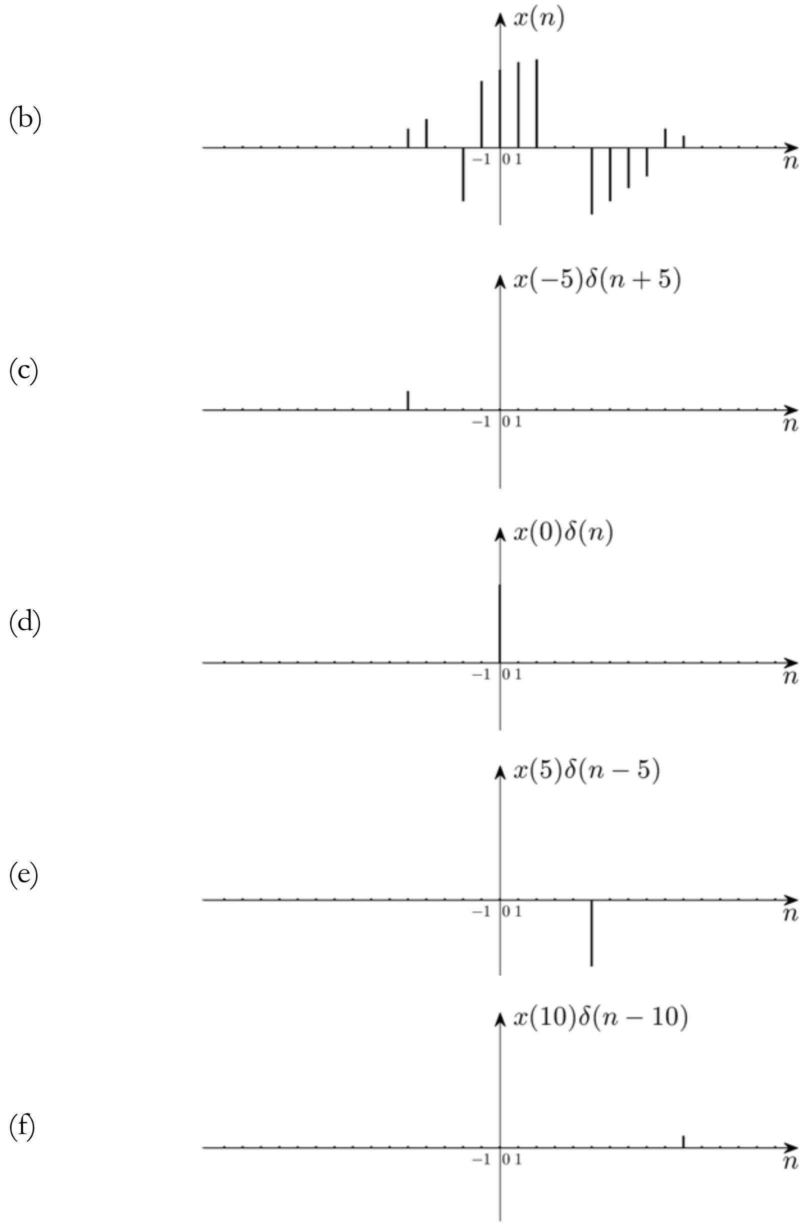
Jednostavnom smjenom varijabli, lako se pokaže da je:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k). \tag{4.9}$$

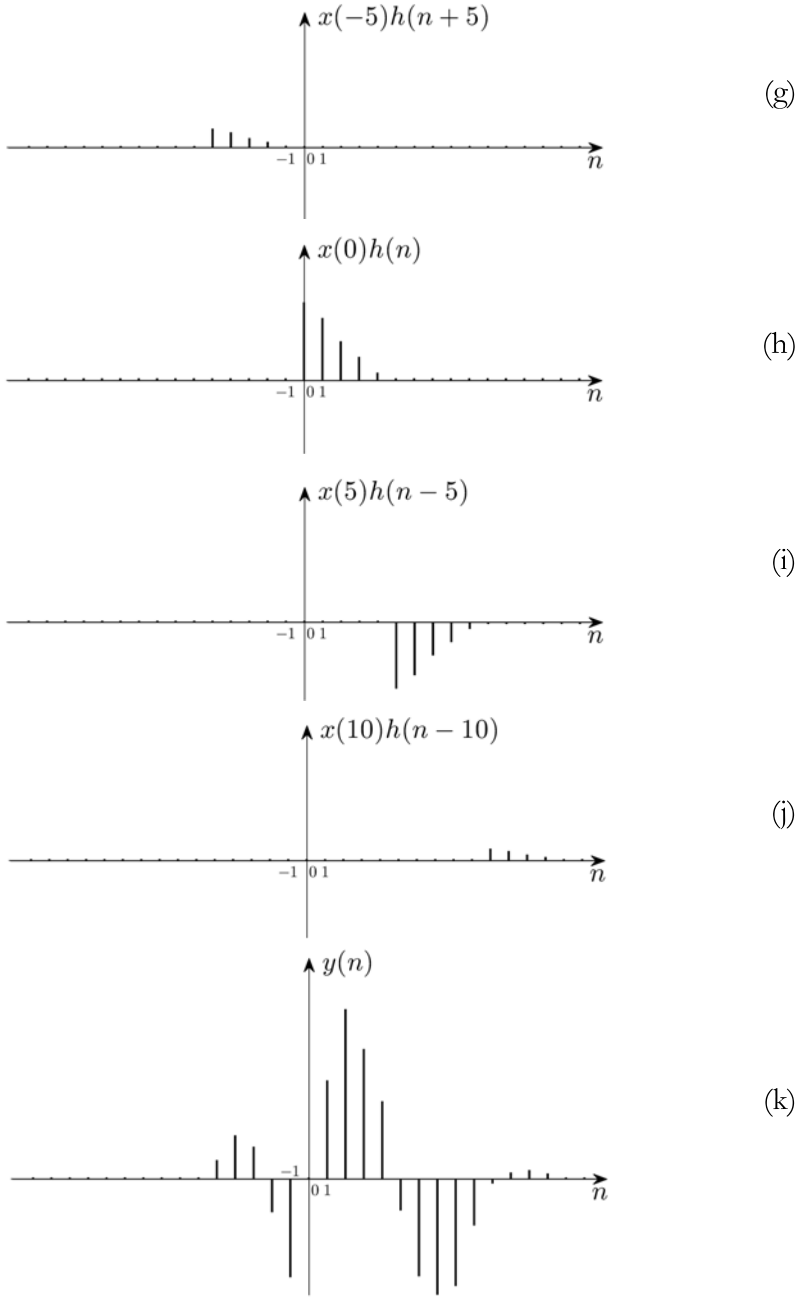


(a)

Slika 4.2 Grafička interpretacija određivanja odziva: (a) impulsni odziv $h(n)$; (nastavak na sljedećoj stranici).



Slika 4.2 (b) pobudni signal $x(n)$; (c-f) neki od pojedinačnih elemenata signala predstavljeni impulsima; (nastavak na sljedećoj stranici).



Slika 4.2 (g-j) neki od elemenata konvolucione sume – odzivi na impulse (c-f); (k) rezultat konvolucije kao zbir odziva na pojedinačne impulse.

Ako je pobudni signal jednak nuli za $n<0$, odziv će biti jednak:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}x(k)h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n}h(k)x(n-k). \tag{4.10}$$

Za kauzalne sisteme impulsni odziv je jednak nuli za $n<0$, te konvoluciona suma poprima sljedeći oblik:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)x(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)h(n-k). \tag{4.11}$$

Ukoliko je kod kauzalnih sistema i pobudni signal jednak nuli za $n<0$, odziv je dat sa:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n}h(k)x(n-k)=\sum_{k=0}^{n}x(k)h(n-k). \tag{4.12}$$

U praksi su od posebnog značaja kauzalni diskretni sistemi kod kojih je impulsni odziv konačnog trajanja, npr. N elemenata. Odziv takvih sistema je dat sa:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)x(n-k). \tag{4.13}$$

Ukoliko su oba signala čiju konvoluciju tražimo konačnog trajanja, jedan sa N a drugi sa M elemenata, rezultat konvolucije je sekvenca od $N+M-1$ elemenata.

Osobine komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti konvolucije slijede direktno iz njene definicije. Na osnovu osobine komutativnosti znamo da ulazni signal i impulsni odziv mogu zamijeniti uloge, a da se pri tome izlazni signal ne promijeni:

$$y(n)=x(n)*h(n)=h(n)*x(n). \tag{4.14}$$

Pretpostavimo da poznajemo impulsne odzive $h_1(n)$ i $h_2(n)$ dva diskretna LTI sistema. Odzivi tih sistema su: $y_1(n)=x_1(n)*h_1(n)$ i $y_2(n)=x_2(n)*h_2(n)$. Ako je izlaz prvog sistema istovremeno ulaz u drugi sistem $y_1(n)=x_2(n)$, tada se radi o njihovoj kaskadnoj vezi, kod koje ulaz u prvi sistem jednak ulazu u cijeli sistem $x_1(n)=x(n)$, a izlaz iz cijelog sistema jednak izlazu iz drugog sistema $y(n)=y_2(n)$:

$$y(n)=y_2(n)=x_2(n)*h_2(n)=y_1(n)*h_2(n)=\left[x_1(n)*h_1(n)\right]*h_2(n). \tag{4.15}$$

Osobina asocijativnosti konvolucije nam omogućava promjenu redoslijeda operacija:

$$y(n)=\left[x(n)*h_1(n)\right]*h_2(n)=x(n)*\left[h_1(n)*h_2(n)\right]. \tag{4.16}$$

Prema tome, na osnovu osobine asocijativnosti konvolucije, impulsni odziv kaskadne veze dva LTI sistema sa impulsnim odzivima $h_1(n)$ i $h_2(n)$, prikazane na Slici 4.3, je jednak konvoluciji njihovih impulsnih odziva:

$$h(n)=h_1(n)*h_2(n). \tag{4.17}$$

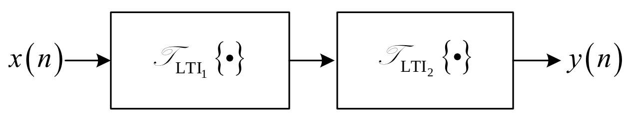
Posmatrajmo sada paralelnu vezu dva LTI sistema sa impulsnim odzivima $h_1(n)$ i $h_2(n)$, prikazanu na Slici 4.4. Kod paralelne veze se isti pobudni signal istovremeno dovodi na ulaz oba sistema $x_1(n)=x_2(n)=x(n)$, dok je izlaz cijelog sistema jednak zbiru izlaza pojedinačnih sistema $y(n)=y_1(n)+y_2(n)$. Slijedi da je odziv paralelne veze jednak:

$$y(n)=y_1(n)+y_2(n)=x_1(n)*h_1(n)+x_2(n)*h_2(n). \tag{4.18}$$

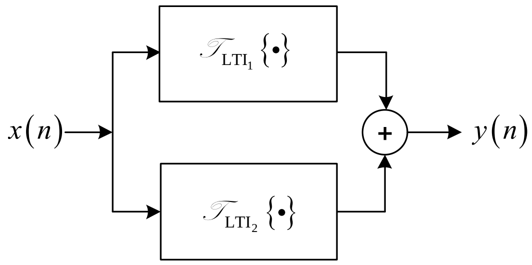
Konačno, kao posljedica osobine distributivnosti, impulsni odziv paralelne veze dva LTI sistema jednak zbiru impulsnih odziva pojedinačnih sistema:

$$y(n)=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)=x(n)*\left[h_1(n)+h_2(n)\right], \tag{4.19}$$

$$h(n)=h_1(n)+h_2(n). \tag{4.20}$$



Slika 4.3 Blok šema kaskadne veza dva diskretna LTI sistema.



Slika 4.4 Blok šema paralelne veze dva diskretna LTI sistema.

4.2.3 Grafičko rješavanje konvolucije

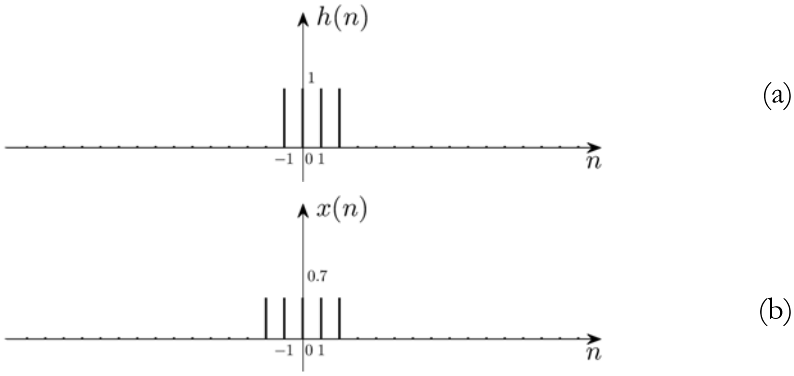
Posmatrajmo konvolucionu sumu

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k). \tag{4.21}$$

Kako bismo grafičkim putem odredili rezultat konvolucije za neku specifičnu vrijednost varijable n, prvo iz signala $h(k)$, koji je funkcija nezavisne varijable k, generišimo signal $h(n-k)$, tako što ćemo uraditi refleksiju signala $h(k)$ oko ishodišta i pomjeriti ga udesno za n ako je $n>0$, ili ulijevo za $|n|$ ako je $n<0$. Elemente konvolucione sume dobijemo množenjem $x(k)$ sa $h(n-k)$ za različite vrijednosti n. Za jednu specifičnu vrijednost nezavisne varijable n rezultat konvolucije se dobije sumirajući elemente proizvoda $x(k)h(n-k)$ u granicama od $-\infty$ do ∞. Možemo zamisliti kao da signal $h(n-k)$ "klizi" po k osi i pri tome pratimo koliko je njegovo preklapanje sa $x(k)$. Postupak je potrebno ponoviti za svaku vrijednost nezavisne varijable n, odnosno za svaki trenutak diskretnog vremena u kom želimo da odredimo signal odziva. Postupak grafičkog rješavanja konvolucije detaljno je proveden u Primjer 4.1 i Primjeru 4.2, a zatim je dato još nekoliko primjera konvolucije karakterističnih signala.

Primjer 4.1:

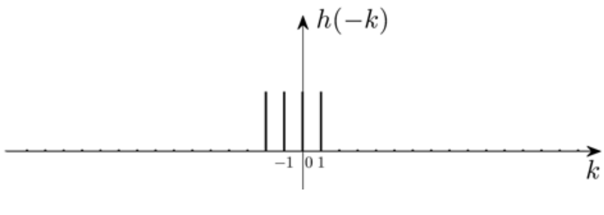
Grafičkim putem odrediti odziv LTI sistema čiji je impulsni odziva dat na Slici 4.5.a, a pobuda na Slici 4.5.b.



Slika 4.5 (a) Impulsni odziv LTI sistema i (b) pobuda.

Rješenje:

Odziv LTI sistema je dat konvolucijom impulsnog odziva i pobudnog signala. Prilikom grafičkog rješavanja konvolucije, posmatraju se oba signala na k osi. Uradi se refleksija jednog od signala, npr. impulsnog odziva, Slika 4.6. Reflektovani impulsni odziv se pomjeri dovoljno ulijevo, tako da nema preklapanja sa pobudnim signalom. Zatim se za svaku pojedinačnu vrijednost n reflektovani impulsni odziv pomijera udesno po k osi za iznos n , sve dok postoji preklapanja sa pobudnim signalom. Sumiraju se vrijednosti elemenata proizvoda $x(k)h(n-k)$ kako bi se dobila vrijednost odziva u trenutku n, kao što je ilustrovano na Slici 4.7. Impulsni odziv ima $N=4$ elementa, pobudni sinal $M=5$ elemenata, a izlazna sekvenca $N+M-1=8$ elemenata.



Slika 4.6 Reflektovan impulsni odziv prikazan na k osi.

(a)

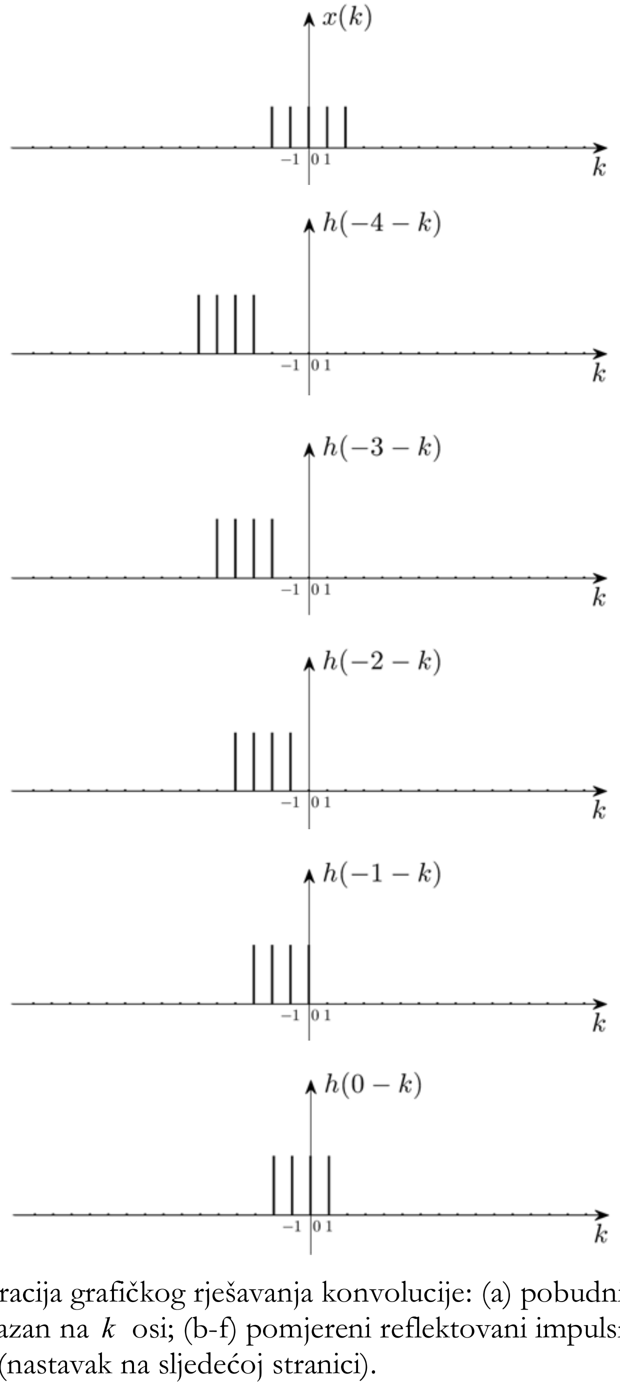
(b)

(c)

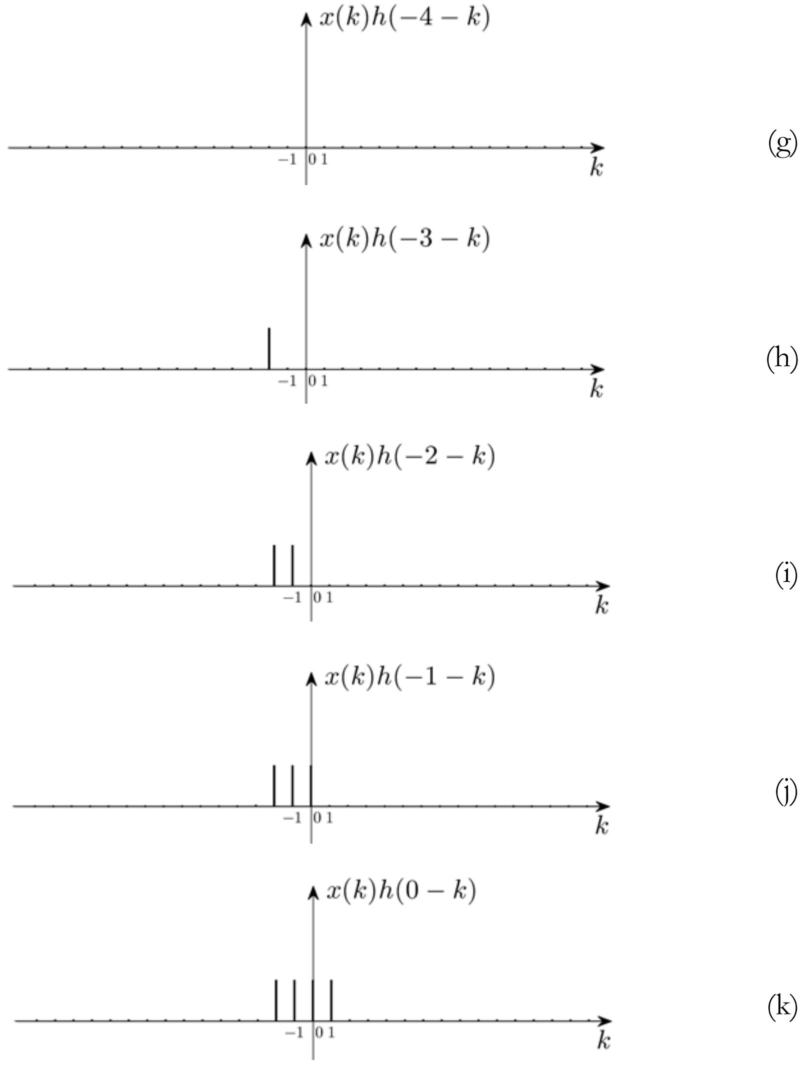
(d)

(e)

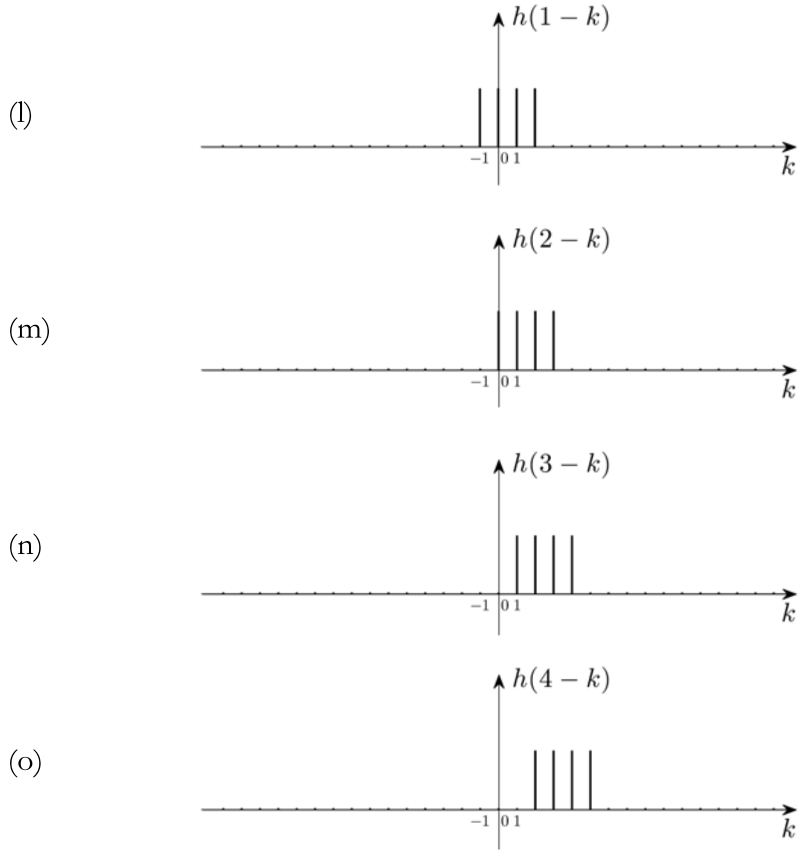
(f)



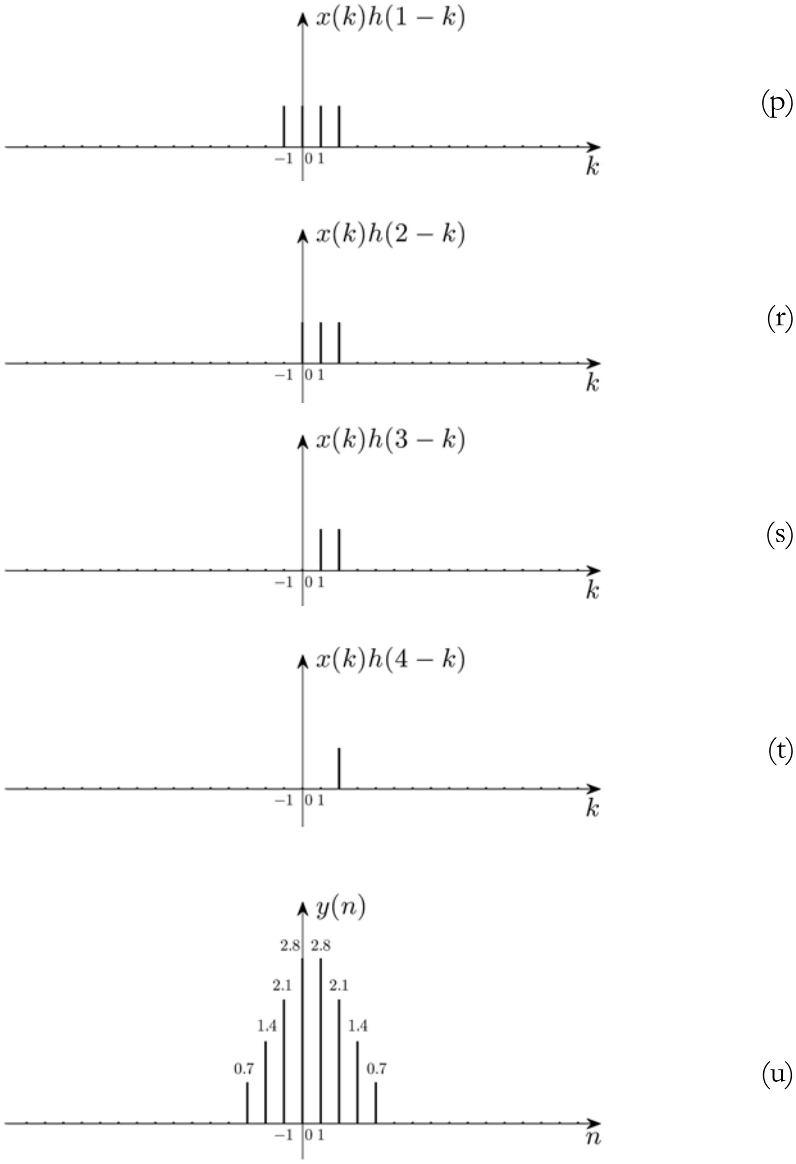
Slika 4.7 Ilustracija grafičkog rješavanja konvolucije: (a) pobudni signal prikazan na k osi; (b-f) pomjereni reflektovani impulsni odzivi na k osi; (nastavak na sljedećoj stranici).



Slika 4.7 Ilustracija grafičkog rješavanja konvolucije: (g-k) proizvodi pobudnog signala i pomjerenih reflektovanih impulsnih odziva (b-f) na k osi; (nastavak na sljedećoj stranici).



Slika 4.7 Ilustracija grafičkog rješavanja konvolucije: (l-o) pomjereni reflektovani impulsni odzivi na k osi; (nastavak na sljedećoj stranici).



Slika 4.7 Ilustracija grafičkog rješavanja konvolucije: (p-t) proizvodi pobudnog signala i pomjerenih reflektovanih impulsnih odziva (l-o) na k osi; (u) razultat konvolucije.

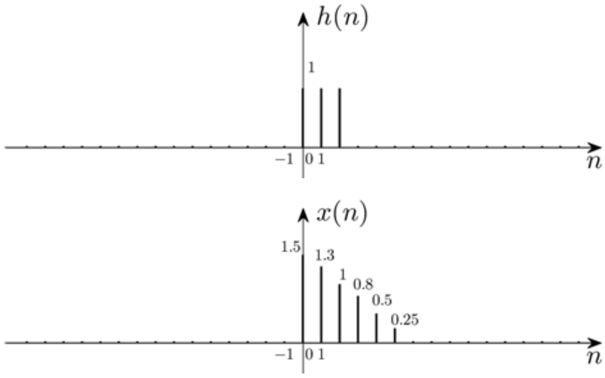
□

Primjer 4.2:

Grafičkim putem odrediti konvoluciju impulsnog odziva i pobudnog signala, koji su prikazani na Slici 4.8..

(a)

(b)



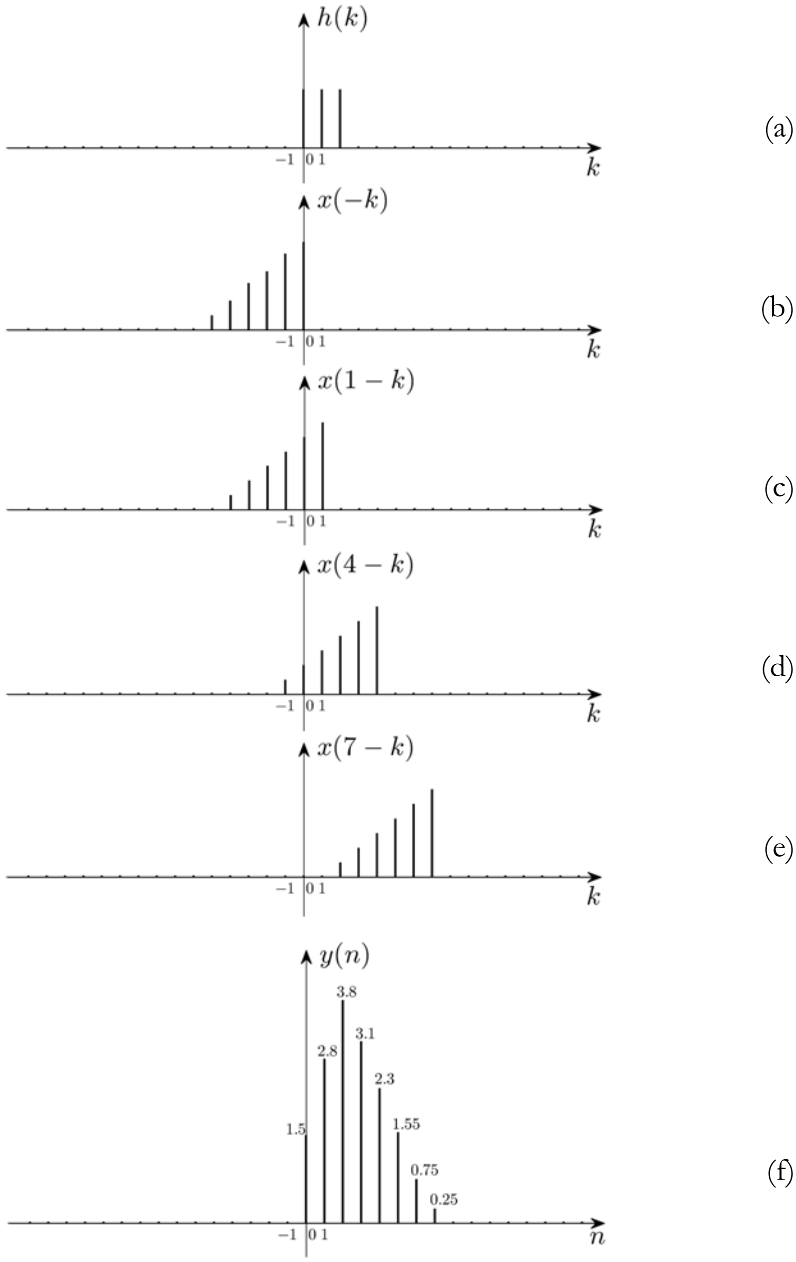
Slika 4.8 (a) Impulsni odziv i (b) pobuda.

Rješenje:

Umjesto da radimo refleksiju impulsnog odziva na osnovu izraza za konvoluciju (4.21) kao u Primjeru 4.1, koristićemo drugi oblik konvolucije:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \tag{4.22}$$

i uraditi reflekciju pobudnog signala. Reflektovani pobudni signal ćemo pomijerati udesno, svaki put za jedan vremenski interval po k osi i posmatrati preklapanje njegovih elemenata sa elementima impulsnog odziva. Budući da su elementi oba signala jednaki nuli za $n<0$, nema potrebe za pomijeranjem reflektovanog pobudnog signala ulijevo. Sumiranjem elemenata proizvoda $h(k)x(n-k)$ za pojedinačne vrijednosti n diskretnog vremena dobijamo rezultat konvolucije. Postupak je grafički ilustrovan na Slici 4.9. Prikazani samo neki slučajevi pomjerenog reflektovanog pobudnog signala, dok se računanje mora provesti za sve vrijednosti n za koje postoji preklapanje impulsnog odziva i pomjerenog reflektovanog pobudnog signala.



Slika 4.9 Grafičko rješavanje konvolucije: (a) impulsni odziv ; (b-e) pomjereni reflektovani pobudni signali; (f) rezultat konvolucije.

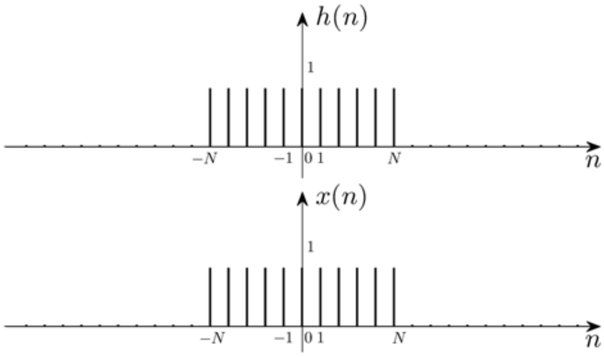
□

Primjer 4.3:

Grafičkim putem odrediti konvoluciju impulsnog odziva sa Slike 4.10(a) i pobude prikazane na Slici 4.10(b).

(a)

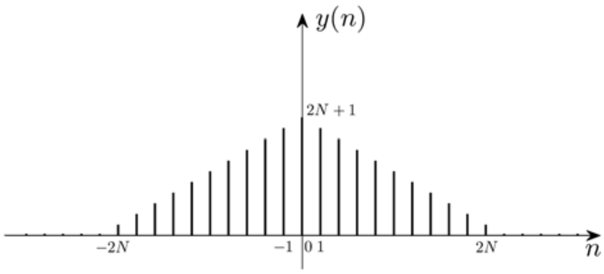
(b)



Slika 4.10 (a) Impulsni odziv i (b) pobuda.

Rješenje:

Postupak grafičkog rješavanja konvolucije ilustrovan je u primjerima 4.1 i 4.2. Nakon što se jedan od signala reflektuje, on se pomijera ulijevo dok ne prestane preklapanje sa drugim signalom. Ovo preklapanje počinje kada se prednja ivica reflektovanog signala nađe u tački $-N$, što se dešava kada se reflektovani signal pomjeri za $-2N$ uljevo, te je rezultat konvolucije jednak nuli za svako $n<-2N$. U intervalu $-2N<n<0$ vrijednosti elemenata konvolucije se povećavaju, jer se sa porastom diskretnog vremena n povećava širina intervala na kom je proizvod $h(k)x(n-k)$ različit od nule. Za $n>0$ preklapanje se postepeno smanjuje i potpuno prestaje za $n=2N$, kada rezultat konvolucije postaje jednak nuli. Rezultat konvolucije je prikazan na Slici 4.11.

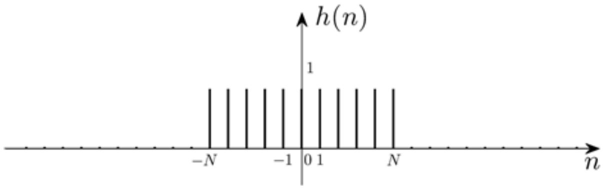


Slika 4.11 Konvolucija signala sa Slike 4.10.

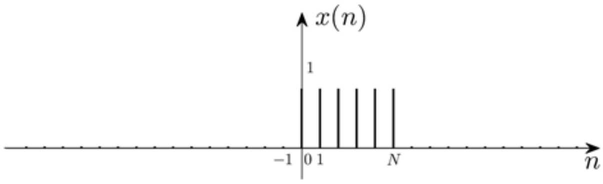
□

Primjer 4.4:

Grafičkim putem odrediti odziv LTI sistema sa impulsnim odzivom datim na Slici 4.12(a) na pobudu prikazanu na Slici 4.12(b).



(a)

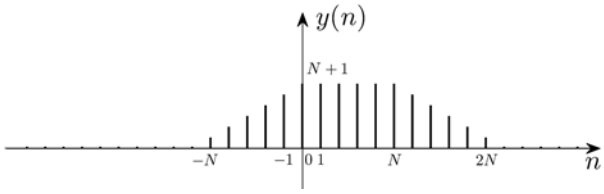


(b)

Slika 4.12 (a) Impulsni odziv LTI sistema i (b) pobuda.

Rješenje:

Odziv diskretnog LTI sistema je dat konvolucijom impulsnog odziva i pobudnog signala. Ako se rješavanju ovog zadatka pristupi tako da se reflektuje pobudni signal, nakon reflektovanja on se pomijera ulijevo u tačku $-N$, jer tada prestaje preklapanje sa impulsnim odzivom. U intervalu $-N < n < 0$ površina ispod proizvoda $h(k)x(n-k)$ raste jer se sa porastom diskretnog vremena n povećava širina intervala na kom je taj proizvod različit od nule. Međutim, u intervalu $0 < n < N$ površina ostaje konstantna jer se za svako n iz tog intrevala signal $x(n-k)$ u potpunosti preklapa sa impulsnim odzivom $h(k)$. Tek za $n > N$ preklapanje se postepeno smanjuje i potpuno prestaje za $n = 2N$. Rezultat konvolucije je prikazan na Slici 4.13. Primijetimo da je u ovom primjeru LTI sistem nekauzalan, jer njegov impulsni odziv nije jednak nuli za $n < 0$, pa se odziv pojavio prije pobude.



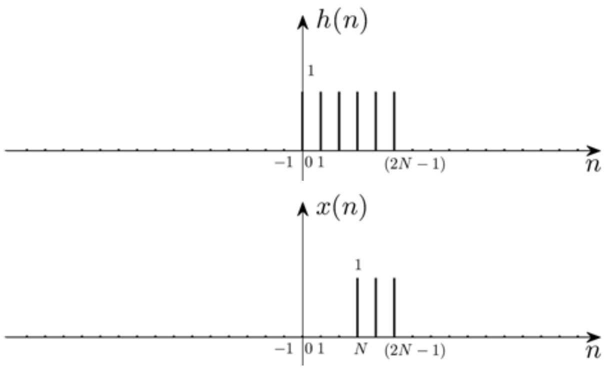
Slika 4.13 Odziv sistema sa impulsnim odzivom datim na Slici 4.12(a) na pobudu datu na Slici 4.12(b).

□

Primjer 4.5:

Impulsni odziv LTI sistema dat je na Slici 4.14(a). Odrediti odziv na pobudni signal prikazan na Slici 4.14(b).

(a)

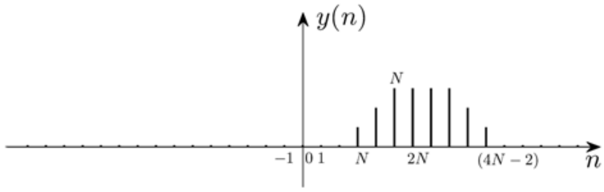


(b)

Slika 4.14 (a) Impulsni odziv kauzalnog LTI sistema i (b) kauzalna pobuda.

Rješenje:

Istim postupkom kao u prethodnim primjerima vezanim za određivanje konvolucije grafičkim putem, dobijamo signal odziva dat na Slici 4.15. Budući da je impulsni odziv LTI sistema jednak nuli za $t < 0$, tj. sistem je kauzalan, odziv počinje od trenutka pobuđivanja sistema.



Slika 4.15 Konvolucija signala sa Slike 4.14.

□

Konvolucija signala proizvoljnog oblika sa jediničnim impulsima je od posebne važnosti u analizi i obradi signala. Na osnovu definicionog izraza za konvoluciju

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) \tag{4.23}$$

za konvoluciju signala $x(n)$ proizvoljnog oblika sa pomjerenim jediničnim impulsom $\delta(n-n_0)$. dobijamo da je

$$y(n) = x(n) * \delta(n-n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-n_0-k). \tag{4.24}$$

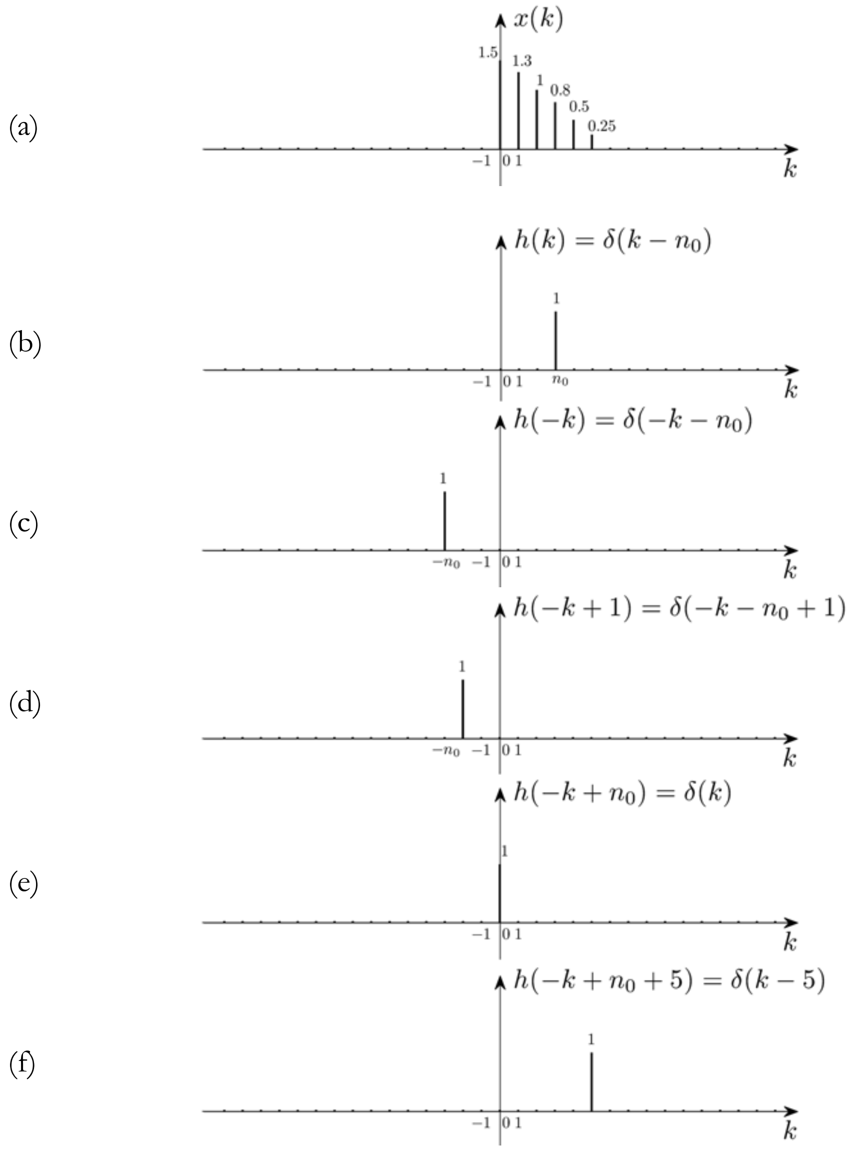
Po svojstvu odabiranja jediničnog impulsa znamo da je

$$x(k)\delta(n-n_0-k) = x(n-n_0)\delta(n-n_0-k), \tag{4.25}$$

te je konvolucija (4.24) jednaka

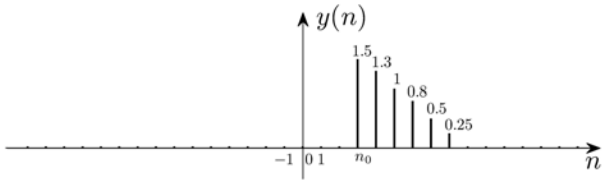
$$y(n) = x(n-n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-n_0-k). \tag{4.26}$$

Suma elemenata jediničnog impulsa od $-\infty$ do ∞ jednaka je jedinici, neovisno od toga u kom trenutke diskretnog vremena djeluje jedinični impuls. Prema tome, dobili smo da je konvolucija signala $x(n)$ proizvoljnog oblika sa jediničnim impulsom koji djeluje u trenutku n_0 jednaka je signalu $x(n)$ pomjerenom u tačku n_0:



Slika 4.16 Konvolucija signala proizvoljnog oblika i pomjerenog jediničnog impulsa: (a) signal proizvoljnog oblika i (b) impulsni odziv

prikazani na k osi; (c) reflektovan impulsni odziv; (d-f) pomjereni reflektovani impulsni odzivi; (nastavak na sljedećoj stranici).



(g)

Slika 4.16 Konvolucija signala proizvoljnog oblika i pomjerenog jediničnog impulsa: (g) rezultat konvolucije.

$$y(n) = x(n) * \delta(n - n_0) = x(n - n_0). \tag{4.27}$$

Grafičko rješavanje konvolucije proizvoljnog signala $x(n)$ sa pomjerenim jediničnim impulsom $\delta(n-n_0)$ prikazano je na Slici 4.16. Za svaku vrijednost nezavisne varijable n, proizvod $x(k)\delta(n-n_0-k)$ je, po svojstvu odabiranja jediničnog impulsa, jednak $x(n-n_0)\delta(n-n_0-k)$, dakle samo jednom elementu signala u trenutku $n-n_0$, te je to istovremeno rezultat konvolucije u trenutku n. Dakle, rezultat konvolucije u trenutku n jednak je signalu u trenutku $n-n_0$.

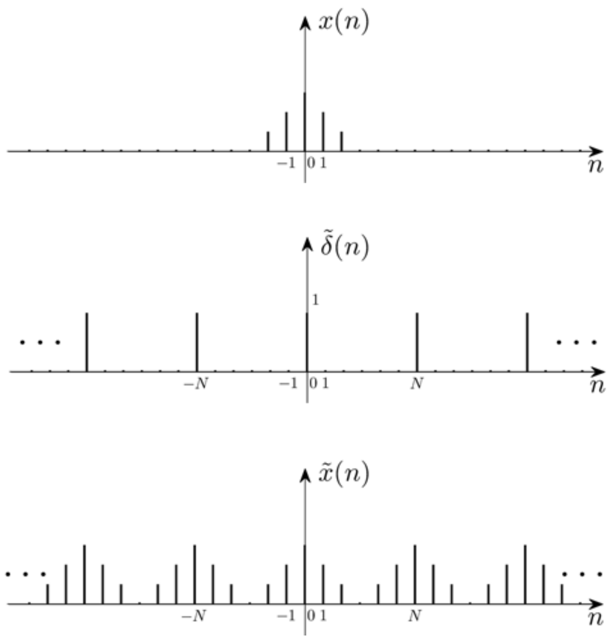
Posmatrajmo sada konvoluciju signala $x(n)$ proizvoljnog oblika sa periodično ponovljenim jediničnim impulsima $\tilde{\delta}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-mN)$, čiji je period N. Znajući da je $x(n) * \delta(n-mN) = x(n-mN)$, te da je konvolucija linearni operator, dobijamo da je

$$\begin{aligned} \tilde{x}(n) &= x(n) * \tilde{\delta}(n) = x(n) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n-mT) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) * \delta(m-mN) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-mN). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Dakle, konvolucijom signala $x(n)$ proizvoljnog oblika sa periodično ponovljenim jediničnim impulsima dobijamo njegovo periodično proširenje:

$$\tilde{x}(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(n-mN)\,. \tag{4.29}$$

Za ilustraciju je na Slici 4.17 prikazana konvolucija trougaonog impulsa sa periodično ponovljenim jediničnim impulsima. Rezultat te konvolucije su periodično ponovljeni trougaoni impulsi sa istim periodom koji ima povorka jediničnih impulsa.



Slika 4.17 Konvolucija signala sa periodično ponovljenim jediničnim impulsima: (a).signal $x(n)$, (b) povorka jediničnih impulsa; (c) rezultat konvolucije.

4.3 Jedinični odskočni odziv LTI sistema

U prethodnom izlganju pokazali smo da impulsni odziv u potpunosti karakteriše sistem. Međutim, sistem je potpuno određen i ako poznajemo *jedinični odskočni odziv*, tj. odziv na jediničnu odskočnu sekvencu $u(n)$. Koristeći konvolucionu sumu, jedinični odskočni odziv $a(n)$ se može izraziti na sljedeći način se može uspostaviti veza između jediničnog odskočnog i impulsnog odziva:

$$a(n)=h(n)*u(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)\cdot u(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n}h(k)\cdot 1=\sum_{k=-\infty}^{n}h(k). \qquad (4.30)$$

Impulsni odziv se može dobiti iz jediničnog odskočnog odziva na osnovu sljedeće relacije:

$$h(n)=a(n)-a(n-1). \qquad (4.31)$$

4.4 Osobine LTI sistema

Osnovne osobine diskretnih sistema, o kojima smo govorili u Glavi 3, sada ćemo ponovo analizirati pod uslovima linearnosti i vremenske invarijantnosti sistema. Činjenica da se odziv diskretnog LTI sistema na proizvoljnu pobudu može dobiti konvolucijom ulaznog signala $x(n)$ i impulsnog odziva $h(n)$:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)=x(n)*h(n)=h(n)*x(n), \qquad (4.32)$$

tj. da je diskretni LTI sistem u potpunosti okarakterisan svojim impulsnim odzivom $h(n)$, poslužiće nam da izvedemo zaključke o osobinama diskretnih LTI sistema.

4.4.1 LTI sistemi bez memorije

Od ranije znamo da kod sistema bez memorije izlaz u nekom trenutku zavisi od vrijednosti ulaza samo u tom trenutku. Jedini diskretni LTI sistem bez memorije je opisan sa

$$y(n) = Kx(n), \tag{4.33}$$

Prema tome, impulsni odziv LTI sistema bez memorije mora biti oblika

$$h(n) = K\delta(n). \tag{4.34}$$

Zavisno od toga da li je $K > 1$ ili $K < 1$, na izlazu sistema bez memorije signal može biti samo pojačan ili oslabljen u odnosu na ulazni signal, respektivno. Za $K = 1$ radi se o sistemu kod koga je signal na izlazu sistema jednak signalu na njegovom ulazu.

4.4.2 Invertibilnost LTI sistema

Sistem je invertibilan ako je moguće pronaći inverzni sistem koji, kad se veže kaskadno sa originalnim sistemom, formira takav složeni sistem koji daje odziv jednak ulazu u originalni sistem.

Ako sa $h_I(n)$ označimo impulsni odziv inverznog sistema sa impulsnim odzivom $h(n)$, onda je diskretni LTI sistem invertibilan ako vrijedi:

$$h(n) * h_I(n) = \delta(n). \tag{4.35}$$

Obrazložimo to na sljedeći način. Na osnovu (4.35), impulsni odziv kaskadne veze nekog sistema i njemu inverznog sistema je jedinični impuls:

$$h_K(n) = h(n) * h_I(n) = \delta(n), \tag{4.36}$$

Znamo da je konvolucija proizvoljnog signala sa jediničnim imulsom jednaka tom signalu. Prema tome, odziv kaskadne veze jednak je signalu na ulazu u kaskadnu vezu sistema, što i jeste uslov da sistemi budu inverzni.

4.4.3 Kauzalnost LTI sistema

Rekli smo da je sistem kauzalan ako odziv zavisi samo od trenutne i prošlih vrijednosti elemenata ulaznog signala. Da bi ovo bilo zadovoljeno kod LTI sistema, konvoluciona suma treba da bude oblika:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k). \tag{4.37}$$

Nakon smjene $n-k \to k$ pod sumom (4.37), konvoluciona suma poprima sljedeći oblik:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k). \tag{4.38}$$

To znači da svi elementi impulsnog odziva moraju biti jednaki nuli za $n<0$, odnosno da je diskretni LTI sistem kauzalan ako je $h(n)=0$ za $n<0$.

U slučaju odziva na kauzalnu sekvencu, odnosno sekvencu čiji su sve elementi jednaki nuli za $n<0$, konvoluciona suma poprima oblik:

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)=\sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k), \tag{4.39}$$

što uz dodatni uslov da je sistem kauzalan daje sljedeće izraze za konvolucionu sumu:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k)=\sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k). \tag{4.40}$$

4.4.4 Stabilnost LTI sistema

Pojednostavljeno rečeno, sistem je stabilan ako ograničen pobudni signal proizvodi ograničen signal odziva. Pretpostavimo da na ulazu LTI sistema sa impulsnim odzivom $h(n)$ djeluje ograničena pobuda, $|x(n)| \langle B, \forall n$. Tada je:

$$\left|y(n)\right| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|h(n)\right|\left|x(n-k)\right| \leq B\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|h(k)\right|. \tag{4.41}$$

Zaključujemo da je diskretni LTI sistem stabilan ako je njegov impulsni odziv *apsolutno sumabilan*, tj.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|h(k)\right| \langle \infty. \tag{4.42}$$

Na primjer, sistem sa impulsnim odzivom $h(n) = \delta(n-n_0)$, čija je uloga samo da zakasni ulazni signal za n_0 elemenata, je stabilan jer je njegov impulsni odziv apsolutno sumabilan:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|h(k)\right| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\delta(k-n_0)\right| = 1, \tag{4.43}$$

što je bilo i za očekivati, jer je odziv ovog sistema na bilo koju ograničenu pobudu jednak pomjerenoj verziji pobude, dakle ograničen.

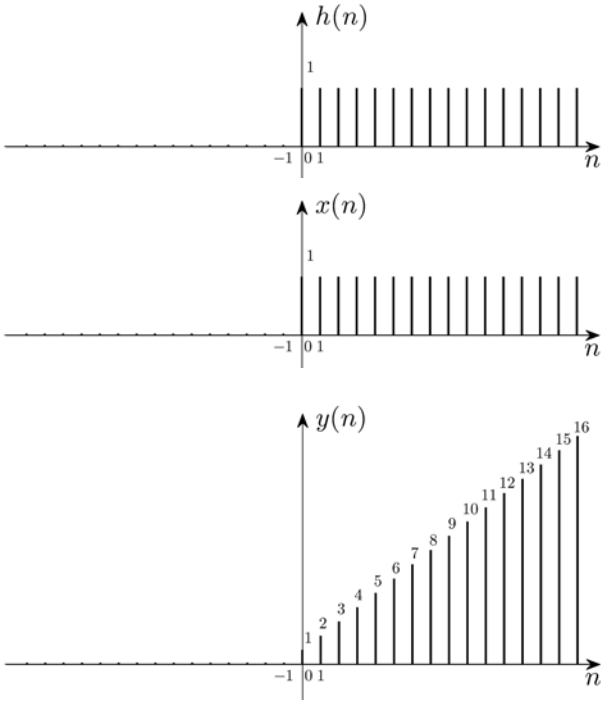
Posmatrajmo sada sistem koji nazivamo *akumulator*, sa impulsnim odzivom $h(n) = u(n)$. Provjeravajući da li je impulsni odziv ovog sistema apsolutno sumabilan:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|h(k)\right| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|u(k)\right| = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) = \infty, \tag{4.44}$$

zaključujemo da je sistem nestabilan. Na primjer, ako bi na ulaz ovog sistema doveli Hevisajdovu sekvencu $x(n) = u(n)$, izlazni signal bi neograničeno rastao:

$$y(n) = u(n) * u(n) = r(n). \tag{4.45}$$

Na Slici 4.18 prikazan je odziv nestabilnog sistema, čiji je impulsni odziv jednak Hevisajdovoj sekvenci, na ograničenu pobudu u vidu Hevisajdove sekvence. Evidentno je da odziv ovog sistema na ograničenu pobudu neograničeno raste u toku vremena.



Slika 4.18 Odziv nestabilnog sistema na ograničenu pobudu: (a) impulsni odziv sistema; (b) pobudni signal koji je ograničen; (c) odziv koji neograničeno raste.

4.5 Opis LTI sistema jednačinama diferencija

Prilikom opisa sistema uspostavljaju se relacije između parametara i varijabli relevantnih za ponašanje sistema, kao i relacije koje povezuju ulazne i izlazne signale. Ove relacije određuju se na osnovu prirodnih zakona ili eksperimentalno. Vidjeli smo da su kod LTI sistema ulazni i izlazni signali vezani konvolucionom sumom, pri čemu je neophodno poznavati impulsni odziv sistema. Osim konvolucionom sumom, relacije između ulaznih i izlaznih signala u sistemu se mogu opisati jednačinama diferencija. U daljem razmatranju ćemo se ograničiti LTI sisteme kod kojih signali zavise samo od jedne nezavisne varijable (diskretnog vremena). Takve sisteme opisujemo jednačinama diferencija sa konstantnim koeficijentima. Kod LTI sistema bez memorije jednačine diferencija se svode na algebarske, jer je kod ovih sistema $y(n)=Kx(n)$.

4.5.1 Jednačine stanja

Fizičke veličine koje je neophodno poznavati kako bismo u potpunosti opisali sistem nazivamo *varijable stanja*. Neka je za opis ponašanja nekog sistema dovoljno poznavanje N varijabli stanja. Sve ostale veličine u sistemu, izuzev ulaznih signala, označavamo kao *zavisne varijable*. U opštem slučaju, sistem može da bude pobuđen sa M ulaznih signala (*ulaznih varijabli*) i da ima L izlaznih signala, odnosno *izlaznih varijabli*. Zbog toga je pogodno sve varijable sistema zapisati u vektorskom obliku. Vektor varijabli stanja $\left[x_1(n),x_2(n),\ldots,x_N(n)\right]^T$ ćemo označiti kao vektor stanja $\mathbf{x}(n)$. Vektore ulaznih $\left[e_1(n),e_2(n),\ldots,e_M(n)\right]^T$ i izlaznih signala $\left[y_1(n),y_2(n),\ldots,y_L(n)\right]^T$ ćemo označiti sa $\mathbf{e}(n)$ i $\mathbf{y}(n)$, respektivno. Svaki od elemenata ovih vekora je funkcija vremena kao nezavisne varijable. Sufiks T označava operaciju transponovanja. Relacije koje povezuju varijable stanja i ulazne varijable opisuju se skupom simultanih jednačina diferencija prvog reda, koje se označavaju kao sistem *jednačina stanja*.

Koristeći sistem jednačina stanja, vrijednosti varijabli stanja LTI sistema u trenutku $n+1$ se mogu iskazati na osnovu vrijednosti varijabli stanja i ulaznih varijabli u trenutku n. U matričnoj formi sistem jednačina stanja u domenu diskretnog vremena ima oblik:

$$\mathbf{x}(n+1)=\mathbf{A}\mathbf{x}(n)+\mathbf{B}\mathbf{e}(n), \tag{4.46}$$

pri čemu je $\mathbf{x}(n+1)$ vektor varijabli stanja u trenutku $n+1$, $\mathbf{x}(n)$ vektor varijabli stanja u trenutku n, $\mathbf{e}(n)$ vektor ulaznih signala u trenutku n, matrica $\mathbf{A}$ je kvadratna matrica stanja dimenzija $N\times N$ i matrica $\mathbf{B}$ je pravougaona matrica koeficijenata uz ulazne signale dimenzija $N\times M$.

Poznavajući varijable stanja, izlazne varijable sistema se mogu odrediti iz matrične jednačine:

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{Cx}(n) + \mathbf{De}(n), \tag{4.47}$$

gdje su $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ matrice koje povezuju izlazne varijable sa varijablama stanja i ulaznim varijablama. Elementi matrica $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ zavise od parametara i topologije sistema. Kod vremenski invarijantnih sistema elementi ovih matrica se ne mijenjaju u toku vremena, dok se kod sistema čiji se parametri mijenjaju u toku vremena mijenjaju i elementi ovih matrica. Ako je neki od elemenata ovih matrica funkcija ulaznog ili izlaznog signala, takve sisteme nazivamo *nelinearnim sistemima.*

4.5.2 Opis LTI sistema jednačinama diferencija višeg reda

Pri analizi i obradi signala vrlo često se posmatra jedan izlazni signal kao odziv na jedan pobudni signal. Ukoliko u LTI sistemu postoji više pobudnih signala, tada se koristi princip superpozicije. U takvim slučajevima se, umjesto jednačinama stanja, LTI sistemi opisuju jednom jednačinom diferencija višeg reda. Gledano matematički, sistem od N simultanih jednačina diferencija (4.47) prvog reda svodimo na jednu jednačinu diferencija N-tog reda, čiji je opšti oblik dat sa:

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \cdots + a_N y(n-N) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_M x(n-M), \tag{4.48}$$

ili u sažetom obliku:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k), \tag{4.49}$$

gdje je sa $x(n)$ označen ulazni, a sa $y(n)$ izlazni signal.

Kod LTI sistema svi koeficijenti a_k i b_k imaju konstantne vrijednosti. Ako neki od ovih koeficijenata zavisi od vremena, onda se ponašanje sistema u toku vremena mijenja. Kod vremenski zavisnih sistema oblik odziva ne zavisi samo od oblika, već i od trenutka dovođenja pobude. Jednačine diferencija kod kojih je bar jedan od koeficijenata funkcija ulaznog ili izlaznog signala opisuju nelinearne sisteme.

Jednačina diferencija (4.49) je nehomogena jer je njena desna strana različita od nule. U opštem slučaju, desna strana jednačine diferencija je funkcija pobude koja sadrži trenutnu vrijednost ulaznog signala $x(n)$ i njegove prethodne vrijednosti $x(n-k),\ k=1,2,\dots,M$. Ako bi se sa desne strane jednačine diferencija pojavile buduće vrijednosti pobudnog signala $x(n+k),\ k>0$, tj. elementi ulazne sekvence čiji je indeks veći od n, tada bi sistem koji opusuje takva jednačina diferencija bio nekauzalan.

Ako su svi koeficijenti osim a_0 i b_0 jednaki nuli, jednačina diferencija (4.49) svodi na algebarsku jednačinu:

$$y(n)=\frac{b_0}{a_0}x(n)=Kx(n). \tag{4.50}$$

Tada se radi o LTI sistemima bez memorije kod kojih je određivanje odziva veoma jednostavno. Za razliku od sistema bez memorije, realne kauzalne LTI sisteme sa memorijom analiziramo u konačnom vremenskom intervalu, koji je ograničen početnim trenutkom n_0 kada počinje pobuda i nekim trenutkom $n>n_0$, u kom određujemo vrijednost odziva.

Bez gubljenja opštosti može se usvojiti da je $a_0=1$.

Za sisteme opisane jednačinama diferencija kod kojih je bar jedan koeficijent $a_k \neq 0$ kažemo da su *rekurzivni*, jer izlazni signal:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)-\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) \tag{4.51}$$

zavisi ne samo od trenutnog i prethodnih stanja na ulazu, već i od prethodnih stanja na izlazu. U slučaju kad izlazni signal zavisi samo od trenutnog i prethodnih stanja na ulazu, a ne i od prethodnih stanja na izlazu, kažemo da se radi o *nerekurzivnom* sistemu. Tada su svi koeficijenti $a_k=0,\ k=1,2,\dots,N$ i jednačina diferencija poprima oblik:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k). \tag{4.52}$$

Impulsni odziv ovakvih sistema je konačnog trajanja i jednak

$$h(n)=\begin{cases} b_n, & 0\le n\le M \\ 0, & inače \end{cases}. \tag{4.53}$$

Sisteme sa konačnim impulsnim odzivom označavamo koa *FIR (Finite Impulse Response) sistemi*, dok *sisteme sa neograničenim impulsnim odzivom* nazivamo *IIR (Infinite Impulse Response) sistemi*. Dok svi nerekurzivni sistemi imaju impulsni odziv konačnog trajanja, impulsni odziv nerekurzivnih sistema je ajčešće beskonačnog trajanja. Zbog toga se često izjednačavaju pojmovi sistema sa konačnim impulsnim odzivom i nerekurzivnih sistema, a sistema sa beskonačnim impulsnim odzivom i rekurzivnih sistema. Međutim, u specijalnim slučajevima rekurzivni sistemi mogu imati konačno trajanje impulsnog odziva, te izjednačavanje tih pojmova treba izbjegavati.

Ako želimo da eksplicitno iskažemo izlazni signal kao funkciju diskretnog vremena, neophodno je riješiti jednačinu diferencija koja opisuje sistem. Razmotrićemo iterativni i klasični postupak rješavanja jednačina diferencija.

4.5.3 Iterativni postupak rješavanja jednačina diferencija

Koristeći relacije 4.51 kod rekurzivnih ili 4.52 kod nerekurzivnih kauzalnih LTI sistema, iterativnim postupkom rješavanja jednačina diferencija mogu se odrediti vrijednosti izlaznog signala ako je poznata trenutna i prethodne vrijednosti pobude, kao i prethodne vrijednosti izlaznog signala. Kod nekauzalnih LTI sistema su za određivanje odziva u nekom trenutku potrebne i buduće vrijednosti ulaznog signala. Postupak se svodi na korak po korak izračunavanje vrijednosti elemenata izlaznog signala za $n=0,1,2,\ldots$ ili neke druge željene vrijednosti nezavisne varijable n. Potreban broj početnih uslova, tj. vrijednosti izlaznog signala u trenucima prije dovođenja pobude, zavisi od reda jednačine diferencija. Sam postupak ćemo pokazati na primjeru određivanja impulsnog odziva sistema na osnovu poznate jednačine diferencija.

Primjer 4.6:

Odrediti impulsni odziv kauzalnog LTI sistema opisanog jednačinom diferencija $2y(n)-y(n-1)=2x(n),\ n\ge 0$.

Rješenje:

Impulsni odziv je po definiciji odziv sistema bez akumulisane energije na jedinični impuls:

$$x(n)=\delta(n) \Rightarrow y(n)=h(n), \tag{4.54}$$

$$2h(n)-h(n-1)=2\delta(n),\ n \geq 0. \tag{4.55}$$

Jednačina diferencija je prvog reda, pa je za njeno riješavanje potrebno poznavanje jednog početnog uslova, $h(-1)$. Budući da je LTI sistem kauzalan i bez akumulisane energije, odziv ne postoji prije pobude, te je:

$$h(n)=0,\ n<0. \tag{4.56}$$

Iterativnim postupkom izračunavamo vrijednosti izlaznog signala za $n=0,1,2,\ldots$:

$n=0$:

$$2h(0)-h(-1)=2\delta(0)$$
$$2h(0)-0=2$$
$$h(0)=1$$

$n=1$:

$$2h(1)-h(0)=2\delta(1)$$
$$2h(1)-1=0$$
$$h(1)=\frac{1}{2}$$

$n=2$:

$$2h(2)-h(1)=2\delta(2)$$
$$2h(2)-\frac{1}{2}=0$$
$$h(2)=\frac{1}{4}$$
$$\vdots$$

U jednostavnijim slučajevima, kao što je ovaj, iterativnim postupkom se može odrediti i opšti oblik rješenja. U ovom primjeru, opšte rješenje je dato sa:

$$h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ n\geq 0. \tag{4.57}$$

□

4.5.4 Klasični postupak rješavanja jednačina diferencija

Rješenje jednačine diferencija se sastoji od *homogenog* dijela, koji nazivamo *sopstvenim odzivom*, i *prinudnog* odziva:

$$y(n)=y_s(n)+y_p(n). \tag{4.58}$$

Za kompletno rješavanje jednačine diferencija neophodno je poznavati i početne uslove u nekom trenutku. Prinudni odziv $y_p(n)$ je istog oblika kao pobuda i mora da zadovoljava datu jednačinu diferencija, dok sopstveni odziv $y_s(n)$ predstavlja rješenje homogene jednačine diferencija:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=0. \tag{4.59}$$

Ono je linearna kombinacija svih njenih partikularnih rješenja koja se pretpostavljaju u obliku Kz^n. Nakon zamjene pretpostavljenog rješenja u homogenu jednačinu diferencija dobijamo:

$$a_0Kz^n+a_1Kz^{n-1}+\ldots a_NKz^{n-N}=0, \tag{4.60}$$

odnosno:

$$Kz^{n-N}\left[a_0z^N+a_1z^{N-1}+\ldots+a_{N-1}z+a_N\right]=0. \tag{4.61}$$

Zanimaju nas netrivijalna rješenja, pa iz (4.58) izdvajamao *karakterističnu jednačinu sistema*:

$$a_0z^N+a_1z^{N-1}+\ldots+a_{N-1}z+a_N=0. \tag{4.62}$$

U slučaju da su svi korijeni karakteristične jednačine različiti, sopstveno rješenje ima oblik:

$$y_s(n) = K_1 z_1^n + K_2 z_2^n + \ldots + K_N z_N^n = \sum_{i=1}^{N} K_i z_i^n , \tag{4.63}$$

gdje su K_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ konstante koje zavise od početnih uslova.

U slučaju višestrukih korijena karakteristične jednačine, npr. ako je korijen z_1 reda r, tj. $z_1 = z_2 = \cdots = z_r$, pojedinačna rješenja homogene diferencijalne jednačine vezana za ovaj korijen karakteristične jednačine su oblika:

$$y_1(n) = K_1 n^{r-1} z_1^n,\ y_2(t) = K_2 n^{r-2} z_1^n, \cdots, y_{r-1}(t) = K_{r-1} n z_1^n,\ y_r(t) = K_r z_1^n . \tag{4.64}$$

Opšti oblik sopstvenog odziva je u ovom slučaju dat sa:

$$y_s(n) = \sum_{i=1}^{r} K_i n^{r-i} z_1^n + \sum_{i=r+1}^{N} K_i z_i^n . \tag{4.65}$$

Za slučaj više višestrukih korijena karakteristične jednačine, po analogiji sa (4.60), u homogeno rješenje se dodaju članovi za svaki višestruki korijen.

Sopstveni odziv postoji i kada je pobudna funkcija jednaka nuli, jer predstavlja rješenje homogene diferencijalne jednačine. Vanjska pobuda ne utiče na oblik sopstvenog odziva. Pojam "sopstveno" potiče od činjenice da njegove komponente $K_i z_i^n$ zavise samo od strukturne šeme i parametara sistema. Jedino konstante K_i zavise od pobudnog signala i zatečenog stanja, odnosno akumulisane energije u trenutku pobuđivanja sistema.

Prinudni odziv sistema je pojedinačno rješenje koje zadovoljava nehomogenu jednačinu diferencija i koje nastupa pod uticajem pobude. Prinudni odziv se određuje metodom neodređenih koeficijenata, tako što se pretpostavi rješenje u istom obliku kao eksitacija, odnosno u vidu linearne kombinacije članova koji se pojavljuju s desne strane jednačine diferencija. Pri tome su koeficijenti linearne kombinacije nepoznati i određuju se uvrštavanjem pretpostavljenog rješenja u nehomogenu jednačinu diferencija. Npr, ako je $x(n) = n^k$ patikularno rješenje se pretpostavlja u obliku $c_1 n^{k-1} + c_2 n^{k-2} + \ldots + c_k$. Ako je $x(n) = a^n$ pri čemu a nije korijen karakteristične jednačine, patikularno rješenje se pretpostavlja u obliku ca^n, a ako je a jednak jednom od korijena karakteristične jednačine, u obliku $c_1 n^{k-1} a^n + c_2 n^{k-2} a^n + c_3 n^{k-3} a^n + ... + c_k a^n$. Pri tome su $c_i,\ i = 1, 2, \ldots, k$ koeficijenti koje treba odrediti uvrštavanjem pretpostavljenog rješenja u jednačinu diferencija.

Kompletan odziv jednak je zbiru sopstvenog i prinudnog odziva. U slučaju različitih korijena karakteristične jednačine, kompletan odziv je jednak

$$y(n) = \sum_{i=1}^{N} A_i \alpha_i^n + y_p(n), \tag{4.66}$$

dok u slučaju višestrukih korijena prvi član, tj. sumu u (4.62) treba modifikovati shodno prethodnom izlaganju vezanom za oblik sopstvenog odziva.

Da bi sistem bio stabilan, odziv ne smije da neograničeno raste. Kasnije ćemo vidjeti da stabilnost LTI sistema zavisi od položaja korijena karakteristične jednačine u kompleksnoj ravni. Sistem će biti stabilan ako su korijeni takvi da prvi član u (4.62) iščezava sa porastom vremena, jer će tada kompletan odziv postati jednak prinudnom odzivu, dakle istog oblika kao pobuda. Kada sopstveni odziv potpuno iščezne uspostavlja se *ustaljeno stanje*. Zbog toga kažemo da sopstveni odziv opisuje *prelazni proces*.

U kompletnom rješenju neophodno je odrediti konstante A_i, kako bi ono bilo jednoznačno. Ove konstante se određuju na osnovu poznatih N početnih vrijednosti kompletnog odziva $y(0), y(1), ..., y(N-1)$ nakon dovođenja pobude u trenutku $n = 0$. Ako je umjesto ovih vrijednosti poznato zatečeno stanje u trenutku dovođenja pobude iskazano kroz početne uslove $y(-N), y(-N+1), ..., y(-1)$, iterativnim postupkom se odredi prvih N elemenata odziva na osnovu (4.51) ili (4.52), za $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Zatim se formira sistem od N jednačina iz kojih se određuju nepoznate konstante $K_i,\ i = 1, 2, ..., N$:

$$y(n) = \sum_{i=1}^{N} K_i z_i^n + y_p(n),\ n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{4.67}$$

Iz (4.63) se da zaključiti da konstante K_i zavise od razlika početnih vrijednosti kompletnog i prinudnog odziva u trenucima $n = 0, 1, \ldots, N-1$. U specijalnom slučaju, kada je $y(n) = y_p(n),\ n = 0, 1, \ldots, N-1$, prelaznog procesa nema jer su sve konstante K_i jednake nuli i ustaljeno stanje se uspostavlja odmah nakon dovođenja pobude. Važna su još dva specijalna slučaja. Prvi specijalan slučaj je sistem bez akumulisane energije, kada je N početnih vrijednosti odziva jednako nuli $y(-N)=y(-N+1)=...=y(-1)=0$. Tada konstante K_i i sopstveni odziv zavise samo od pobude. Drugi specijalan slučaj nepobuđen sistem. Desna strana jednačine diferencija je tada jednaka nuli, što znači da je i partikularno rješenje jednako nuli. U ovom slučaju konstante K_i i sopstveni odziv zavise samo od akumulisane energije zatečene u sistemu.

Označimo sa K_{0i} konstante koje bismo odredili pri nepobuđenom sistemu, kada sopstveni odziv zavisi samo od akumulisane energije, a sa K_{pi} konstante koje se dobiju kada je akumulisana energija jednaka nuli i sopstveni odziv zavisi samo od pobude. Po principu superpozicije vrijedi da je $K_i = K_{0i} + K_{pi}$, pa se može pisati:

$$y(n)=\left(\sum_{i=1}^{N} K_{0i} z_i^n + \sum_{i=1}^{N} K_{pi} z_i^n\right) + y_p(n). \tag{4.68}$$

Grupisanjem članova koji ne zavise od početnih uslova, (4.64) se može napisati u obliku:

$$y(n)=\sum_{i=1}^{N} K_{0i} z_i^n + \left(\sum_{i=1}^{N} K_{pi} z_i^n + y_p(n)\right) = y_a(n) + y_e(n). \tag{4.69}$$

Na ovaj način razdvojili smo odziv na akumulisanu energiju, dat prvom sumom, i odziv sistema bez akumulisane energije koji se sastoji od sopstvenog i prinudnog odziva na eksitaciju, dat u zagradi.

Oblici sopstvenog odziva

Korijeni karakteristične jednačine su u opštem slučaju kompleksni brojevi:

$$z_i = \xi_i e^{j\omega_i} = \mathrm{Re}\{z_i\} \pm j\,\mathrm{Im}\{z_i\}, \tag{4.70}$$

$$\xi_i = \sqrt{\mathrm{Re}^2\{z_i\} + \mathrm{Im}^2\{z_i\}}, \tag{4.71}$$

$$\omega_i = \arctan\frac{\mathrm{Im}\{z_i\}}{\mathrm{Re}\{z_i\}}. \tag{4.72}$$

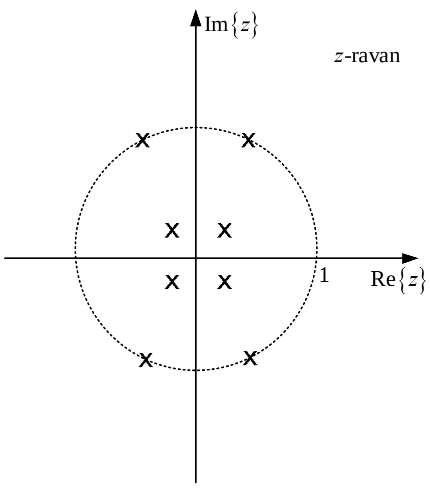
Odgovarajući članovi u sopstvenom odzivu su oblika:

$$K_i z_i^n = K_i \xi_i^n e^{j\omega_i n} = K_i \xi_i^n \cos \omega_i n + jK_i \xi_i^n \sin \omega_i n. \tag{4.73}$$

Da bi opšte rješenje za sopstveni odziv bilo realna funkcija vremena, korijeni karakteristične jednačine moraju da se pojavljuju u konjugovano kompleksnim parovima i njima odgovarajuće konstante u sopstvenom odzivu takođe moraju da budu konjugovano kompleksne. Saki par konjugovano kompleksnih korijena $z_i = \xi_i e^{j\omega_i}$ i $z_i^* = \xi_i e^{-j\omega_i}$ generiše dio homogenog rješenja u obliku:

$$\begin{aligned} K_i z_i^n + K_i^* \left(z_i^*\right)^n &= \left|K_i\right| e^{j\varphi_i} \xi_i^n e^{j\omega_i n} + \left|K_i\right| e^{-j\varphi_i} \xi_i^n e^{-j\omega_i n} = \\ &= \left|K_i\right| \xi_i^n e^{j(\omega_i n + \varphi_i)} + \left|K_i\right| \xi_i^n e^{-j(\omega_i n + \varphi_i)} \\ &= 2\left|K_i\right| \xi_i^n \cos\left(\omega_i n + \varphi_i\right), \end{aligned} \tag{4.74}$$

gdje je: $K_k = \left|K_k\right| e^{j\varphi_k}$ i $K_k^* = \left|K_k\right| e^{-j\varphi_k}$. Primjer rasporeda korijena karakteristične jednačine u kompleksnoj z ravni dat je na Slici 4.19.



Slika 4.19 Primjer rasporeda sopstvenih učestanosti u kompleksnoj z ravni.

U slučaju da je modul ξ_i nekog korijena karakteristične jednačine veći od jedan, član sopstvenog odziva $z_i^n = \xi_i^n e^{j\omega_i n} = \xi_i^n \left(\cos\omega_i n + j\sin\omega_i n\right)$ sa porastom vremenske varijable n poprima beskonačno veliku vrijednost, te je sistem nestabilan. Par jednostrukih konjugovano kompleksnih korijena karakteristične jednačine $z_i = e^{j\omega_i}$ i $z_i^* = e^{-j\omega_i}$ koje se nalaze na jediničnoj kružnici generišu u sopstvenom odzivu prostoperiodične oscilacije $\cos(\omega_i n + \varphi_i)$ sa konstantnom amplitudom. Tada se sistem nalazi na granici stabilnosti. Međutim, ako su korijeni na jediničnoj kružnici višestruki (reda $r+1$, $r \geq 1$), u sopstvenom odzivu se pojavljuju članovi oblika $n^r \cos(\omega_i n + \varphi_i)$ koji neograničeno rastu s porastom vremena, pa je sistem nestabilan.

Primjer 4.7:

Odrediti odziv kauzalnog LTI sistema opisanog jednačinom diferencija $y(n) - y(n-1) - y(n-2) = 0$ za $n \geq 1$, ako su početni uslovi $y(1) = 1$ i $y(2) = 2$.

Rješenje:

Desna strana jednačine diferencija je jednaka nuli, što znači da na ulaz sistema nije doveden ulazni signal, te je kompletan odziv sistema za $n \geq 1$ jednak odzivu na akumulisanu energiju. Odziv na akumulisanu energiju je sopstveni odziv sistema pri nultoj pobudi, a pronalazimo ga kao rješenje homogene jednačine diferencija. Pretpostavimo rješenj u obliku:

$$y(n) = y_a(n) = Kz^n . \tag{4.75}$$

Nakon uvrštavanja u zadatu jednačinu diferencija, dobijamo:

$$Kz^n - Kz^{n-1} + Kz^{n-2} = 0 , \tag{4.76}$$

$$Kz^{n-2}\left(z^2 - z + 1\right) = 0 . \tag{4.77}$$

Rješenja karakteristične jednačine:

$$z^2 - z + 1 = 0 \tag{4.78}$$

su konjugovano kompleksna:

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \tag{4.79}$$

Sopstveni odziv je oblika:

$$y(n) = K_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + K_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{4.80}$$

Izjednačimo vrijednosti izlaznog signala (4.80) za $n=1$ i $n=2$ sa zadatim početnim uslovima:

$$y(1) = K_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + K_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1, \tag{4.81}$$

$$y(2) = K_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + K_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2, \tag{4.82}$$

kako bismo odredili konstante K_1 i K_2:

$$K_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \tag{4.83}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right). \tag{4.84}$$

Konačno, odziv je za $n \geq 1$ dat sa:

$$y(n) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{4.85}$$

□

4.5.3 Određivanje impulsnog odziva iz jednačine diferencija

Prilikom određivanja impulsnog odziva kauzalnog LTI sistema opisanog jednačinom diferencija N -tog reda, za ulazni signal se uzima da je $y(x)=\delta(n)$ i posmatra se sistem bez akumulisane energije, odnosno sa početnim uslovima jednakim nuli:

$$h(-N)=h(-N+1)=...=h(-1)=0\,. \tag{4.86}$$

Jednačinu diferencija uvijek možemo dopuniti članovima sa nultim koeficijentima, tako da postignemo da je $N=M+1$:

$$h(n)+a_1h(n-1)+...+a_Nh(n-N)=b_0\delta(n)+b_1\delta(n-1)+...+b_{N-1}\delta(n-N+1)\,. \tag{4.87}$$

Prvih N elemenata impulsnog odziva dobija se iterativnim postupkom:

$$\begin{aligned} h(0)&=b_0\\ h(1)+a_1h(0)&=b_1\\ &\vdots\\ h(N-1)+a_1h(N-2)+...+a_Nh(0)&=b_{N-1} \end{aligned}$$

Za $n\geq N$ impulsni odziv predstavlja rješenje homogene jednačine diferencija:

$$h(n)+a_1h(n-1)+...+a_Nh(n-N)=0\,, \tag{4.88}$$

sa početnim uslovima $h(0)=h(1)=...=h(N-1)$ određenim prethodno iterativnim postupkom.

<u>Primjer 4.8:</u>

Odrediti impulsni odziv kauzalnog LTI sistema opisanog jednačinom diferencija $y(n)-\frac{5}{6}y(n-1)+\frac{1}{6}y(n-2)=x(n)-x(n-1)$.

Rješenje:

Prilikom određivanja impulsnog odziva, pretpostavlja se pobuda u obliku jediničnog impulsa i početni uslovi jednaki nuli:

$$x(n)=\delta(n)\Rightarrow y(n)=h(n), \tag{4.89}$$

$$h(n)=0,\ n<0. \tag{4.90}$$

Tada jednačina diferencija koja opisuje dati sistem postaje:

$$h(n)-\frac{5}{6}h(n-1)+\frac{1}{6}h(n-2)=\delta(n)-\delta(n-1). \tag{4.91}$$

Jednačina diferencija je drugog reda, te su potrebna dva početna uslova $h(-1)=0$ i $h(-2)=0$ za njeno rješavanje. Iterativnim postupkom se odrede vrijednosti prva dva elementa odziva:

$n=0$:

$$\begin{gathered} h(0)-\frac{5}{6}h(-1)+\frac{1}{6}h(-2)=\delta(0)-\delta(-1) \\ h(0)-\frac{5}{6}\cdot 0+\frac{1}{6}\cdot 0=1-0 \\ h(0)=1 \end{gathered}$$

$n=1$:

$$\begin{gathered} h(1)-\frac{5}{6}h(0)+\frac{1}{6}h(-1)=\delta(1)-\delta(0) \\ h(1)-\frac{5}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 0=0-1 \\ h(1)=-\frac{1}{6} \end{gathered}.$$

Za $n\geq 2$ jednačina diferencija postaje homogena:

$$h(n)-\frac{5}{6}h(n-1)+\frac{1}{6}h(n-2)=0, \tag{4.92}$$

te njeno rješavanje ide sljedećim tokom:

$$Kz^n - \frac{5}{6}Kz^{n-1} + \frac{1}{6}Kz^{n-2} = 0\,, \tag{4.93}$$

$$Kz^{n-2}\left(z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}\right) = 0\,, \tag{4.94}$$

$$z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{1}{2}, z_2 = \frac{1}{3}, \tag{4.95}$$

$$h(n) = K_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + K_2\left(\frac{1}{3}\right)^n. \tag{4.96}$$

Na osnovu poznatih vrijednosti impulsnog odziva za $n = 0$ i $n = 1$ određujemo konstante K_1 i K_2:

$$\left.\begin{aligned} h(0) &= K_1\left(\frac{1}{2}\right)^0 + K_2\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 \\ h(1) &= K_1\left(\frac{1}{2}\right)^1 + K_2\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}\right\} \Rightarrow K_1 = -3,\ K_2 = 4\,. \tag{4.97}$$

Impulsni odziv sistema opisanog datom jednačinom diferencija je:

$$h(n) = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4\left(\frac{1}{3}\right)^n,\ n \geq 0\,. \tag{4.98}$$

□

4.6 Odziv LTI sistema na kompleksnu eksponencijalnu pobudu

Posmatranje karakteristika sistema prilikom pobude kompleksnim eksponencijalnim signalima, tj. karakteristika sistema u frekvencijskom domenu, veoma je važno pri analizi i obradi signala. Praćenje frekvencijskih karakteristika sistema je od posebne važnosti pri filtriranju signala, jer olakšava sagledavanje koje učestanosti sadržane u signalu se pojačavaju ili slabe pri prolasku signala kroz sistem. Osim toga, široka klasa signala se može predstaviti linearnom kombinacijom elementarnih kompleksnih eksponencijalnih signala, tako da odzive na signale složenih oblika možemo odrediti kao linearnu kombinaciju odziva na ove elementarne signale.

4.6.1 Funkcija prenosa LTI sistema

Ako na ulaz diskretne mreže, čiji je impulsni odziv $h(n)$, dovedemo kompleksnu eksponencijalnu sekvencu $x(n)=z^n$, $z\in\mathbb{C}$, signal na izlazu mreže će biti jednak:

$$y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)z^{n-k}=\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)z^{-k}\right]z^n . \quad (4.99)$$

Dakle, na izlazu mreže imamo isti oblik signala kao na ulazu, tj. kompleksnu eksponencijalnu sekvencu, samo pomnoženu sa faktorom

$$H(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)z^{-k} , \quad (4.100)$$

koji kod LTI sistema nije funkcija diskretnog vremena i koji nazivamo *funkcijom prenosa* LTI sistema. Funkcija prenosa je kompleksna funkcija kompleksne varijable z. Ona nam daje način kako diskretni sistem transformiše kompleksnu eksponencijalnu sekvencu, jer se nakon definicije funkcije prenosa odziv LTI sistema na pobudu oblika $x(n)=z^n$ može zapisati sa:

$$y(n)=H(z)z^n . \quad (4.101)$$

Dakle, pri pobudi LTI sistema kompleksnom eksponencijalnom sekvencom $x(n)=z^n$ odziv je istog oblika kao pobuda, samo pomnožen konstantom $|H(z)|$ i fazno pomjeren za $\arg H(z)$. Modul i argument funkcije prenosa zavise od vrijednosti z, te sistem na razlčite načine modifikuje pobudne signale oblika z^n, ali različitih vrijednosti z. Pobudna funkcija za koju LTI sistem ima odziv istog oblika kao pobuda naziva se *sopstvena funkcija sistema.* Funkciju prenosa diskretne mreže možemo odrediti iz jednačine diferencija, što ćemo pokazati u sljedećem primjeru.

Primjer 4.9:

Odrediti funkciju prenosa LTI sistema opisanog jednačinom diferencija $2y(n)+3y(n-1)+4y(n-2)=5x(n)$.

Rješenje:

Kako bismo odredili funkciju prenosa, pretpostavimo da je ulazni signal

$$x(n)=z^n,\ z\in\mathbb{C}. \tag{4.102}$$

Tada je odziv dat sa

$$y(n)=H(z)z^n. \tag{4.103}$$

Uvrštavanjem izraza (4.102) i (4.103) za ulazni i izlazni signal u datu jednačinu diferencija dobijamo funkciju prenosa LTI sistema kroz sljedećih nekoliko koraka:

$$2H(z)z^n+3H(z)z^{n-1}+4H(z)z^{n-2}=5z^n, \tag{4.104}$$

$$H(z)\left[2z^n+3z^{n-1}+4z^{n-2}\right]=5z^n, \tag{4.105}$$

$$H(z)=\frac{5z^n}{2z^n+3z^{n-1}+4z^{n-2}}. \tag{4.106}$$

□

4.6.2 Frekvencijske karakteristike LTI sistema

Pretpostavimo da LTI sistem sa impulsnim odzivom $h(n)$ pobuđujemo kompleksnim sinusnim signalom $x(n)=e^{j\omega n}$, $-\infty<n<\infty$. Odziv sistema je kompleksni sinusni signal jednake učestanosti, ali su njegova amplituda i faza promijenjene:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{j\omega(n-k)}=\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{-j\omega k}\right]e^{j\omega n}. \tag{4.107}$$

Način kako se mijenjaju amplituda i faza signala pri prolasku kroz sistem određen je *frekvencijskom karakteristikom* sistema:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{-j\omega k}, \tag{4.108}$$

jer nakon ove definicije frekvencijske karakteristike, odziv možemo izraziti na sljedeći način:

$$y(n)=H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}. \tag{4.109}$$

Frekvencijska karakteristika je kompleksna funkcija digitalne učestanosti ω:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\arg\left(H\left(e^{j\omega}\right)\right)}. \tag{4.110}$$

Modul frekvencijske karakteristike je *amplitudna karakteristika* sistema i ona utiče na promjenu amplitude pri prolasku signala kroz sistem, dok argument frekvencijske karakteristike predstavlja faznu karakteristiku sistema koja utiče na fazu izlaznog signala. Ako pobudni signal možemo napišemo u obliku:

$$x(n)=\frac{e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}}{2}, \tag{4.111}$$

odziv možemo izraziti kao:

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{2}H(\omega_0)e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}H(-\omega_0)e^{-j\omega_0 n} = \\ &= \frac{1}{2}\left|H(\omega_0)\right|e^{j\arg H(\omega_0)}e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}\left|H(-\omega_0)\right|e^{j\arg H(-\omega_0)}e^{-j\omega_0 n}. \end{aligned} \tag{4.112}$$

Ako se radi o sistemu sa realnim impulsnim odzivom, vrijedi da je

$$H^*\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\omega k}, \tag{4.113}$$

$$H\left(e^{-j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\omega k}, \tag{4.114}$$

te vrijedi da je:

$$H(-\omega) = H^*(\omega). \tag{4.115}$$

Zbog toga je:

$$\left|X(-\omega)\right| = \left|H^*(\omega)\right| = \left|H(\omega)\right|, \tag{4.116}$$

$$\arg X(-\omega) = \arg X^*(\omega) = -\arg X(\omega). \tag{4.117}$$

Koristeći (4.115) i (4.116) odziv (4.112) možemo napisati u jednostavnijem obliku:

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{2}\left|H(\omega_0)\right|e^{j\arg H(\omega_0)}e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}\left|H(\omega_0)\right|e^{-j\arg H(\omega_0)}e^{-j\omega_0 n} = \\ &= \left|H(\omega_0)\right|\cos\left(\omega_0 n + \arg H(\omega_0)\right), \end{aligned} \tag{4.118}$$

odakle vidimo da se amplituda signala pri prolasku kroz sistem množi vrijednosšću amplitudne karakteristike $\left|H(\omega_0)\right|$ na odgovarajućoj digitalnoj učestanosti ω_0, te da su izlazni i ulazni signal međusobno fazno pomjereni za vrijednost fazne karakteristike $\arg H(\omega_0)$ na učestanosti ω_0.

Frekvencijska karakteristika se može dobiti iz funkcije prenosa smjenom $z = e^{j\omega}$:

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}\Big|_{z=e^{j\omega}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n}=H\left(e^{j\omega}\right). \tag{4.119}$$

Frekvencijska karakteristika diskretnog sistema je je kontinualna periodična funkcija digitalne učestanosti ω sa periodom 2π :

$$\begin{aligned}H\left(e^{j(\omega+2m\pi)}\right)&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{-j(\omega+2m\pi)k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{-j\omega k}e^{-j2m\pi k}=\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{-j\omega k}=H\left(e^{j\omega}\right),\ m\in\mathbb{Z}.\end{aligned} \tag{4.120}$$

Frekvencijska karakteristika sistema se uobičajeno posmatra na intervalu od $-\pi$ do π . Zbog periodičnosti sa periodom 2π , ako je frekvencijska karakteristika $H\left(e^{j\omega}\right)$ poznata za digitalne učestanosti ω od $-\pi$ do π onda je poznata i za svako vrijednost digitalne učestanosti ω .

4.7 Korelacija

Jednodimenzionalna funkcija diskretnog vremena definisana sa:

$$r_{xs}(n)=x(n)\otimes s(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)s(n+k), \tag{4.121}$$

naziva se k*orelacija* signala $x(n)$ i $s(n)$ dok je korelacija $s(n)$ sa $x(n)$ data sa:

$$r_{sx}(n)=s(n)\otimes x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}s(k)x(n+k). \tag{4.122}$$

Ukoliko se korelacija definiše nad istim signalom:

$$r_{xx}(n)=x(n)\otimes x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)x(n+k), \tag{4.123}$$

kažemo da se radi o *autokorelaciji*.

Vrijednost autokorelacije je najveća u nuli, jer se tad prije sumiranja sve vrijednosti signala kvadriraju. Kako bismo dokazali da je vrijednost autokorelacije najveća u nuli, pođimo od nejednakosti:

$$\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(k)\right| \le \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}|x_1(k)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}|x_2(k)|^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.124}$$

Primijenimo (4.125) na definicioni izraz za autokorelaciju (4.123):

$$\begin{aligned}|r_{xx}(t)| &= \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*(k)x(n+k)\right| \le \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}|x(k)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}|x(n+k)|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}|x(k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*(k)x(k) = |r_{xx}(0)|\end{aligned} \tag{4.125}$$

jer pomijeranje signala duž vremenske ose ne utiče na vrijednost integrala koji se računa od $-\infty$ do ∞. Dakle, vrijedi da je:

$$|r_{xx}(n)| \le |r_{xx}(0)|. \tag{4.126}$$

Pri analizi i obradi signala, korelacija se zbog ove osobine često koristi za prepoznavanje uzoraka. Tada se uzorak koji želimo da pronađemo pomijera i preklapa (množi) sa ispitivanim signalom. Vrijednost korelacije je najveća za one vrijednosti pomaka uzorka pri kojima uzorak i analizirani signal postaju jednaki ili veoma slični.

Gledano preko matematičke definicije operacija, korelacija je slična konvoluciji, samo što se pri računanju korelacije ne radi refleksija signala. Veza korelacije i konvolucije se može iskazati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}r_{xs}(t) &= x(n) \otimes s(n) = \left.\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(m)s(n+m)\right|_{m\to -k} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-k)s(n-k) = x(-n) * s(n).\end{aligned} \tag{4.127}$$