

Vježba 7. Estimacija spektra stohastičkih signala (periodogram)

1. Stohastički signali se u mnogim slučajevima mogu modelirati kao obojeni šum, odnosno, kao izlaz iz linearnog vremenski nepromjenljivog filtra pobuđenog Gausovim bijelim šumom. Neka je prenosna funkcija filtra data sa:

$$H(z) = 0,06 \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1,3z^{-1} + 0,845z^{-2}} \quad (1)$$

- Nacrtati impulsni odziv filtra i odrediti trajanje prelaznog režima.
2. Nacrtati grafik tačne spektralne gustine snage izlaznog signala.
 3. Generisati uzorak Gausovog bijelog šuma nulte srednje vrijednosti i varijanse 1. Koristiti npr. funkciju `randn`. Broj odmjerača treba da bude za 8192 veći od trajanja prelaznog režima.
 4. Generisati obojeni šum kao izlaz filtra iz tačke 1. pobuđenog Gausovim bijelim šumom iz tačke 4. Pošto se odmjerci signala koji odgovaraju prelaznom režimu neće koristiti za estimaciju spektra potrebno je formirati signal dužine 8192 odmjerača dobijen odbacivanjem odmjerača sa početka uzorka koji odgovaraju prelaznom režimu filtra. Nacrtati 1024 odmjerača slučajnog signala.
 5. Izračunati periodograme signala iz tačke 5. za prozore dužine $M = 32, 64, 256$ i 512 . FFT u svakom od slučajeva računati u 1024 tačke uz odgovarajuće dopunjavanje nulama. Nacrtati ova četiri periodograma korištenjem `subplot` naredbe. Na svakom od grafika nacrtati i tačnu spektralnu gustinu snage radi poređenja. Koja osobina estimacije spektralne gustine snage se poboljšava sa povećanjem M ? Koja se ne poboljšava?
 6. Bolji rezultati se dobijaju usrednjavanjem periodograma. Klasična metoda koja se koristi je Velč-Bartlettova (Welch-Bartlett) procedura. Neka je dato N odmjerača signala $y(n)$ koji predstavlja jednu realizaciju ergodičnog procesa. Ovaj uzorak se može podijeliti u L segmenata dužine M , pri čemu se ovi segmenti mogu i preklapati. Jednostavnosti radi, smatraćemo da je L cijeli broj. Estimacija spektralne gustine snage je srednja vrijednost L periodograma

$$P_{xx}^w(\omega) = \frac{1}{L} \sum_{r=0}^{L-1} \tilde{P}_{xx}^{(r)}(\omega) \quad (2)$$

gdje je periodogram r -tog segmenta

$$\tilde{P}_{xx}^{(r)}(\omega) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_r(n) e^{-j\omega n} \right|^2 \quad (3)$$

Ovaj segment signala generisan je primjenom prozorske funkcije na signal $y(n)$:

$$x_r(n) = w(n) y(n + r(M - M_0)), \quad (4)$$

gdje je M_0 broj odmjerača u kojima se preklapaju dva susjedna segmenta signala. Vrijednost U u jednačini (1) je normalizujući faktor i iznosi:

$$U = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} w^2(n). \quad (5)$$

Napisati funkciju za Welch-Bartletovu proceduru estimacije spektra `wbpsd`. Ideja je da se formira matrica sa L vrsta i N_{fft} kolona u kojoj će se u r -toj vrsti nalaziti odmjerci periodograma r -tog segmenta. Odmjerci spektralne gustine snage se onda dobijaju izračunavanje srednje vrijednosti dobijene matrice po kolonama i normalizacijom sa U . Kostur funkcije izgleda ovako:

```
function Pxx = wbpsd(x, L, M, M0, w, Nfft)
% x - odmjerci signala
% L - broj segmenata
% M - duzina segmenta
% M0 - preklapanje segmenata
% w - odmjerci prozorske funkcije (mora biti duzine N)
% Nfft - broj tacaka FFT

x = x(:);
w = w(:);
N = length(x);
% izracunati maksimalan moguci broj segmenata
L1 = fix((N - M0)/(M - M0));
if L > L1
    error('Uzorak signala nije dovoljno dugacak!')
end
p = 1; % pocetak segmenta
q = M; % kraj segmenta
P = zeros(L, Nfft); % inicijalizacija matrice
for i = 1:L
    % ovdje ubaciti izracunavanje
    % periodograma r-tog segmenta
    % pomjeriti p i q tako da ukazuju na
    % pocetak i kraj sledeceg segmenta
end
Pxx = mean(P); % izracunavanje srednje vrijednosti
% izracunati U i normalizovati Pxx sa U
```

7. Korištenjem funkcije napisane u prethodnoj tački izračunati estimacije spektralne gustine snage signala iz tačke 4. za $M = 32, 64, 256$ i 512 . Broj segmenata treba da bude $L = 8$, preklapanje između segmenata jednako nuli. Koristiti pravougaoni prozor. Nacrtati ova četiri periodograma korištenjem `subplot` naredbe. Na svakom od grafika nacrtati i tačnu spektralnu gustinu snage radi poređenja. Koja osobina estimacije spektralne gustine snage se poboljšava sa uvođenjem usrednjavanja? Koja se ne poboljšava?
8. Fiksirati sada dužinu segmenta na $M = 256$, a mijenjati broj segmenata koji se koriste pri usrednjavanju $L = 4, 8, 16$ i 32 . Preklapanje između segmenata treba da bude jednako nuli i koristi se pravougaoni prozor. Nacrtati ova četiri periodograma korištenjem `subplot` naredbe. Na svakom od grafika nacrtati i tačnu spektralnu gustinu snage radi poređenja. Koja osobina estimacije spektralne gustine snage se poboljšava sa uvođenjem usrednjavanja? Koja se ne poboljšava?