Univerzitet u Banjaluci
Elektrotehnički fakultet
Katedra za opštu elektrotehniku
Digitalna obrada signala

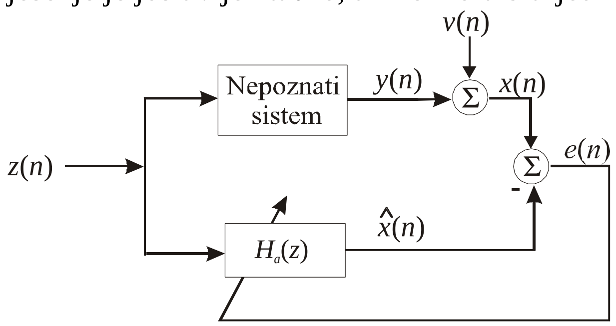
Vježba 9.

Adaptivna identifikacija sistema pomoću LMS algoritma

Uvod

Adaptivni filtar uspješno se koristi za modeliranje nepoznatih dinamičkih sistema. Na slici 1. ilustrovana je šema modeliranja dinamičkog sistema sa jednim ulazom i sa jednim izlazom. Na ulaz nepoznatog sistema i adaptivnog filtra dovodi se isti signal. Adaptivni filtar podešava se tako da signal na njegovom izlazu odgovara signalu na izlazu nepoznatog sistema po nekom od kriterijuma optimalnog procesiranja. U tom smislu adaptivni filtar $H_a(z)$ je model nepoznatog sistema. Drugim riječima, pomoću adaptivnog filtra smo izvršili adaptivnu identifikaciju sistema. Ako je izlazna greška jednaka nuli, onda kažemo da $H_a(z)$ tačno identifikuje nepoznati sistem. U mnogim aplikacijama, adaptivna identifikacija sistema ima prednost nad klasičnim modeliranjem metodom najmanjih kvadrata. To je evidentno kod sistema koji rade u nestacionarnom okruženju, gdje se karakteristike sistema mijenjaju u toku rada.

Dva uslova moraju biti ispunjena da bi adaptivni filtar bio tačan model nepoznatog sistema. Prvi je da ulazni niz $\{z(n)\}$ sadrži dovoljno informacija da eksituje sve modove sistema. Ovo se postiže ako se izabere bijeli šum za eksitaciju. Drugi uslov je da je $H_a(z)$ dovoljno kompleksna (dovoljno visokog reda) da se prilagodi svim stepenima slobode nepoznatog sistema. Na primjer, ako se koristi FIR model da identifikuje IIR sistem, onda se zahtjeva da $H_a(z)$ bude vrlo visokog reda. Ako se izabere previsok red onda adaptivni proces može konvergirati presporo, rješenje je još uvijek tačno, ali ne mora biti jednoznačno.



Slika 1. Adaptivna identifikacija sistema

Posmatrajmo adaptivni sistem za identifikaciju prikazan na slici 1. Nepoznati sistem i model se pobuđuju signalom $z(n)$. Da bi identifikacija bila uspješna, poželjno je da ovaj signal ima što je moguće širi frekvencijski opseg. Imajući u vidu ovaj uslov, kao pobuda se nameće bijeli šum, nulte srednje vrijednosti i poznate varijanse. Na izlazu iz nepoznatog sistema dobija se signal $y(n)$, na koji djeluje šum mjerenja $v(n)$, tako da je izmjereni signal $x(n) = y(n) + v(n)$, što je ujedno i željeni signal u našem adaptivnom procesu. S druge strane izlaz iz modela je signal $\hat{x}(n)$. Signal greške definišemo kao razliku izmjerenog odziva nepoznatog sistema i izlaza iz modela, u datom trenutku: $e(n) = x(n) - \hat{x}(n)$.

Potrebno je odrediti parametre modela na takav način da se minimizira srednjekvadratna greška definisana sa

$$J(n) = E\left[e^2(n)\right].$$

Dakle, radi se o problemu određivanja optimalnog filtra. Ukoliko je adaptivni model $H_a(z)$ FIR filtar, do rješenja ovog problema dolazi se rješavanjem Wiener-Hopfove jednačine:

$\mathbf{Rh} = \mathbf{p}$,

gdje je $\mathbf{R}$ autokorelaciona matrica ulaznog signala $z(n)$, $\mathbf{p}$ kros-korelacioni vektor između ulaznog signala $z(n)$ i željenog odziva $x(n)$, a $\mathbf{h}$ vektor koeficijenata FIR filtra.

Ukoliko su poznate tačne vrijednosti vektora gradijenta algoritmom najbržeg spusta stiže se do rješenja optimalnog u Wienerovom smislu. Međutim, da bi se odredila vrijednost gradijenta potrebno je poznavati autokorelacionu matricu **R** ulaznog signala i kros-korelacioni vektor **p** između ulaznog signala i željenog odziva. Očigledno ovo nije uvijek slučaj pa je potrebno da se vektor gradijenta estimira na osnovu raspoloživih podataka. Najjednostavnije rješenje estimatora za **R** i **p** je da se koriste *trenutne estimacije*:

$\hat{\mathbf{R}}(n) = \mathbf{z}(n)\mathbf{z}^T(n)$

i

$\hat{\mathbf{p}}(n) = \mathbf{z}(n)d(n)$.

Sada je trenutna estimacija vektora gradijenta:

$\hat{\nabla} J(n) = -2\mathbf{z}(n)d(n) + 2\mathbf{z}(n)\mathbf{z}^T(n)\hat{\mathbf{h}}(n) = -2\mathbf{z}(n)\left[d(n) - \mathbf{z}^T(n)\hat{\mathbf{h}}(n)\right] = -2\mathbf{z}(n)e(n)$,

gdje je sa $\hat{\mathbf{h}}(n)$ označena vrijednost vektora koeficijenata filtra u *n*-toj iteraciji. Kapica iznad ove oznake koristi se da bi se naglasila razlika u odnosu na odgovarajuću veličinu kod algoritma najbržeg spusta.

Ukoliko se u izraz za adaptaciju vektora koeficijenata uvrsti dobijena trenutna estimacija vektora gradijenta dobija se matematička formulacija LMS algoritma (Widrow & Hoff)

$\hat{\mathbf{h}}(n+1) = \hat{\mathbf{h}}(n) + \mu\mathbf{z}(n)\left[d(n) - \mathbf{z}^T(n)\hat{\mathbf{h}}(n)\right]$.

LMS algoritam se sastoji od dva procesa:

1. *Filtriranje*, u okviru kojeg se izračunava odziv filtra za trenutni vektor koeficijenata $\hat{x}(n) = \hat{\mathbf{h}}^T(n)\mathbf{z}(n)$, i određuje trenutna greška estimacije: $e(n) = d(n) - \hat{x}(n)$;
2. *Adaptacija*, koja uključuje podešavanje vrijednosti koeficijenata filtra u skladu sa greškom estimacije: $\hat{\mathbf{h}}(n+1) = \hat{\mathbf{h}}(n) + \mu\mathbf{z}(n)e(n)$.

Kod LMS algoritma se za adaptaciju koeficijenata filtra koristi estimacija gradijenta koja predstavlja slučajnu veličinu, tako da se u svakom koraku u slučajnom smjeru pomjeramo po površi definisanoj srednjekvadratnom greškom. Zato LMS algoritam pripada klasi algoritama sa *stohastičkim gradijentom*. Iz istog razloga vektor težina neće težiti Wienerovom rješenju već će ispoljavati slučajno kretanje oko minimalne tačke površi definisane srednjekvadratnom greškom. Konvergencija algoritma je posljedica njegove rekurzivnosti koja vrši usrednjavanje procjena gradijenta tokom procesa adaptacije.

Pitanje stabilnosti je aktuelno i kod LMS algoritma i može se pokazati da je algoritam stabilan ako se vrijednost koraka μ izabere tako da bude zadovoljena dvostruka nejednačina:

$$0 < \mu < \frac{2}{\text{ulazna snaga}} = \frac{2}{\sum_{k=0}^{M} E\left[\left|u(n-k)\right|^2\right]}.$$

Zadatak

Dat je FIR filtar četvrtog reda sa koeficijentima $\mathbf{h} = \{1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 1\}$. Neka ovaj filtar predstavlja nepoznati sistem sa slike 1.

1. Napisati program u MATLAB-u koji će implementirati LMS algoritam sa sledećim parametrima
   Ulazni podaci:
   - z – vektor ulaznih podataka,
   - x – vektor željenog odziva,
   - p – red adaptivnog sistema,
   - mi – veličina koraka,

   Izlazni podaci
   - xest – vektor izlaznih podataka (estimacija),
   - h – vektor koeficijenata filtra,
   - err – kvadrat trenutne greške.
2. Na ulaz adaptivnog sistema dovesti bijeli Gaussov šum, nulte srednje vrijednosti i varijanse 0.8. Šum mjerenja je takođe bijeli Gaussov šum nulte srednje vrijednosti i varijanse 0.1. Generisati 500 odmjeraka signala na izlazu nepoznatog sistema $y(n)$ i signala mjerenja $x(n)$.
3. Koristeći LMS algoritam modelirati nepoznati sistem FIR filtrom 4. reda (5 koeficijenata). Prikazati promjenu koeficijenata filtra i kvadrata trenutne greške tokom adaptacije i impulsni odziv dobijenog filtra. Takođe, uporedo prikazati izlaz iz nepoznatog sistema $y(n)$ i izlaz iz adaptivnog filtra $\hat{x}(n)$. Simulacije izvršiti za korake veličine 0.01 i 0.1.
4. Ponoviti tačku 3. za FIR filtre 2. i 8. reda.