MATEMATIČKA MORFOLOGIJA U OBRADI SLIKE

Riječ morfologija znači “forma i struktura objekta”. Morfologijom se opisuje raspored i daju međusobne relacije između objekata. Digitalna morfologija daje način da se opišu ili analiziraju oblici digitalnih objekata, pa prema tome i digitalnih slika.

Digitalna morfologija posmatra sliku u kontekstu teorije skupova. Dakle, slika je skup elemenata (piksela) koji grupisani u dvodimenzionalnu strukturu daju određene oblike. Matematičke operacije nad skupovima se koriste za analizu oblika, prebrojavanje, prepoznavanje i slično. Osnovne morfološke operacije su *erozija* koja sa slike briše grupe piksela koje odgovaraju zadatoj “mustri” i *dilatacija* koja malo područje oko piksela popunjava po zadatoj “mustri”. Zavisno od tipa slike (binarna, gray-scale, color), definicije dilatacije i erozije se razlikuju i moraju se razmatrati odvojeno.

ELEMENTI DIGITALNE MORFOLOGIJE

Binarne morfološke operacije se definišu na binarnim slikama. Sliku više ne posmatramo kao funkciju dvije varijable, kontinualne $a(x,y)$, ili diskretne $a[m,n]$, već kao skup tačaka ili piksela sa kontinualnim ili diskretnih koordinata, respektivno. Pri tome je neophodno definisati koordinatni početak. *Objekat* **A** je skup tačaka slike koje posjeduju neku zajedničku osobinu,

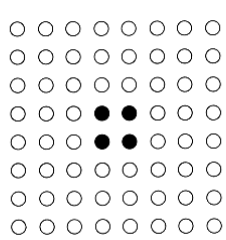
$$\mathbf{A} = \{a \mid \text{osobina}(a) == \text{TACNO}\}.$$

Pozadina objekta **A** je skup tačaka slike koje ne pripadaju objektu:

$$\mathbf{A}^C = \{a \mid a \notin \mathbf{A}\}.$$

Posmatrajmo Sliku 149. Objektu **A** pripadaju crni pikseli na slici, dakle, objekat **A** je skup piksela slike koji imaju vrijednost “1”. Ako je koordinatni početak u gornjem lijevom uglu, onda je **A** skup uređenih parova (ili vektora)

$$\mathbf{A} = \{(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}.$$



Slika 149. Slika kao skup

Osnovne operacije

Osnovnim operacijama nad skupovima koje se koriste u digitalnoj morfologiji pripadaju *unija*, *presjek*, *razlika*, *komplement*, *translacija* i *refleksija, te Minkowski sabiranje i oduzimanje.*

Translacija

Za dati vektor b i skup **A** translacija $\mathbf{A}+b$ se definiše kao:

$$(\mathbf{A})_b = \mathbf{A}+b = \{a+b \mid a \in \mathbf{A}\}.$$

Treba napomenuti da je, kad radimo sa digitalnim slikama koje su sastavljene od piksela sa cjelobrojnim koordinatama, skup raspoloživih translacionih vektora b ograničen.

Refleksija

Refleksija skupa **A** je definisana sa:

$$\hat{\mathbf{A}} = \{c \mid c = -a, a \in \mathbf{A}\}.$$

Minkowski sabiranje i oduzimanje

Neka su data dva skupa **A** i **B**. Minkovski sabiranje je dato sa:

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \bigcup_{b \in \mathbf{B}} (\mathbf{A}+b),$$

a Minkowski oduzimanje sa:

$$\mathbf{A} \Theta \mathbf{B} = \bigcap_{b \in \mathbf{B}} (\mathbf{A}+b).$$

Binarna dilatacija

Dilatacija skupa **A** skupom **B** se definiše kao

$$D(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \bigcup_{b \in \mathbf{B}} (\mathbf{A}+b).$$

Skup **A** predstavlja sliku nad kojom se vrši dilatacija, dok je skup **B** operator koji nazivamo *strukturni element*. Od njegovog izgleda zavisi priroda specifične dilatacije.

Da bi objasnili dilataciju, posmatrajmo Sliku 150. Skup **A** je slika, a $\mathbf{B} = \{(0,0),(0,1)\}$ strukturni element. Znakom x (svejedno da li je crno ili bijelo) je označen koordinatni početak. Dilatacija skupa **A** strukturnim elementom **B** je unija svih translacija skupa **A** vektorima koji su elementi skupa **B**:

$$D(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \{\mathbf{A}+(0,0)\} \cup \{\mathbf{A}+(0,1)\}.$$

Skup **A** se sastoji od četiri piksela. Translacija za $(0,0)$ neće ništa promijeniti, tako da za $\mathbf{A}+(0,0)$ dobijemo skup na Slici 150(b):

$$\{(3,3)+(0,0), (3,4)+(0,0), (4,3)+(0,0), (4,4)+(0,0)\} = \{(3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}.$$

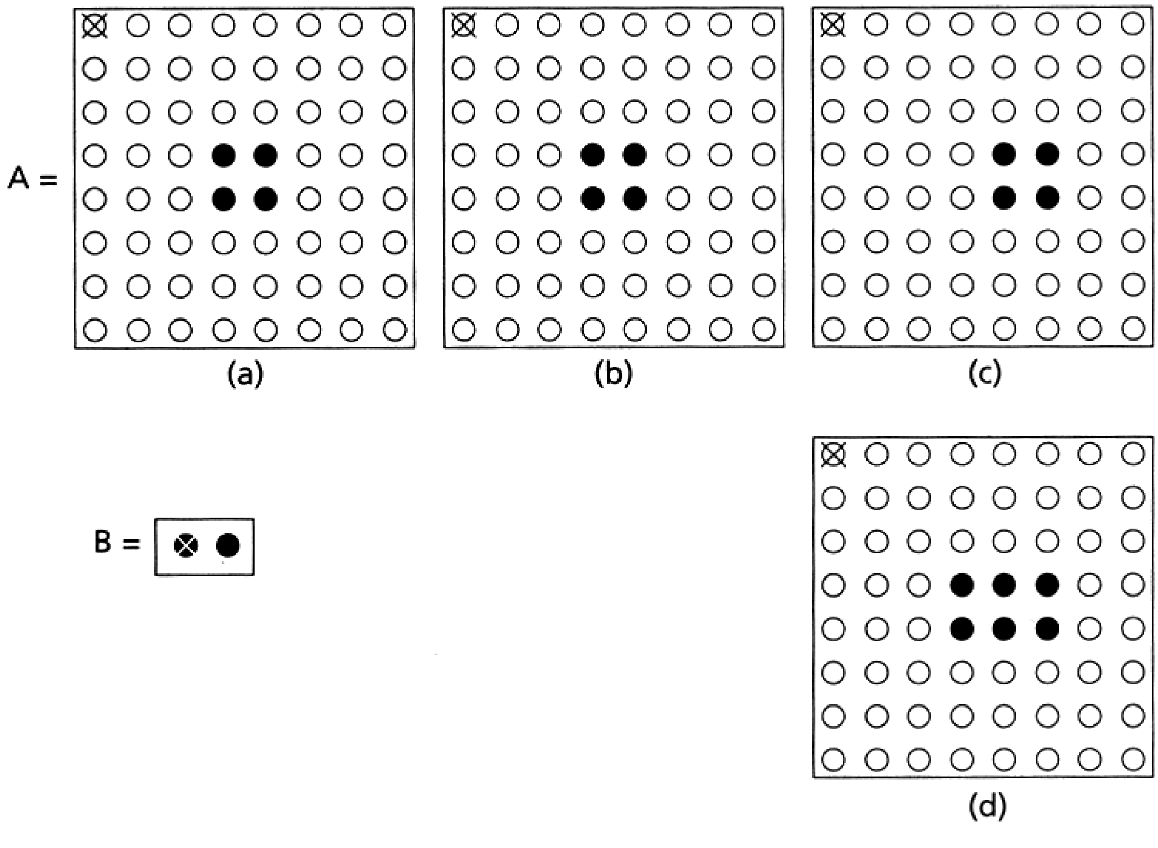
Rezultat translacije $\mathbf{A}+(0,1)$ je skup na Slici 150(c):

$$\{(3,3)+(0,1), (3,4)+(0,1), (4,3)+(0,1), (4,4)+(0,1)\} = \{(3,4), (3,5), (4,4), (4,5)\}.$$

Dilatacija je unija skupova koji nastaju translacijom skupa **A** za sve elemente (vektore) *b* strukturnog elementa **B**, te je konačan rezultat skup:

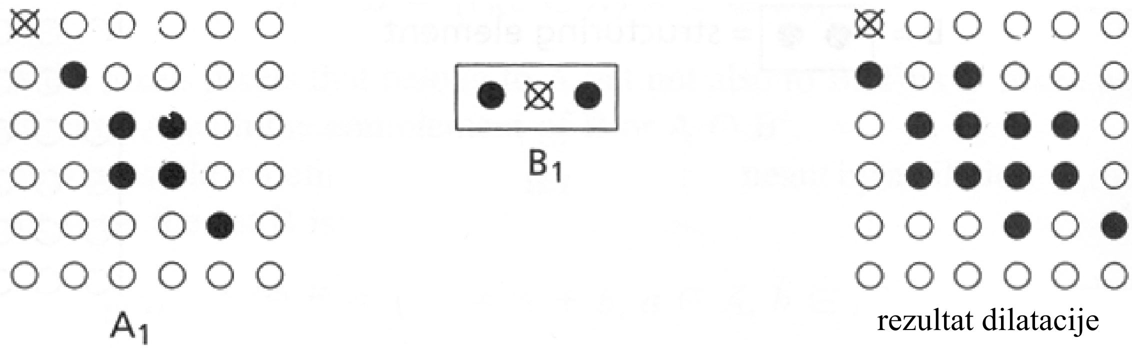
$$\{(3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (4,4), (4,5)\},$$

prikazan na Slici 150(d).



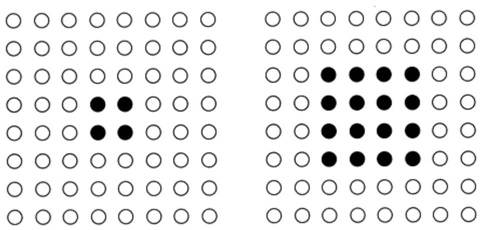
Slika 150. [4] Dilatacija skupa **A** strukturnim elementom **B**

U prethodnom primjeru koordinatni početak je pripadao strukturnom elementu. To ne mora uvijek biti slučaj. Na Slici 151 dat je primjer dilatacije strukturnim elementom koji ne sadrži koordinatni početak.



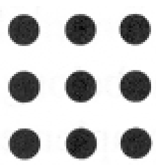
Slika 151. [4] Dilatacija slike $\mathbf{A_1}$ strukturnim elementom $\mathbf{B_1}$ koji ne sadrži koordinatni početak

Očito je da dilatacija dovodi do povećanja objekta na uštrb pozadine. Zapitajmo se kako bi trebao da izgleda strukturni element ako želimo da se objekat proširi u svim smjerovima za jedan piksel, kao na Slici 152.



Slika 152. Dilatacija objekta za jedan piksel u svim smjerovima

Iz prvog primjera je vidljivo da strukturni element koji sadrži prvi piksel desno od ishodišta dovodi do širenja objekta udesno za jedan piksel. Za širenje objekta u svim smjerovima za jedan piksel strukturni element treba da bude kvadrat dimenzija 3x3 sa centrom u ishodištu, kao na Slici 153. Taj strukturni element ćemo zvati *prosti strukturni element*.



Slika 153. Prosti strukturni element

Osobine dilatacije

Dilatacija je komutativna:

$$D(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \mathbf{B} \oplus \mathbf{A} = D(\mathbf{B},\mathbf{A}).$$

Dilatacija je asocijativna:

$$D(\mathbf{A}, D(\mathbf{B},\mathbf{C})) = \mathbf{A} \oplus (\mathbf{B} \oplus \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) \oplus \mathbf{C} = D(D(\mathbf{A},\mathbf{B}),\mathbf{C}).$$

Dilatacija je invarijantna na translaciju:

$$D(\mathbf{A},(\mathbf{B}+z)) = \mathbf{A} \oplus (\mathbf{B}+z) = (\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) + z = D(\mathbf{A},\mathbf{B}) + z .$$

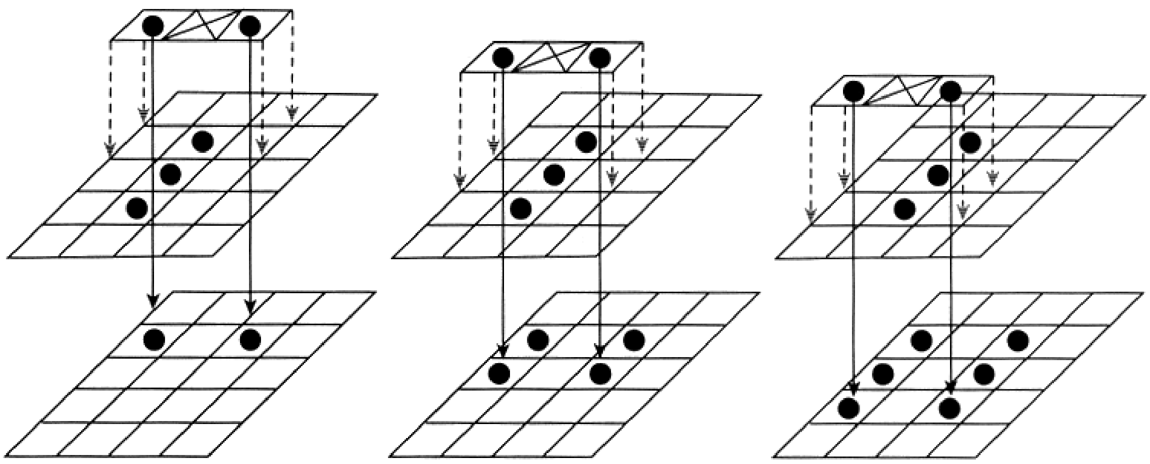
Dilatacija se posmatra kao unija svih translacija slike **A** koje su specificirane strukturnim elementom:

$$D(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \bigcup_{b \in \mathbf{B}} (\mathbf{A})_b .$$

Budući da je dilatacija komutativna, možemo je posmatrati kao uniju svih translacija strukturnog elementa koje su specificirane pikselima slike:

$$D(\mathbf{B},\mathbf{A}) = \mathbf{B} \oplus \mathbf{A} = \bigcup_{a \in \mathbf{A}} (\mathbf{B})_a .$$

Posmatrajmo strukturni element kao masku koju pomijeramo preko slike, Slika 154. Kada se koordinatni početak strukturnog elementa poklopi sa crnim pikselom slike (pikselom objekta), svi pikseli slike koji odgovaraju crnim pikselima strukturnog elementa se markiraju da bi kasnije, kad strukturni element pređe preko cijele slike, svi markirani elementi bili promijenjeni u crno. Normalno, dilatacija se ne računa "in place", tj., rezultat se ne upisuje u originalnu sliku, već se formira treća slika koja je inicijalno bijela i koja se koristi za smještanje rezultata dilatacije u toku računanja.



Slika 154. [4] Dilatacija