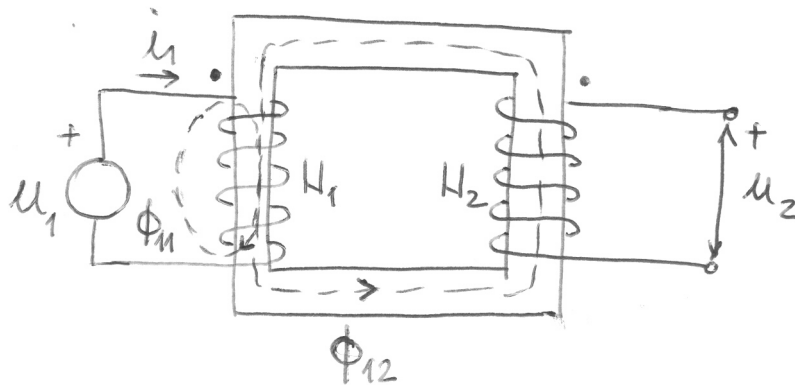


Induktivno spregnuta kola

13. januar 2016

Transformatori se koriste u elektroenergetskim sistemima za povišavanje i snižavanje napona, u elektronskim i komunikacionim kolima za promjenu napona i odvajanje kola. U induktivno spregnutim kolima promjene struje u jednom kolu uzrokuju promjene fluksa, a time i pojavu elektromotorne sile na pristupima drugom kolu. U transformatorima se induktivna sprega postiže tako što se kalemovi namotavaju na zajedničko jezgro tako da magnetno polje jednog kalema prolazi kroz drugi. Principijelna šema transformatora prikazana je na Slici 1, a simbol na Slici 2. Kalem (namotaj) na koji je priključena pobuda naziva se primar, a kalem na kojem se posmatra odziv se naziva sekundar.



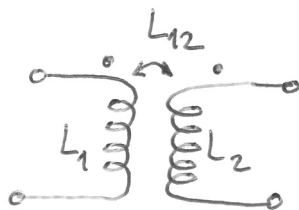
Slika 1: Principijelna šema transformatora.

Sopstveni fluks primara jednak je

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}. \quad (1)$$

Sopstveni fluks sekundara je

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}. \quad (2)$$



Slika 2: Simbol spregnutih induktiviteta.

Ukupni fluks kroz N_1 namotaja primara je

$$N_1 \Phi_{1r} = N_1 \Phi_1 \pm N_1 \Phi_{21} = L_1 i_1 \pm L_{12} i_2, \quad (3)$$

gdje je L_1 sopstvena induktivnost primara, a L_{12} međusobna induktivnost primara i sekundara. Znak + ili - se bira u zavisnosti od međusobnog odnosa smjerova sopstvenog fluksa primara i međusobnog fluksa, odnosno, smjerova namotavanja primara i sekundara. Ukupni fluks kroz N_2 namotaja sekundara je

$$N_2 \Phi_{2r} = N_2 \Phi_2 \pm N_2 \Phi_{12} = L_2 i_2 \pm L_{12} i_1, \quad (4)$$

gdje je L_2 sopstvena induktivnost sekundara. Ukupni međusobni fluks kroz jedan zavojak iznosi

$$\Phi_M = \Phi_{12} \pm \Phi_{21}. \quad (5)$$

Odnosi između međusobnih i sopstvenih flukseva predstavljaju koeficijente međusobnih flukseva (induktivne sprege)

$$k_1 = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_1}, \quad (6)$$

$$k_2 = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_2}, \quad (7)$$

a odnosi između rasutih i sopstvenih flukseva su koeficijenti rasipanja flukseva

$$\sigma_1 = \frac{\Phi_{11}}{\Phi_1}, \quad (8)$$

$$\sigma_2 = \frac{\Phi_{22}}{\Phi_2}. \quad (9)$$

Sopstvene induktivnosti su

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_1}{i_1}, \quad (10)$$

$$L_2 = \frac{N_2 \Phi_2}{i_2}, \quad (11)$$

a međusobna induktivnost

$$L_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{i_1} = \frac{N_1 \Phi_{21}}{i_2} = M. \quad (12)$$

Induktivnosti rasipanja su

$$L_{\sigma 1} = \frac{N_1 \Phi_{11}}{i_1}, \quad (13)$$

$$L_{\sigma 2} = \frac{N_2 \Phi_{22}}{i_2}. \quad (14)$$

Važe veze između koeficijenata

$$\sigma_1 + k_1 = 1, \quad (15)$$

$$\sigma_2 + k_2 = 1. \quad (16)$$

Sopstvene induktivnosti i induktivnosti rasipanja su povezane preko

$$L_1 = L_{\sigma 1} + k_1 L_1, \quad (17)$$

$$L_2 = L_{\sigma 2} + k_2 L_2. \quad (18)$$

Koeficijenti sprege se mogu izraziti u obliku

$$k_1 = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} = \frac{\frac{L_{12} i_1}{N_2}}{\frac{L_1 i_1}{N_1}} = m \frac{L_{12}}{L_1}, \quad (19)$$

$$k_2 = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_2} = \frac{\frac{L_{21} i_2}{N_1}}{\frac{L_2 i_2}{N_2}} = \frac{1}{m} \frac{L_{12}}{L_2}, \quad (20)$$

gdje je *prenosni broj* transformatora

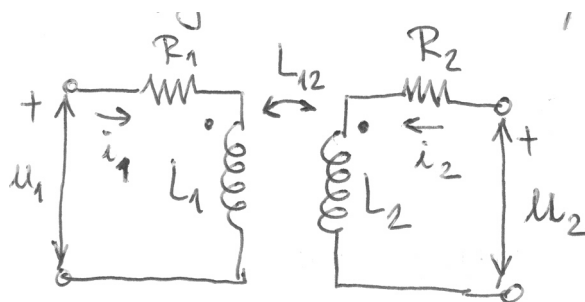
$$m = \frac{N_1}{N_2}. \quad (21)$$

Rezultujući koeficijent sprege je

$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (22)$$

1 Linearan transformator

Posmatrajmo kolo na Slici 3. Neka u primaru djeluje naponski izvor napona u_1 i neka je sekundar transformatora otvoren, $i_2 = 0$. Tada je



Slika 3: Spregnuti induktiviteti (linearni transformator).

$$N_1\Phi_1 = L_1i_1, \quad (23)$$

$$N_2\Phi_{12} = L_{12}i_1. \quad (24)$$

U primaru i sekundaru se indukuju ems koje se suprotstavljaju promjeni fluksa pa je

$$u_1 = R_1i_1 + L_1\frac{di_1}{dt}, \quad (25)$$

$$u_2 = L_{12}\frac{di_1}{dt}. \quad (26)$$

Analogno se dobija kada je primar otvoren, $i_1 = 0$, a u sekundaru djeluje naponski izvor napona u_2 .

$$u_1 = L_{12}\frac{di_2}{dt}, \quad (27)$$

$$u_2 = R_2i_2 + L_2\frac{di_2}{dt}. \quad (28)$$

Dakle, jednačine za spregnuta kola prikazana na Slici 3 su

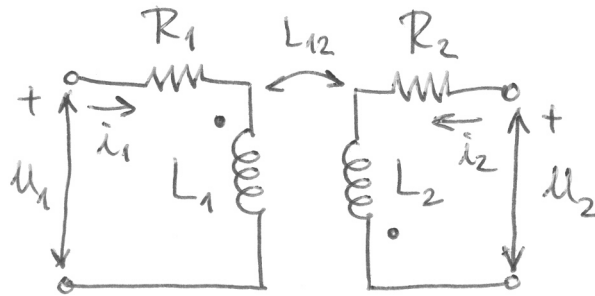
$$u_1 = R_1i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_2}{dt}, \quad (29)$$

$$u_2 = R_2i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} + L_{12}\frac{di_1}{dt}. \quad (30)$$

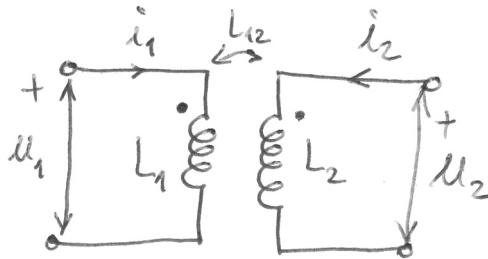
Jednačine za spregnuta kola prikazana na Slici 4 su

$$u_1 = R_1i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} - L_{12}\frac{di_2}{dt}, \quad (31)$$

$$u_2 = R_2i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} - L_{12}\frac{di_1}{dt}. \quad (32)$$



Slika 4: Linearni transformator (drugačiji raspored tačkica).



Slika 5: Savršeni transformator.

U ustaljenom prostoperiodičnom režimu jednačine se mogu napisati korištenjem kompleksnih predstavnika

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 \pm j\omega L_{12} \underline{I}_2, \quad (33)$$

$$\underline{U}_2 = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 \pm j\omega L_{12} \underline{I}_1. \quad (34)$$

2 Savršeni transformator

Pretpostavimo da je u kolu na Slici 3 $R_1 = R_2 = 0$, te da nema rasipanja fluksa, $\Phi_{11} = \Phi_{22} = 0$, odnosno, $L_{\sigma 1} = L_{\sigma 2} = 0$. U tom slučaju imamo savršenu spregu $k_1 = k_2 = k = 1$, Slika 5. Naponi primara i sekundara su jednaki

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega L_{12} \underline{I}_2, \quad (35)$$

$$\underline{U}_2 = j\omega L_{12} \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2. \quad (36)$$

Množenjem prve jednačine sa L_2 i druge sa L_{12} i njihovim oduzimanjem dobijamo

$$L_2 \underline{U}_1 = L_{12} \underline{U}_2, \quad (37)$$

odnosno,

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{L_{12}}{L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}. \quad (38)$$

Pošto je koeficijent sprege

$$k_1 = m \frac{L_{12}}{L_1} = 1, \quad (39)$$

slijedi da je

$$m = \frac{N_1}{N_2} = \frac{L_1}{L_{12}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}, \quad (40)$$

odnosno,

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{N_1}{N_2} = m. \quad (41)$$

Za kratko spojen sekundar, $\underline{U}_2 = 0$, dobijamo

$$j\omega L_{12}\underline{I}_1 + j\omega L_2\underline{I}_2 = 0, \quad (42)$$

pa je

$$\underline{I}_1 = -\frac{L_2}{L_{12}}\underline{I}_2 = -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\underline{I}_2, \quad (43)$$

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = -\frac{N_2}{N_1}\underline{I}_2 = -\frac{1}{m}\underline{I}_2. \quad (44)$$

3 Idealni transformator

Neka je kod savršenog transformatora permeabilnost magnetskom jezgra beskonačna, $\mu \rightarrow \infty$, kao i sopstvene i međusobne induktivnosti $L_1, L_2, L_{12} \rightarrow \infty$, ali uz $\frac{L_{12}}{L_1} = \text{const}$. Tada je

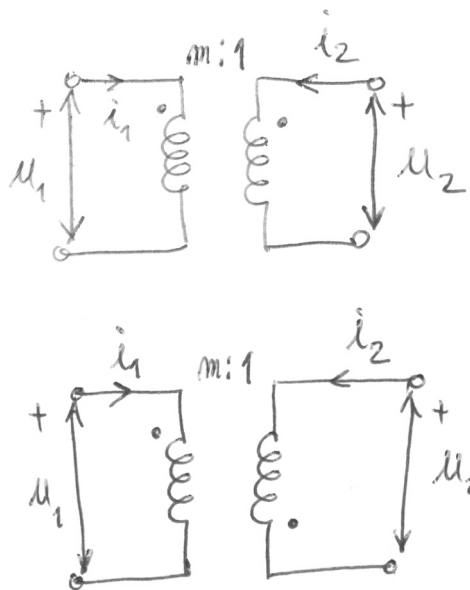
$$\underline{U}_1 = j\omega L_1\underline{I}_1 + j\omega L_{12}\underline{I}_2. \quad (45)$$

Dijeljenjem ove jednačine sa L_1 dobijamo

$$\frac{\underline{U}_1}{L_1} = j\omega\underline{I}_1 + j\omega\frac{L_{12}}{L_1}\underline{I}_2. \quad (46)$$

Pošto je $L_1 \rightarrow \infty$

$$0 = \underline{I}_1 + \frac{L_{12}}{L_1}\underline{I}_2, \quad (47)$$



Slika 6: Idealni transformator.

odnosno, na osnovu (39)

$$\frac{I_1}{I_2} = -\frac{1}{m}. \quad (48)$$

Pored toga vrijedi (41)

$$\frac{U_1}{U_2} = m. \quad (49)$$

Dakle, u ovom slučaju savršeni transformator teži idealnom transformatoru.

Simbol idealnog transformatora dat je na Slici 6, a opisan je jednačinama

$$\frac{u_1}{u_2} = m, \quad (50)$$

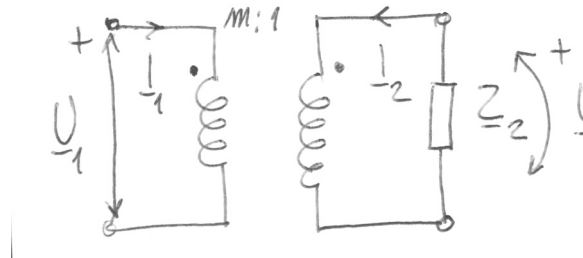
$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{1}{m}. \quad (51)$$

Ukoliko su tačkice raspoređene kao na Slici 6 jednačine su

$$\frac{u_1}{u_2} = -m, \quad (52)$$

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{1}{m}. \quad (53)$$

Važno je napomenuti da je idealni transformator *rezistivni element*. On ne akumulira energiju.



Slika 7: Idealni transformator zatvoren impedansom.

Kompleksna snaga na primarnom pristupu je

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^*, \quad (54)$$

a na sekundarnom

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_2 \underline{I}_2^* = \frac{1}{m} \underline{U}_1 m \underline{I}_1^* = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = \underline{S}_1. \quad (55)$$

Dakle vrijedi,

$$P_1 = P_2, \quad (56)$$

$$Q_1 = Q_2. \quad (57)$$

Ako je idealni transformator zatvoren impedansom \underline{Z}_2 , kao na Slici 7 ulazna impedansa je

$$\underline{Z}_{ul} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{m \underline{U}_2}{-\frac{1}{m} \underline{I}_2} = m^2 \frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_2} = m^2 \underline{Z}_2. \quad (58)$$