Univerzitet u Banjaluci
Elektrotehnički fakultet
Katedra za opštu elektrotehniku
Digitalna obrada signala

Vježba 8.
Wienerov filtar

Uvod

Pretpostavimo da želimo da estimiramo signal $x(n)$ narušen aditivnim šumom $v(n)$ na osnovu mjerenja:

$$z(n) = x(n) + v(n) \tag{1}$$

Posmatrajmo FIR filtar reda p, na čiji ulaz dovodimo diskretni signal $z(n)$, $n = 0,1,...$ Signal na izlazu filtra $\hat{x}(n)$ dat je izrazom

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{p} h_i z(n-k), \quad n = 0,1,2,... \tag{2}$$

gdje su h_i, $i = 0, 1,..., p$ koeficijenti filtra. Potrebno je odrediti njihove vrijednosti tako da se filtar može upotrebiti za estimaciju signala $x(n)$, $n = 0, 1,...$

Definišimo najprije trenutnu grešku, $e(n)$:

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n). \tag{3}$$

Pošto su u opštem slučaju signali $x(n)$ i $\hat{x}(n)$ slučajne veličine i trenutna greška, data jednačinom (3) biće slučajna veličina. Jasno je da u ovom slučaju kao kriterijum optimalnosti estimacije ne možemo uzeti sumu kvadrata trenutnih grešaka, jer bi ona ponovo bila slučajna veličina. Da bismo odredili optimalne koeficijente filtra, funkciju cijene moramo definisati korišćenjem matematičnog očekivanja, odnosno funkciju cijene predstavlja *srednjekvadratna greška*, definisana sa:

$$J = E\left[e^2(n)\right] = E\left[\left(x(n) - \hat{x}(n)\right)^2\right]. \tag{4}$$

Uvođenjem matrične notacije,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}(n) = \begin{bmatrix} z(n) \\ z(n-1) \\ \vdots \\ z(n-p) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

odziv filtra, dat jednačinom (2), možemo pisati u obliku:

$$\hat{x}(n) = \mathbf{H}^T \mathbf{Z}(n). \tag{6}$$

Funkcija cijene se za signale stacionarne u širem smislu može odrediti pomoću jednačine

$$J = r_{xx}(0) + \mathrm{H}^T \mathrm{R}_{zz} \mathrm{H} - 2\mathrm{R}_{xz}^T \mathrm{H}, \tag{7}$$

gdje su:

$r_{xx}(0)$ – varijansa signala $x(n)$,

$$\mathbf{R}_{zz} = \begin{bmatrix} r_{zz}(0) & r_{zz}(1) & r_{zz}(2) & \cdots & r_{zz}(p) \\ r_{zz}(1) & r_{zz}(0) & r_{zz}(1) & \cdots & r_{zz}(p-1) \\ r_{zz}(2) & r_{zz}(1) & r_{zz}(0) & \cdots & r_{zz}(p-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{zz}(p) & r_{zz}(p-1) & r_{zz}(p-2) & \cdots & r_{zz}(0) \end{bmatrix}$$ - autokorelaciona matrica signala $z(n)$,

$$\mathbf{R}_{xz} = \begin{bmatrix} r_{xz}(0) \\ r_{xz}(1) \\ r_{xz}(2) \\ \vdots \\ r_{xz}(p) \end{bmatrix}$$ - kroskorelaciona matrica signala $x(n)$ i $z(n)$.

Matrica $\mathbf{R}_{zz}$ je simetrična Toeplitzova matrica.

Minimizacijom funkcije cijene date jednačinom (4.4) s obzirom na vektor koeficijenata filtra $\mathbf{H}$, dobija se optimalni vektor koeficijenata filtra $\mathbf{H} = \mathbf{H}^*$ kao rješenje *Wiener-Hopfove jednačine*

$$\mathbf{R}_{zz}\mathbf{H} = \mathbf{R}_{xz}, \tag{8}$$

odnosno

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{R}_{zz}^{-1}\mathbf{R}_{xz}. \tag{9}$$

Za tako određen vektor koeficijenata filtra dobija se minimalna srednjekvadratna greška (minimalna funkcija cijene)

$$J_{\min} = r_{xx}(0) - \mathbf{R}_{xz}^{T}\mathbf{H}^*. \tag{10}$$

Rad na računaru

TOEPLITZ Formira Toeplitzovu matricu na osnovu zadatog vektora
`R = toeplitz(r)` vraća simetričnu Toeplitzovu matricu određenu vektorom `r`.

WKEEP
`Y = wkeep(X,L,OPT)` izdvaja iz vektora X dio dužine L. OPT može imati vrijednosti 'c', 'l' i 'r' kojima se izdvaja centralni, lijevi ili početni dio vektora, respektivno.

Zadatak

1. Dat je signal opisan jednačinom diferencija:

$$x(n) = 0.9x(n-1) + w(n),$$

   gdje je $w(n)$ Gausov bijeli šum nulte srednje vrijednosti i varijanse $\sigma_w^2 = 0.19$. Analitičkim putem odrediti autokorelacionu funkciju signala $x(n)$.

2. Neka je signal $z(n)$ dobijen mjerenjem signala $x(n)$ u prisustvu Gausovog bijelog šuma $v(n)$ nulte srednje vrijednosti i varijanse $\sigma_v^2 = 0.5$. Dakle, $z(n) = x(n) + v(n)$. Analitičkim putem odrediti autokorelacionu funkciju signala $z(n)$.
3. Napisati program u MATLAB-u koji će projektovati optimalni (Wienerov) FIR filtar zadatog reda za izdvajanje signala $x(n)$ iz signala $z(n)$. Kolika se srednjekvadratna greška dobija za filtre nultog, prvog, drugog i trećeg reda?
4. Generisati 100 odmjeraka signala $x(n)$ i $z(n)$. Signal $z(n)$ propustiti kroz filtar projektovan u prethodnoj tački. Uporedo nacrtati ulazni, $z(n)$, željeni, $x(n)$, i dobijeni signal, $\hat{x}(n)$ za svaki od filtara. Signale crtati pomoću komande plot, označavajući tačke i povezujući ih pravolinijskim segmentima. Obratiti pažnju na indekse nizova.

Uklanjanje šuma iz audio signala pomoću Wienerovog filtra

1. U priloženom fajlu a01.wav nalazi se snimljen glas a. Pošto je uzorak signala dugačak, izdvojite samo 8001 odmjerak ovog signala. Uklonite jednosmjernu komponentu signala oduzimanjem njegove srednje vrijednosti i normalizujte snagu signala na jediničnu dijeljenjem sa standardnom devijacijom.
2. Signal ćemo narušiti obojenim šumom generisanim tako što se kroz FIR filtar sa koeficijentima $h_1(n) = \frac{1}{256}\{\text{-16; -19; -22; -24; -25; 230; -25; -24; -22; -19; -16}\}$ propusti Gausov bijeli šum nulte srednje vrijednosti i varijanse 1. Broj generisanih odmjeraka bijelog šuma treba da bude veći od 8001 bar za dvostruku dužinu impulsnog odziva filtra, da bi se izbjegli prelazni procesi prilikom generisanja obojenog šuma. Nakon toga, obojeni šum možete generisati pomoću funkcije `conv`. Konačno, prelazne procese na početku i na kraju odziva filtra možete izbjeći uzimanjem centralnog dijela odziva dužine 8001 odmjerak pomoću funkcije `wkeep`.
3. Generisati narušeni signal dodavanjem 10 puta pojačanog obojenog šuma signalu iz tačke 1. Poslušati dobijeni signal.
4. Projektovati Wienerov FIR filtar dužine 80 za uklanjanje šuma. Autokorelacione i kroskorelacione funkcije estimirajte pomoću funkcije `xcorr`. Vodite računa o činjenici da je govorni signal kvazistacionaran i da vrijednosti korelacija za velike pomake mogu biti netačne. Odredite koeficijente Wienerovog filtra rješavanjem Wiener-Hopfove jednačine.
5. Filtrirati narušeni signal dobijenim filtrom. Poslušati dobijeni signal.