

Vježba 4.

2D Furijeova transformacija i filtriranje u frekvencijskom domenu

Cilj ove vježbe je upoznavanje sa osnovnim funkcijama IPT za izračunavanje 2D Furijeove transformacije slike i filtriranje slike u frekvencijskom domenu. Filtriranje slike u frekvencijskom domenu može da se primjeni u svim situacijama u kojima se može koristiti i filtriranje slike u prostornom domenu pošto se radi o ekvivalentnim operacijama. Razlog za korištenje filtriranja u frekvencijskom domenu je njegova potencijalno veća efikasnost kada se koriste veći filtri. Šta znači *veći* zavisi od više faktora vezanih za arhitekturu računara i korištene algoritme. U ovoj vježbi ćemo samo demonstrirati osnovne koncepte vezane za filtriranje u frekvencijskom domenu i nećemo se zadržavati na pitanjima efikasnosti.

Sliku možemo posmatrati kao funkciju od dvije promjenljive $a(x,y)$ gdje je a amplituda (svjetlina) slike u tački sa koordinatama (x,y) . Prema tome, i dvodimenzionalna Furijeova transformacija ove funkcije je takođe (kompleksna) funkcija od dvije promjenljive $A(u,v)$.

Uopšte, funkciju od dvije promjenljive možemo vizualizovati na dva načina: kao *površ* u trodimenzionalnom prostoru i kao *sliku*. Štaviše, pošto je Furijeova transformacija kompleksna funkcija, nju je moguće posmatrati kao dvije realne funkcije, jednu koja predstavlja *magnitudu* i drugu koja predstavlja *fazu* Furijeove transformacije.

Funkcije koje se koriste u ovoj vježbi

Pošto ćemo u ovoj vježbi generisati i neke 3D grafike, tj. površi u 3D prostoru koristićemo naredbu `mesh` čija je osnovna sintaksa

```
mesh(h)
```

gdje je h matrica u kojoj se nalaze vrijednosti odmjeraka funkcije 2 promjenljive. Ova funkcija crta "žičani model" za $x=1:M$ i $y=1:N$, gdje su M i N dimenzije matrice h .

Moguće je zadati i vrijednosti za x i y koordinate korištenjem sintakse

```
mesh(x, y, h).
```

Tačka posmatranja se može interaktivno mijenjati pomoću **Rotate 3D** dugmeta koje se nalazi u liniji sa alatima slike, a zatim klikom i povlačenjem unutar prozora sa slikom.

Dvodimenzionalna Furijeova transformacija se izračunava korištenjem funkcije `fft2` čija je sintaksa:

```
F = fft2(f, P, Q);
```

gdje su P i Q brojevi tačaka u kojima se računa FFT po koordinatama slike. Ukoliko su ovi brojevi veći od dimenzija slike vrši se automatsko dopunjavanje nulama. Rezultat je matrica dimenzija $P \times Q$.

Kao i kod jednodimenzionalne Furijeove transformacije rezultujuća matrica nije “centrirana”, tj. u centru dobijene matrice odgovara Nikvistova frekvencija što nije posebno pogodno za prikazivanje. Centriranje se i u ovom slučaju može postići korištenjem funkcije `fftshift`.

```
Fc = fftshift(F);
```

Inverzna 2D Furijeova transformacija se izračunava korištenjem funkcije `ifft2`.

```
f = ifft2(F);
```

Pored funkcije `fft2` za dobijanje frekvencijskog odziva 2D FIR filtera može se koristiti i funkcija `freqz2` čija je sintaksa:

```
H = freqz2(h, R, C);
```

gdje je h 2D prostorni filter zadat kao računski molekul (konvolucioni kernel rotiran za 180 stepeni), R broj vrsta, a C broj kolona rezultujućeg filtera H u frekvencijskom domenu. U suštini, to su brojevi tačaka u kojima se računa FFT. Ako se ne zada izlazni argument ova funkcija direktno crta amplitudsku karakteristiku filtera. Kao rezultat ova funkcija vraća “centriranu” Furijeovu transformaciju. Takođe, smatra se da je ishodište prostornog koordinatnog sistema u kojem se nalazi filter u centru filtera za razliku od primjene funkcije `fft2` kod koje se smatra da je ishodište koordinatnog sistema u gornjem lijevom uglu.

Filtri se u IPT mogu zadavati i direktno u frekvencijskom domenu. Najprije je potrebno generisati matrice frekvencija u kojima su zadani odmjerci optičke funkcije prenosa filtera. Ovo se postiže korištenjem funkcije `freqspace`:

```
[U, V] = freqspace([M N], 'meshgrid');
```

gdje su M i N dimenzije rezultujuće matrice (broj odmjeraka u frekvenciji). Ovako dobijene vrijednosti frekvencije su normalizovane sa π pa su njihove vrijednosti u intervalu $[-1, 1)$.

2D filtri koji se zadaju u frekvencijskom domenu su najčešće rotaciono simetrični tako da su vrijednosti odmjeraka funkcija udaljenosti od ishodišta. Optička funkcija prenosa idealnog niskopropusnog filtera je tako:

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & D(u, v) \leq D_0 \\ 0, & D(u, v) > D_0 \end{cases},$$

gdje je D_0 udaljenost na kojoj se nalazi prelaz iz propusnog u nepropusni opseg.

Funkcija prenosa 2D Batervortovog niskopropusnog filtera n -tog reda je data sa:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}.$$

Matrica udaljenosti za date matrice frekvencija generisane funkcijom `freqspace` se može izračunati na sledeći način:

```
D = sqrt(U.^2 + V.^2);
```

Sada se funkcija prenosa Batervortovog filtra može generisati pomoću:

```
H = 1./(1 + (D./D0).^(2*n));
```

Zadaci

1. Formirati pravougaoni konvolucioni kernel pomoću naredbi:

```
h = zeros(256);
```

```
h(125:132, 125:132) = 1;
```

Proučiti funkciju `mesh` za prikazivanje površi u trodimenzionalnom prostoru.

Prikazati pravougaoni kernel pomoću funkcije `mesh`. Na novoj slici prikazati isti taj kernel kao sliku, pomoću funkcije `imshow`.

2. Odrediti Furijeovu transformaciju pravougaonog konvolucionog kernela korišćenjem funkcije `fft2`. Nacrtati magnitude elemenata dobijene matrice u trodimenzionalnom prostoru korišćenjem funkcije `mesh`. Postoji li sličnost između spektra dvodimenzionalnog i jednodimenzionalnog pravougaonog signala? Na osnovu dobijenog amplitudskog spektra zaključite šta će se desiti ukoliko se ovaj konvolucioni kernel iskoristi za filtriranje? Kako biste lakše odredili dejstvo filtra nacrtajte magnitudu centrirane transformacije.
3. Na novoj slici prikazati iste magnitude pomoću funkcije `imshow`. Obratite pažnju na opseg vrijednosti magnituda. Poređenja radi prikažite slike koje odgovaraju centriranoj i necentriranoj transformaciji. Da biste vidjeli vrijednosti koje odgovaraju različitim intenzitetima piksela iskoristite funkciju `colorbar`.
4. Kada se vrši vizuelizacija funkcije sa velikim dinamičkim opsegom vrijednosti korisno je primijeniti nelinearnu transformaciju kako bi se taj opseg mogao bolje predstaviti sa raspoloživim brojem nivoa intenziteta. U ovu svrhu se često koristi logaritamska transformacija:

```
S = log(1 + abs(F));
```

```
imshow(S, [])
```

5. Učitajte sliku `lena.jpg` u MATLAB-ov radni prostor. Odredite Furijeovu transformaciju ove slike. Na jednoj slici prikažite magnitudu, a na drugoj fazu dobijene Furijeove transformacije. Ako je potrebno primijenite nelinearnu transformaciju vrijednosti intenziteta.
6. Pronađite sada inverzne Furijeove transformacije korišćenjem samo magnitude, odnosno, samo faze dobijene Furijeove transformacije. Prikažite dobijene slike. Šta se može zaključiti o informaciji koju nose magnituda i faza Furijeove transformacije slike.

Uputstvo: Formirajte dvije nove matrice. Jednu, koja će sadržati samo magnitudu

dobijene Furijeove transformacije, a drugu koja će imati istu fazu, ali magnitudu jednaku jedinici (iskoristite $\exp(j \cdot \text{angle}(F))$), gdje je F polazna Furijeova transformacija, a j imaginarna jedinica).

7. Učitati sliku `lena.jpg` i generisati uniformni filtar dimenzija 11x11. Odrediti Furijeove transformacije slike i filtra i filtriranjem u frekvencijskom domenu primijeniti filtar na zadatu sliku. Ispitati uticaj dopunjavanja nulama prilikom računanja Furijeove transformacije na rezultat. Uporediti dobijene rezultate sa rezultatima dobijenim prostornim filtriranjem korištenjem funkcije `imfilter`.
8. Slika `lena_em_interference.jpg` (dodata u slike.zip) narušena je prilikom akvizicije električnom interferencijom koja je rezultovala periodičnim šumom. Odrediti spektar slike `lena_em_interference.jpg`. Prikazati amplitudni spektar kao u tački 4. Na osnovu dobijenog spektra odrediti učestanosti periodične interferencije po obje prostorne koordinate.
9. Uobičajeni način za uklanjanje ovog šuma je filtriranje nepropusnikom opsega (notch). Funkcija prenosa 2D Batervortovog notch filtra n -tog reda data je sa:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D_0^2}{D_1(u, v)D_2(u, v)} \right]^n},$$

gdje su

$$D_1(u, v) = \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}$$

$$D_2(u, v) = \sqrt{(u + u_0)^2 + (v + v_0)^2}$$

Centralne učestanosti nepropusnih opsega su u_0 i v_0 , a D_0 je radijus nepropusnog opsega. Ukoliko su frekvencijske promjenljive u i v generisane pomoću funkcije `freqspace` onda i ove vrijednosti treba da budu normalizovane sa π . Filtar specificiran na ovaj način je centriran s obzirom na frekvencijski domen pa se prije upotrebe treba pretprocesirati pomoću funkcije `fftshift`.

Generisati funkciju prenosa Batervortovog notch filtra 2. reda sa centralnim učestanostima određenim u tački 8. Radijus nepropusnog opsega treba da bude mali. Nacrtati amplitudni spektar dobijenog filtra.

10. Filtriranjem u frekvencijskom domenu ukloniti periodičnu interferenciju i prikazati rezultujuću sliku.