Univerzitet u Banjaluci
Elektrotehnički fakultet
Katedra za opštu elektrotehniku
Digitalna obrada signala

Vježba 5.
Furijeova transformacija diskretnih signala

Furijeova transformacija je jedan od osnovnih alata za analizu signala uopšte. Furijeova transformacija diskretnog signala data je sa:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}\ , \tag{1}$$

a inverzna Furijeova transformacija sa:

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega\ . \tag{2}$$

Furijeova transformacija diskretnog signala (Discrete-Time Fourier Transform, DTFT) je kompleksna periodična funkcija kontinualne promjenljive ω. Njen period je 2π. Za osnovni period se obično uzima $[-\pi,\pi)$. Dva problema su vezana za izračunavanje Furijeove transformacije diskretnog signala korištenjem MATLAB-a:

1. DTFT je definisana za signale *beskonačnog trajanja*;
2. DTFT je funkcija kontinualne promjenljive ω.

U MATLAB-u signali moraju biti konačnog trajanja tako da pomoću MATLAB-a nije moguće izračunati DTFT signala beskonačnog trajanja. U nekim slučajevima je moguće analitičkim putem doći do Furijeove transformacije signala, a zatim korištenjem MATLAB-a izračunati njene vrijednosti i grafički prikazati amplitudni i fazni spektar signala.

Drugi problem je vezan za činjenicu da je pomoću MATLAB-a jedino moguće izračunati vrijednosti kontinualne funkcije kao što je $X\left(e^{j\omega}\right)$ u diskretnom skupu tačaka. Kako bi se dobila glatka aproksimacija DTFT potrebno je izabrati dovoljan broj tačaka na malom međusobnom rastojanju. Obično se biraju ekvidistantne tačke na intervalu $[-\pi,\pi)$ ili $[0,2\pi)$. U ovom slučaju DTFT signala *konačnog trajanja L* postaje:

$$X\left(e^{j\omega_k}\right)=X\left(e^{j2\pi k/N}\right)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)e^{-j(2\pi k/N)n},\quad k=0,1,\ldots,N-1\ . \tag{3}$$

Korištenjem ove jednačine vrijednosti za $-\pi\le\omega<0$, odnosno, $\pi\le\omega<2\pi$ se dobijaju za $k>N/2$.

Kada je $N=L$ jednačina (3) je, u stvari, diskretna Furijeova transformacija (DFT), kojom ćemo se više baviti u narednoj vježbi. Ipak, prilikom odmjeravanja DTFT ne postoji ograničenje na vrijednosti N i L. Tako, ukoliko je $N>L$, signal $x(n)$ se može dopuniti nulama nakon čega je moguće iskoristiti DFT u *N* tačaka. U slučaju kada je $N<L$ korektno izračunavanje DTFT korištenjem DFT zahtijeva vođenje računa o preklapanju u vremenu. Međutim, ovo pitanje izlazi iz okvira ove vježbe. Za sada je dovoljno voditi računa o tome da se DTFT izračuna u (mnogo) više frekvencija nego što iznosi trajanje originalnog signala u vremenu.

Za izračunavanje DTFT signala konačnog trajanja u ovoj vježbi ćemo koristiti funkciju `dtft` (data na web stranici predmeta) u čijoj osnovi se nalazi DFT. O vezi između ovih transformacija više riječi će biti u sledećoj vježbi. Sintaksa ove funkcije je:

```
[H, W] = dtft(h, N);
```

gdje je `h` vektor konačne dužine u kojem se nalaze odmjerci signala, a `N` broj tačaka u kojima se želi izračunavanje odmjeraka DTFT. U izlaznom vektoru `H` nalaze se (kompleksni) odmjerci DTFT, a u vektoru `W` vrijednosti digitalnih frekvencija u kojima su izračunati odmjerci DTFT. Ove digitalne frekvencije su iz opsega $[-\pi, \pi)$.

Spektar diskretnog signala izračunat korištenjem funkcije `dtft` može se nacrtati na sledeći način:

```
a = 0.88 * exp(j*2*pi/5);
nn = 0:40;
xn = a.^nn;
[X, W] = dtft(xn, 128);
subplot(211), plot(W/pi, abs(X)); grid
title('Amplitudni spektar')
xlabel('\omega/\pi'); ylabel('|H(\omega)|')
subplot(212), plot(W/pi, angle(X)); grid
title('Fazni spektar')
xlabel('\omega/\pi'); ylabel('stepeni')
```

Važno je primijetiti da je u gornjem isječku koda za grafičko prikazivanje spektra signala korištena naredba `plot`. Razlog za ovo je što je DTFT kontinualna funkcija ω. Često se amplitudni spektar crta na logaritamskoj skali i u tom slučaju se izražava u decibelima (dB).

$$G(\omega) = 20\log\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|[\mathrm{dB}] \tag{4}$$

```
plot(W/pi, 20*log10(abs(X))); grid
title('Amplitudni spektar')
xlabel('\omega/\pi'); ylabel('G(\omega)')
```

Kao što je već pomenuto, DTFT signala beskonačnog trajanja nije moguće izračunati u opštem slučaju. Ipak, za značajnu klasu signala, eksponencijalne signale, DTFT ima oblik racionalne funkcije po $e^{-j\omega}$:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{B\left(e^{j\xi}\right)}{A\left(e^{j\omega}\right)} = \frac{\sum_{l=0}^{Q} b_l e^{-j\omega l}}{\sum_{k=0}^{P} a_k e^{-j\omega k}}. \tag{5}$$

Za izračunavanje vrijednosti ove funkcije u MATLAB-u se može iskoristiti funkcija `freqz` čija je sintaksa:

```
[H, W] = freqz(b, a, N, 'whole');
```

gdje su `b` i `a` koeficijenti brojnika i nazivnika u jednačini (5), `N` broj tačaka u kojima se izračunava DTFT, a `'whole'` je opcioni argument kojim se specificira opseg frekvencija $[0,2\pi)$. Ukoliko se izostavi podrazumijeva se izračunavanje DTFT u `N` tačaka na intervalu $[0,\pi)$. U izlaznom vektoru `H` su vrijednosti DTFT u frekvencijama datim u `W`.

Priprema

1. Neka je dat pravougaoni impuls:

$$r(n)=\begin{cases}1, & 0\le n<L\\ 0, & \text{inače}\end{cases}. \tag{6}$$

   Pokazati da je DTFT signala $r(n)$ data sa:

$$R\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\sin\frac{1}{2}\omega L}{\sin\frac{1}{2}\omega}e^{-j\omega(L-1)/2}. \tag{7}$$

2. Odrediti analitički izraz za DTFT signala $x(n)=(0{,}9)^n u(n)$. Signal je beskonačnog trajanja ali se DTFT može naći u analitičkom obliku.

3. Odrediti analitički izraz za DTFT signala $x(n)=\left(0{,}95e^{j3\pi/11}\right)^n u(n)$.

4. Odrediti analitički izraz za DTFT signala $x(n)=3(0{,}95)^n\cos(2\pi n/5+\pi/3)u(n)$. Do rezultata ćete lakše doći ako signal izrazite kao zbir dvije kompleksne eksponencijalne funkcije.

Zadaci

1. Generisati pravougaoni impuls, jednačina (6), dužine $L = 12$. Korištenjem funkcije `dtft` izračunati, a zatim i nacrtati njegov amplitudni spektar na intervalu $-\pi\le\omega<\pi$. Broj odmjeraka u frekvenciji izabrati tako da bude 5 do 10 puta veći od dužine impulsa. Označiti vremensku osu na odgovarajući način. Uporediti rezultat sa analitičkim izrazom (7) dobijenim u tački 1. pripreme. Obratiti pažnju na položaje nula i visinu maksimuma.
2. Nacrtati fazni spektar signala iz prethodne tačke na intervalu $-\pi\le\omega<\pi$. Da li dobijeni rezultat odgovara analitičkom izrazu dobijenom u tački 1. pripreme? Ako to nije slučaj proučite i iskoristite MATLAB-ovu funkciju `unwrap.` Da bi ova funkcija bila uspješna potrebno je, međutim, dosta gusto odmjeravanje po frekevencijskoj osi.
3. Ponoviti zadatak za impuls dužine $L = 15$.
4. Izračunati DTFT signala $x(n)=(0.9)^n$. Nacrtati njegov amplitudni i fazni spektar na intervalu $-\pi\le\omega<\pi$. Kako biste ovo izveli proučite funkciju `fftshift`.
5. Izračunati DTFT signala $x(n)=\left(0{,}95e^{j3\pi/11}\right)^n u(n)$. Nacrtati njegov amplitudni i fazni spektar na intervalu $-\pi\le\omega<\pi$. Uočite položaj maksimuma amplitudnog spektra.

6. Izračunati DTFT signala $x(n) = 3(0,95)^n \cos(2\pi n/5 + \pi/3)u(n)$. I ovom prilikom se možete poslužiti reprezentacijom signala kao zbira dvije kompleksne eksponencijalne funkcije.

7. Dat je signal $x(n) = a^n u(n)$. Nacrtati amplitudni spektar u dB za uzorke signala $x(n)$ dužine L = 32, 64, 128 i 256. Vrijednost a = 0,977. Sva četiri grafika nacrtati pomoću `subplot`. Na svakom grafiku linijom drugačije boje nacrtajte pravi amplitudni spektar $x(n)$. Komentarisati promjene koje se mogu uočiti kada se povećava dužina uzorka L.