Filtri bazirani na Laplasijanu

U novije vrijeme više od gradijentnih filtara se koriste derivacijski filtar drugog reda, odnosno Laplasijan, kod koga prolasci kroz nulu određuju poziciju ivica, Slika 52.

Osnovni derivacijski filtar drugog reda, na osnovu aproksimacije derivacija diferencijama, se specificira sa:

$$\nabla_x^2 = \nabla_x\left(a[m,n] - a[m-1,n]\right) = \nabla_x\left(a[m,n]\right) - \nabla_x\left(a[m-1,n]\right) = a[m,n] - a[m-1,n] - a[m-1,n] + a[m-2,n]$$

$$\nabla_y^2 = \nabla_y\left(a[m,n] - a[m,n-1]\right) = \nabla_y\left(a[m,n]\right) - \nabla_y\left(a[m,n-1]\right) = a[m,n] - a[m,n-1] - a[m,n-1] + a[m,n-2]$$

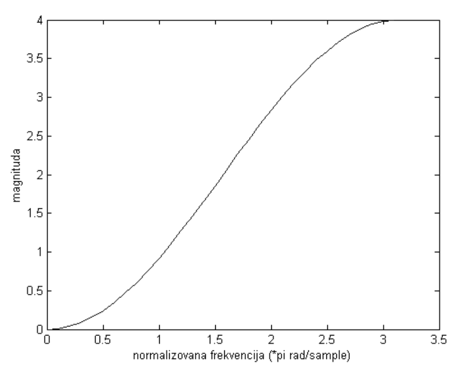
ili

$$\mathbf{h}_{2x} = \mathbf{h}_{2y}^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Spektar ovih filtara, u oba smjera, u frekvencijskom opsegu $0 \le \Omega \le \pi$, je dat sa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{\mathscr{F}}{\leftrightarrow} \left|H(\Omega)\right| = 2(1 - \cos\Omega),$$

a amplitudna karakteristika prikazana na Slici 96.



Slika 96. Amplitudna karakteristika derivacijskih filtara drugog reda

Ova dva jednodimenzionalna filtra mogu se implementirati direktno preko definicije Laplasijana, ili grupisati u jedan dvodimenzionalni filtar, pa implementirati preko dvodimenzionalne konvolucije:

$$\left(\mathbf{h}_{2x} * a\right) + \left(\mathbf{h}_{2y} * a\right) = \left(\mathbf{h}_{2x} + \mathbf{h}_{2y}\right) * a = \mathbf{h} * a,$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gausov derivacijski filtar drugog reda - $L \circ G$ filtar

Budući da Laplasijan uključuje druge derivacije to znači moguće pojačanje šuma visokih prostornih frekvencija, te je neophodno glačanje. Filtar za glačanje treba da ima sljedeće osobine:

- frekvencijska karakteristika filtra treba da bude što uža radi suzbijanja visokofrekventnog šuma,
- u prostornom domenu impulsni odziv filtra treba da bude što uži da bi se obezbijedila dobra lokalizacija ivica.

Filtar koji najbolje zadovoljava ove uslove je Gausov filtar. To znači da za određivanje ivica treba uraditi glačanje Gausovim filtrom, a zatim Laplasijan:

$$\textit{pozicija ivice}\left\{a(x,y)\right\} = \left\{(x,y)\middle|\nabla^2\left\{g_{2D}(x,y) * a(x,y)\right\} = 0\right\},$$

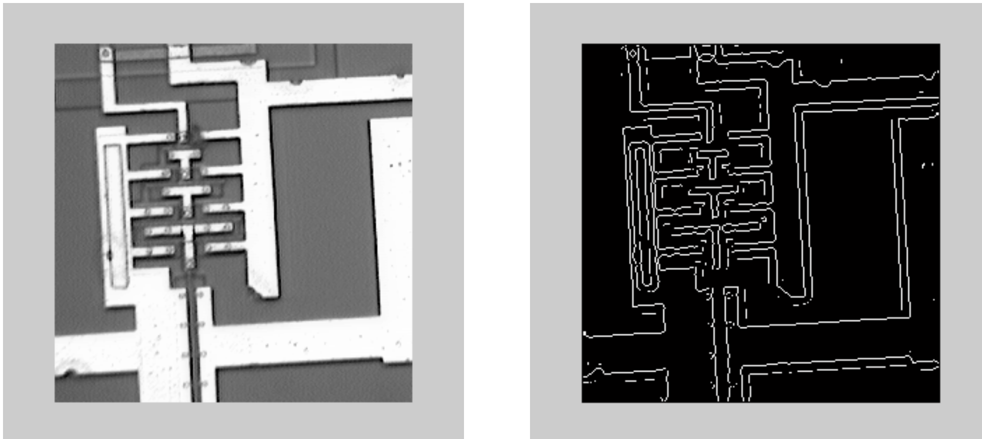
gdje je g_{2D} impulsni odziv Gausovog dvodimenzionalnog filtra. Operator ∇^2 je linearan i vremenski invarijantan, te je moguće zamijeniti redosljed operacija i kombinovati ih u jedan jedinstveni $L \circ G$ filtar:

$$\textit{pozicija ivice}\left\{a(x,y)\right\} = \left\{(x,y)\middle|L \circ G(x,y) * a(x,y) = 0\right\},$$

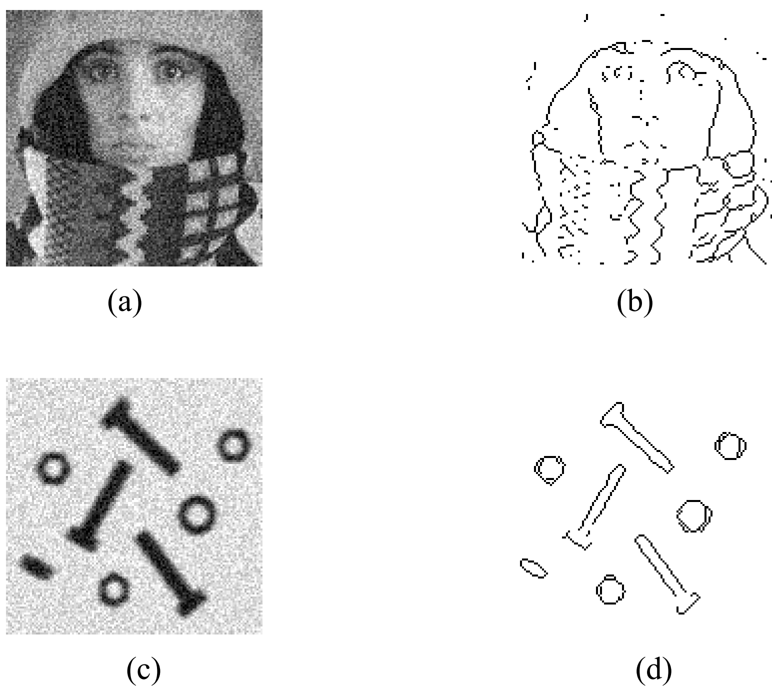
gdje je:

$$L \circ G(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{\sigma^4} g_{2D}(x,y) - \frac{2}{\sigma^2} g_{2D}(x,y).$$

Dakle, umjesto da se prvo se primjeni konvolucija sa Gausovim filtrom, a zatim Laplasijan, moguće je isti rezultat postići ako se konvolucioni kernel formira kao odmjereni Laplasijan Gausove funkcije. Lokacija ivica je određena prolazima kroz nulu. Dobijeni dvodimenzionalni konvolucioni kernel se naziva “Meksikanski šešir”. Primjeri određivanja ivica $L \circ G$ filtrom dati su na Slici 97 i Slici 98.



Slika 97. Određivanje ivica slike $L \circ G$ filtrom: (a) originalna slika, (b) ivice na slici određene $L \circ G$ filtrom



Slika 98. [14] Određivanje ivica slika sa sumom ($\sigma = 1.5$) $L \circ G$ filtrom: (a) originalna slika, (b) ivice na slici (a), (c) originalna slika, (d) ivice na slici (c)

Kompas operatori

Za određivanje ivica u osam smjerova koriste se takozvani kompas operatori, označeni prema stranama svijeta:

$$E:\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad NE:\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad N:\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad NW:\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$W:\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad SW:\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad S:\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad SE:\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$