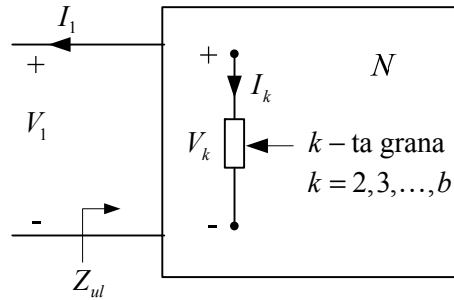


SINTEZA ELEKTRIČNIH MREŽA SA JEDNIM PRISTUPOM

U Glavi 2 smo se bavili pronalaženjem funkcije prenosa sistema koji treba da ispuni postavljene zahtjeve za obradu signala. Sljedeći korak je sinteza sistema koji treba da ima zadatu funkciju prenosa. Mi ćemo se zadržati na sintezi sistema u vidu električnih mreža, s krajnjim ciljem da dođemo do šeme električne mreže koja filtrira signal prema postavljenim zahtjevima. U ovoj glavi ćemo razmatrati sintezu pasivnih, linearnih i recipročnih, vremenski nepromjenljivih električnih mreža sa jednim pristupom. Sintezu električnih mreža sa dva pristupa, koje su značajne sa stanovišta obrade signala, ćemo razmatrati u kontekstu projektovanja i realizacije električnih filtara u narednim glavama. Za razumijevanje metoda sinteze mreža sa dva pristupa, neophodno je poznavanje osobina i metoda sinteze mreža sa jednim pristupom, čiji je opšti oblik prikazan blok šemom na Slici 3.1.



Slika 3.1 Blok šema mreže sa jednim pristupom.

Zbog dualnih osobina i jednostavnosti izlaganja, u nastavku ćemo impedansu Z i admitansu Y zvati jednim imenom *imitansa* i označavati sa F .

Uz pretpostavku da je mreža N na Slici 3.1 pasivna i da sadrži samo otpornike, kalemove i kondenzatore (RLC mreža), vrijedi Telegenova teorema:

$$\sum_{k=1}^b V_k(s) I_k^*(s) = 0, \quad (3.1)$$

odnosno:

$$-V_1(s) I_1^*(s) = \sum_{k=2}^b V_k(s) I_k^*(s) = \sum_R V_k(s) I_k^*(s) + \sum_L V_k(s) I_k^*(s) + \sum_C V_k(s) I_k^*(s), \quad (3.2)$$

gdje smo u odvojene sume grupisali snage na otpornicima, kalemovima i kondenzatorima. Veze između napona i struja na ulazu, te na pojedinim elementima mreže (otpornicima, kalemovima i kondenzatorima) date su sljedećim relacijama:

$$V_1(s) = -Z_{ul}(s) I_1(s), \quad (3.3)$$

$$V_k(s) = R_k I_k(s), \quad (3.4)$$

$$V_k(s) = L_k s I_k(s), \quad (3.5)$$

$$V_k(s) = \frac{1}{C_k s} I_k(s), \quad (3.6)$$

pri čemu su:

$$R_k, L_k, C_k > 0. \quad (3.7)$$

Na osnovu (3.1) do (3.7) dolazimo do opšte forme ulazne impedanse RLC mreže:

$$Z_{ul}(s) |I_1(s)|^2 = \sum_R R_k |I_k(s)|^2 + \sum_L L_k s |I_k(s)|^2 + \sum_C \frac{1}{C_k s} |I_k(s)|^2, \quad (3.8)$$

$$Z_{ul}(s) = \sum_R R_k \frac{|I_k(s)|^2}{|I_1(s)|^2} + s \sum_L L_k \frac{|I_k(s)|^2}{|I_1(s)|^2} + \frac{1}{s} \sum_C \frac{1}{C_k} \frac{|I_k(s)|^2}{|I_1(s)|^2}. \quad (3.9)$$

Nakon smjene:

$$s = \sigma + j\Omega, \quad (3.10)$$

zapišimo ulaznu impedansu u obliku:

$$\begin{aligned} Z_{ul}(s) = & \sum_R R_k \frac{|I_k(s)|^2}{|I_1(s)|^2} + \sigma \sum_L L_k \frac{|I_k(s)|^2}{|I_1(s)|^2} + \frac{\sigma}{\sigma^2 + \Omega^2} \sum_C \frac{1}{C_k} \frac{|I_k(s)|^2}{|I_1(s)|^2} + \\ & + j\Omega \sum_L L_k \frac{|I_k(s)|^2}{|I_1(s)|^2} - j \frac{\Omega}{\sigma^2 + \Omega^2} \sum_C \frac{1}{C_k} \frac{|I_k(s)|^2}{|I_1(s)|^2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Analizirajući (3.11) možemo izvesti sljedeće zaključke. Ako je kompleksna učestanost s realna ($\Omega=0$) ulazna impedansa Z_{ul} je takođe realna. Uz to, ako je $\text{Re}\{s\} \geq 0$ vrijedi da je $\text{Re}\{Z_{ul}\} \geq 0$. Za funkciju koja zadovoljava ova dva uslova kažemo da je pozitivno realna. Do podjednakih zaključaka se dolazi analizom ulazne admitanse RLC mreže. Pozitivno realna funkcija se može realizovati kao ulazna impedansa ili admitansa mreže sa jednim pristupom koja sadrži samo pasivne elemente [4].

Ako pasivna mreža sadrži samo kalemове i kondenzatore (LC mreža), njena aktivna snaga u ustaljenom prostoperiodičnom režimu je jednaka nuli, te je

nazivamo mrežom bez gubitaka. LC mreže sa dva pristupa igraju važnu ulogu u realizaciji filtera zbog pojave rezonancije, kada dolazi naglih promjena amplitudne i fazne karakteristike pri promjeni učestanosti.

Pasivne mreže koje sadrže samo otpornike i kondenzatore nazivamo RC mrežama. U ovoj glavi analiziraćemo njihove osobine i načine sinteze iz zadatih imitansi. Sinteza mreža koje sadrže samo otpornike i kalemove (RL mreža) pasivnim komponentama se vrši na sličan način, ali je od manjeg značaja zbog komplikovane fizičke izvedbe kalemova, te je mreže koje sadrže kalemove bolje realizovati uz pomoć aktivnih komponenti, o čemu će više riječi biti u glavama koje slijede.

3.1 Osobine LC imitansi

LC imitanse su pozitivno realne racionalne funkcije. U ovom poglavlju ćemo analizirati njihove osnovne osobine, čije poznavanje će nam olakšati samu sintezu.

- Nule i polovi LC imitansi leže na imaginarnoj osi u s ravni.

Dokaz:

Posmatrajmo ulaznu impedansu LC mreže:

$$Z_{LC}(s) = s \sum_L L_k \frac{|I_k(s)|^2}{|I_1(s)|^2} + \frac{1}{s} \sum_C \frac{1}{C_k} \frac{|I_k(s)|^2}{|I_1(s)|^2}. \quad (3.12)$$

Uvedimo oznake:

$$\alpha(s) = \sum_L L_k \frac{|I_k(s)|^2}{|I_1(s)|^2} \geq 0, \quad \forall s, \quad (3.13)$$

$$\beta(s) = \sum_C \frac{1}{C_k} \frac{|I_k(s)|^2}{|I_1(s)|^2} \geq 0, \quad \forall s. \quad (3.14)$$

Sada ulaznu impedansu LC mreže možemo zapisati na sljedeći način:

$$Z_{LC}(s) = \alpha(s)s + \frac{1}{s}\beta(s). \quad (3.15)$$

Pri tome ne smijemo izgubiti iz vida da α i β zavise od kompleksne učestanosti s , jer I_k i I_1 zavise od kompleksne učestanosti s , ali je njihova vrijednost veća ili jednaka nuli za svako s . Iz (3.15) zaključujemo da nule ulazne impedanse treba da zadovoljavaju sljedeći uslov:

$$\alpha(s)s + \frac{1}{s}\beta(s) = 0 \Rightarrow \alpha(s)s^2 + \beta(s) = 0. \quad (3.16)$$

Kako sva rješenja (3.16) moraju zadovoljavati uslov:

$$s^2 = -\frac{\beta(s)}{\alpha(s)} < 0, \quad (3.17)$$

zaključujemo da se sve nule LC impedanse nalaze na imaginarnoj osi kompleksne s ravni.

Na sličan način se pokaže da nule admitanse:

$$Y_{LC}(s) = s \sum_C C_k \frac{|V_k(s)|^2}{|V_1(s)|^2} + \frac{1}{s} \sum_L \frac{1}{L_k} \frac{|V_k(s)|^2}{|V_1(s)|^2} \quad (3.18)$$

moraju ležati na imaginarnoj osi kompleksne s ravni.

Na osnovu provedenog razmatranja vezanog za nule LC imitansi i recipročnih veza $Y_{LC}(s) = \frac{1}{Z_{LC}(s)}$ i $Z_{LC}(s) = \frac{1}{Y_{LC}(s)}$, zaključujemo da polovi admitanse i impedanse moraju biti na imaginarnoj osi.

□

- Svaka imitansa LC mreže je neparna racionalna funkcija.

Dokaz:

Za mreže bez gubitaka vrijedi da je aktivna snaga u ustaljenom prostoperiodičnom režimu jednaka nuli:

$$\operatorname{Re}\{Z_{LC}(\Omega)\}|I(\Omega)|^2 = \operatorname{Re}\{Y_{LC}(\Omega)\}|V(\Omega)|^2 = 0, \quad (3.19)$$

što znači da je realni dio LC imitanse jednak nuli:

$$\operatorname{Re}\{F_{LC}(\Omega)\} = 0. \quad (3.20)$$

Posmatrajući samo imaginarni dio izraza (3.11) zaključujemo da je $F_{LC}(s)$ neparna racionalna funkcija kompleksne učestanosti s , te može da se predstavi kao količnik dva polinoma, od kojih je jedan paran označen sa $M(s)$, a drugi neparan označen sa $N(s)$:

$$F_{LC}(s) = \frac{N(s)}{M(s)}, \quad (3.21)$$

ili:

$$F_{LC}(s) = \frac{M(s)}{N(s)}. \quad (3.22)$$

□

- Svi polovi i nule imitanse su jednostruki.

Dokaz:

Da bi LC mreža bila stabilna, njena imitansa $F_{LC}(s)$ ne može imati pol u desnoj poluravni, dok eventualni polovi na imaginarnoj osi moraju biti jednostruki. Već smo vidjeli da se sve nule i polovi LC imitanse nalaze na imaginarnoj osi, tako da znamo da LC imitansa nema polova u desnoj

poluravni koji bi dali odziv koji eksponencijalno raste sa porastom vremena. Ako bi se pojavili višestruki polovi na imaginarnoj osi odziv bi bio oblika $t^n \cos \omega_0 t$ i takođe bi neograničeno rastao sa porastom vremena. Zbog toga zaključujemo da polovi impedanse i admitanse LC mreže moraju biti jednostruki. Zbog recipročne veze impedanse i admitanse, isto vrijedi za njihove nule.

□

- Stepeni polinoma u brojniku i nazivniku razlikuju se tačno za jedan.

Dokaz:

Neophodan uslov da imitansa $F_{LC}(s)$ bude pozitivno realna funkcija je:

$$|d_N - d_M| \leq 1. \quad (3.23)$$

Ako bi razlika stepena polinoma u brojniku i nazivniku bila veća od jedan, pol impedanse ili admitanse u beskonačnosti bi bio višestruk. Kako je $N(s)$ neparan, a $M(s)$ paran polinom, $|d_N - d_M|$ je neparan cio broj pa mora biti:

$$|d_N - d_M| = 1. \quad (3.24)$$

□

- Izuzev u polovima imitanse $F_{LC}(s)$, $\frac{F_{LC}(\Omega)}{j}$ je monotona rastuća funkcija učestanosti.

Dokaz:

LC imitansa se može zapisati u vidu količnika dva faktorizovana polinoma:

$$F_{LC}(s) = \frac{k(s^2 + \Omega_1^2)(s^2 + \Omega_3^2) \cdots (s^2 + \Omega_r^2)}{s(s^2 + \Omega_2^2)(s^2 + \Omega_4^2) \cdots (s^2 + \Omega_q^2)}, \quad (3.25)$$

pri čemu se stepeni polinoma u brojniku i u nazivniku razlikuju tačno za jedan.

Dijeljenjem imitanse $F_{LC}(s)$ kompleksnom učestanošću s , a zatim uvođenjem nove promjenljive $p = s^2$, dobijamo:

$$\frac{F_{LC}(s)}{s} = \frac{k(p + \Omega_1^2)(p + \Omega_3^2) \cdots (p + \Omega_r^2)}{p(p + \Omega_2^2)(p + \Omega_4^2) \cdots (p + \Omega_q^2)}. \quad (3.26)$$

Razvojem u parcijalne razlomke (3.26) možemo zapisati u obliku:

$$\frac{F_{LC}(s)}{s} = k_\infty + \frac{k_0}{p} + \sum_{i=2(\text{parno})}^q \frac{k_i}{p + \Omega_i^2}. \quad (3.27)$$

Nakon množenja (3.26) sa s dobijamo:

$$F_{LC}(s) = k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \sum_{i=2(\text{parno})}^q \frac{k_i s}{s^2 + \Omega_i^2}, \quad (3.28)$$

gdje k_∞ postoji ako je $r = q + 1$. Analiziraćemo prirodu konstanti k_i , $i = 0, 2, 4, \dots, q$ i k_∞ . Napišimo (3.28) u obliku:

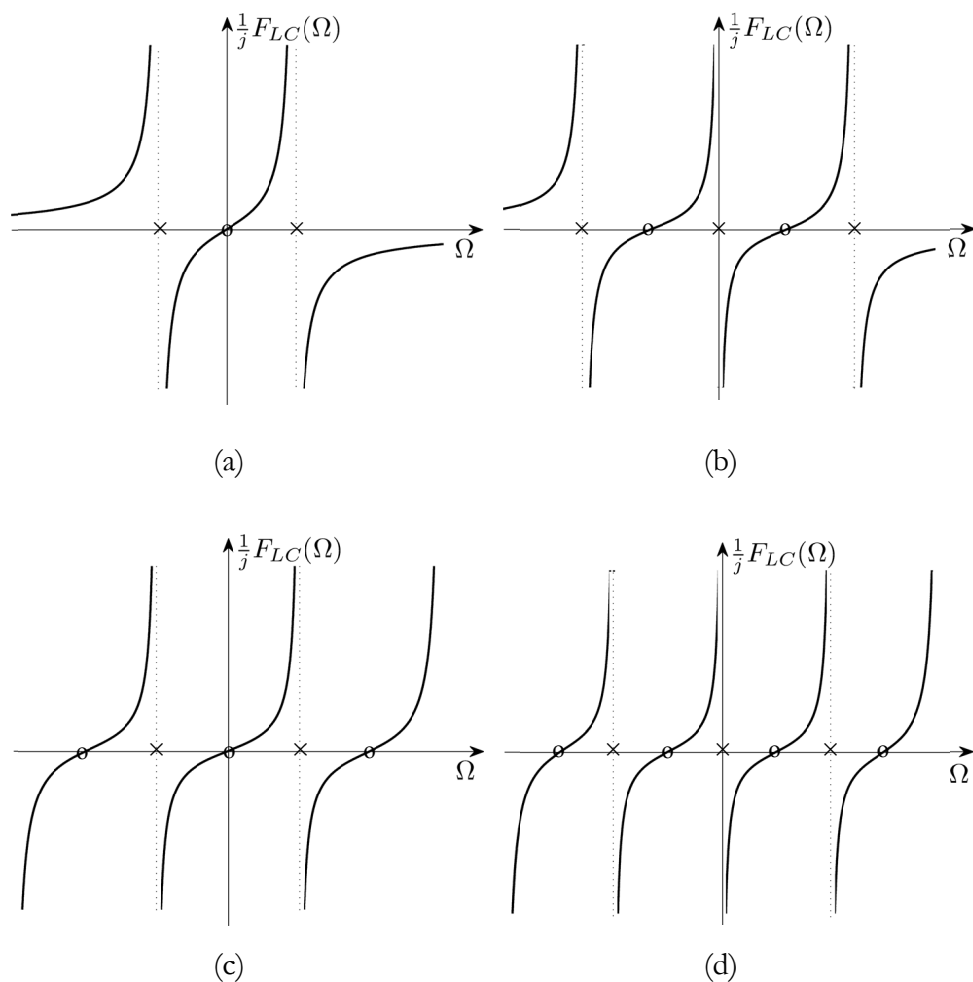
$$F_{LC}(s) = k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \sum_{i=2(\text{parno})}^q \left(\frac{\alpha_i}{s + j\Omega_i} + \frac{\alpha_i^*}{s - j\Omega_i} \right). \quad (3.29)$$

Zbog pozitivno realne prirode LC imitanse, koeficijenti k_0 i k_∞ moraju biti realni i pozitivni, a konstante pri razvoju u parcijalne razlomke koje se pojavljuju u konjugovano kompleksnim parovima takođe moraju da budu realne i pozitivne, tako da je $\alpha_i = \alpha_i^*$. Svaki član sume u (3.28) se može zapisati na sljedeći način:

$$\frac{k_i s}{s^2 + \Omega_i^2} = \frac{\alpha_i (s - j\Omega_i) + \alpha_i (s + j\Omega_i)}{s^2 + \Omega_i^2} = \frac{2\alpha_i s}{s^2 + \Omega_i^2} \Rightarrow k_i = 2\alpha_i, \quad (3.30)$$

te su k_i takođe realne i pozitivne konstante. Diferenciranjem (3.30) po s :

$$\frac{dF_{LC}(s)}{ds} = k_\infty - \frac{k_0}{s^2} + \sum_{i=2(\text{parno})}^q \frac{k_i (\Omega_i^2 - s^2)}{(s^2 + \Omega_i^2)^2}, \quad (3.31)$$



Slika 3.2 Mogući oblici funkcije $\frac{F_{LC}(\Omega)}{j}$.

za $s = j\Omega$ dobijamo:

$$\frac{dF_{LC}(\Omega)}{d\Omega} = k_{\infty} + \frac{k_0}{\Omega^2} + \sum_{i=2(\text{parno})}^q \frac{k_i(\Omega_i^2 + \Omega^2)}{(\Omega_i^2 - \Omega^2)^2} > 0, \quad (3.32)$$

što znači da je $\frac{F_{LC}(\Omega)}{j}$ monotono rastuća funkcija učestanosti. Tipični oblici

LC imitanse su prikazani na Slici 3.2.

Zbog ovakve prirode LC imitanse nije teško zaključiti da se nule i polovi moraju smjenjivati na imaginarnoj osi. □

Na osnovu navedenih osobina, LC imitansa se može predstaviti u obliku:

$$F_{LC}(s) = \frac{k(s^2 + \Omega_1^2)(s^2 + \Omega_3^2) \cdots (s^2 + \Omega_r^2)}{s(s^2 + \Omega_2^2)(s^2 + \Omega_4^2) \cdots (s^2 + \Omega_q^2)}, \quad (3.33)$$

ili:

$$F_{LC}(s) = \frac{ks(s^2 + \Omega_2^2)(s^2 + \Omega_4^2) \cdots (s^2 + \Omega_q^2)}{(s^2 + \Omega_1^2)(s^2 + \Omega_3^2) \cdots (s^2 + \Omega_r^2)}, \quad (3.34)$$

gdje je k pozitivna konstanta i $0 \leq \Omega_1 < \Omega_2 < \Omega_3 < \cdots < \Omega_q < \Omega_r < \infty$.

Polovi i nule LC imitanse su jednostruki i smjenjuju se na imaginarnoj osi. Za $s=0$ i u beskonačnosti imitansa ima nulu ili pol. Ako je stepen polinoma u brojniku veći od stepena polinoma u nazivniku, imitansa $F_{LC}(s)$ ima nulu u nuli, a pol u beskonačnosti. Ako je nazivnik za jedan stepen veći od brojnika, $F_{LC}(s)$ ima pol u nuli, a nulu u beskonačnosti.

Da bi neka funkcija mogla da se realizuje kao LC mreža, ona mora da ima sve navedene osobine. Međutim, neke od tih osobina su međusobno zavisne, tako da su potrebni i dovoljni uslovi koje treba da zadovolji funkcija prenosa kako bi mogla da se realizuje kao LC mreža sa jednim pristupom sljedeći:

1. da je data funkcija prenosa kompleksne učestanosti neparna racionalna funkcija,
2. da data funkcija prenosa ima proste polove i to samo na imaginarnoj osi,
3. da su rezidumi u polovima realni i pozitivni.

3.2 Fosterovi metodi realizacije LC imitansi

Realizacija imitansi koja se zasniva na razvoju imitanse na parcijalne razlomke i uzastopnom uklanjanju polova dobila je ime po matematičaru Fosteru (Ronald Martin Foster, 1896-1998). Posmatrajmo izraz za LC imitansu razvijen u parcijalne razlomke:

$$F_{LC}(s) = k_{\infty}s + \frac{k_0}{s} + \sum_{i=2(\text{parno})}^q \frac{k_i s}{s^2 + \Omega_i^2}, \quad (3.35)$$

koji može da se zapiše u formi koja je, kao što ćemo kasnije vidjeti, pogodna za realizaciju Fosterovim metodima:

$$F_{LC}(s) = k_{\infty}s + \frac{k_0}{s} + \sum_{i=2(\text{parno})}^q \frac{1}{\frac{s}{k_i} + \frac{1}{(k_i/\Omega_i^2)s}}. \quad (3.36)$$

Ako posmatrana LC imitansa ima pol za $s = \infty$, možemo izdvojiti član $k_{\infty}s$ i formirati novu imitansu:

$$F_{LC1}(s) = F_{LC}(s) - k_{\infty}s, \quad (3.37)$$

koja i dalje ima sve osobine LC imitanse. Pri tome je ostatak u polu u beskonačnosti:

$$k_{\infty} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{F_{LC}(s)}{s}. \quad (3.38)$$

Stepen funkcije $F_{LC1}(s)$ je smanjen za jedan u odnosu na $F_{LC}(s)$ i preostala funkcija $F_{LC1}(s)$ nema pol u beskonačnosti.

Slično, ako LC imitansa ima pol za $s = 0$, možemo smanjiti stepen funkcije za jedan izdvajanjem člana $\frac{k_0}{s}$:

$$F_{LC2}(s) = F_{LC}(s) - \frac{k_0}{s}, \quad (3.39)$$

gdje je:

$$k_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F_{LC}(s) \quad (3.40)$$

ostatak u polu $s=0$. Preostala imitansa $F_{LC2}(s)$ takođe ima prirodu LC imitanse, ali nema pol u nuli.

Ako imitansa ima par konjugovano kompleksnih polova $s = \pm j\Omega_i$, $0 < \Omega_i < \infty$, možemo izdvojiti član $\frac{k_i s}{s^2 + \Omega_i^2}$ tako da preostala imitansa i dalje bude LC imitansa:

$$F_{LC3}(s) = F_{LC}(s) - \frac{k_i s}{s^2 + \Omega_i^2}, \quad (3.41)$$

pri čemu je:

$$k_i = \lim_{s^2 \rightarrow \Omega_i^2} \frac{s^2 + \Omega_i^2}{s} F_{LC}(s) \quad (3.42)$$

zbir ostataka u paru konjugovano kompleksnih polova $\pm j\Omega_i$. Oduzimanjem članova sa konjugovano kompleksnim polovima stepen imitanse se smanjuje za dva.

Razvojem impedanse na parcijalne razlomke i sukcesivnim uklanjanjem polova impedanse nastaje prva Fosterova forma, a razvoj admitanse na parcijalne razlomke i sukcesivno uklanjanje polova admitanse rezultuje drugom Fosterovom formom. Procedura se okončava kad stepen imitanse postane jednak nuli. Realizacija imitanse n -tog reda zahtijeva tačno n elemenata, što je ujedno minimalan broj elemenata potrebnih za realizaciju. Za oblik mreže koji se realizuje sa minimalnim brojem potrebnih elemenata kažemo da je kanonički.

3.2.1 Fosterov prvi metod

Ako je $F_{LC}(s)$ impedansa, uvodeći smjene: $L_\infty = k_\infty$, $C_0 = \frac{1}{k_0}$, $C_i = \frac{1}{k_i}$ i $L_i = \frac{k_i}{\Omega_i^2}$,

opšti oblik LC imitanse (3.36) postaje:

$$Z_{LC}(s) = L_{\infty}s + \frac{1}{C_0s} + \sum_{i=2(\text{parno})}^q \frac{1}{C_i s + \frac{1}{L_i s}}. \quad (3.43)$$

Fosterov prvi metod se svodi na postupak sukcesivnog uklanjanja polova LC impedanse, koji je ilustrovan na Slici 3.3. Uklanjanjem pola u beskonačnosti, odnosno izdvajanjem člana $L_{\infty}s$, za daljnju realizaciju preostaje impedansa:

$$Z_{LC1}(s) = \frac{1}{C_0s} + \sum_{i=2(\text{parno})}^q \frac{1}{C_i s + \frac{1}{L_i s}}. \quad (3.44)$$

Polazna impedansa se može iskazati kao zbir dvije impedanse:

$$Z_{LC}(s) = Z_{LC1}(s) + L_{\infty}s, \quad (3.45)$$

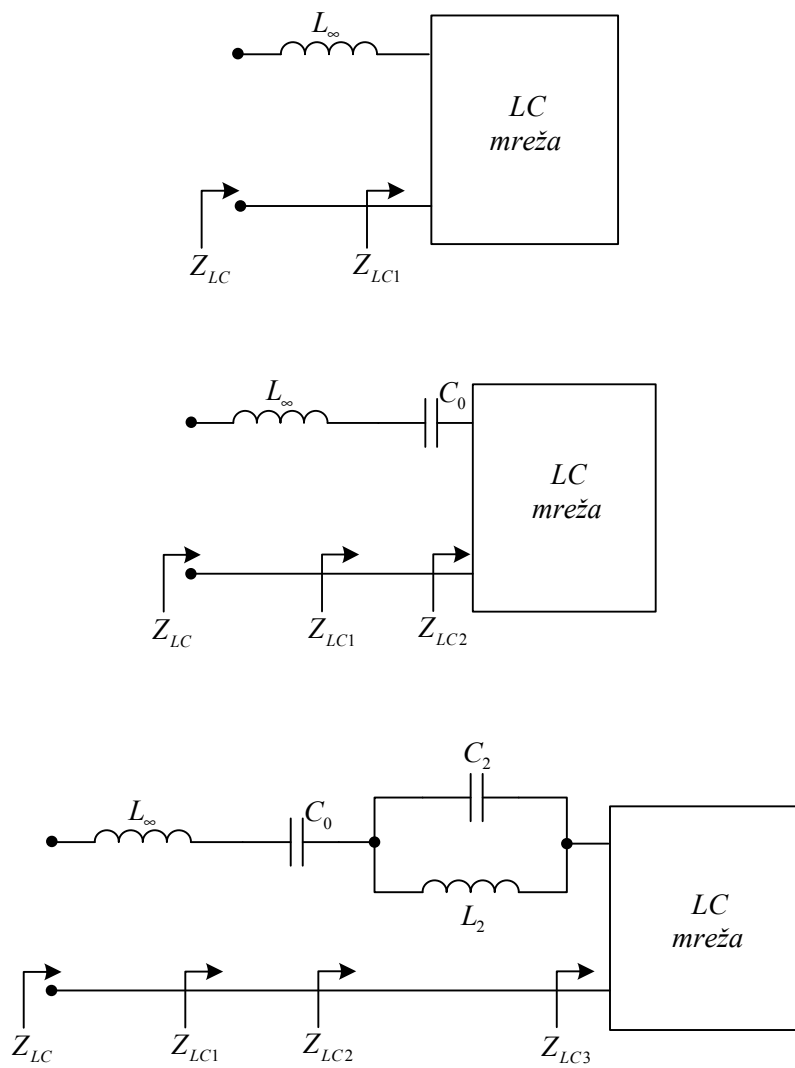
te je realizujemo kao rednu vezu kalema induktivnosti L_{∞} i preostale impedanse $Z_{LC1}(s)$.

Impedansa $Z_{LC1}(s)$, koja je preostala za realizaciju nakon izdvajanja člana $L_{\infty}s$, jednaka je rednoj vezi kondenzatora kapacitivnosti C_0 i impedanse $Z_{LC2}(s)$:

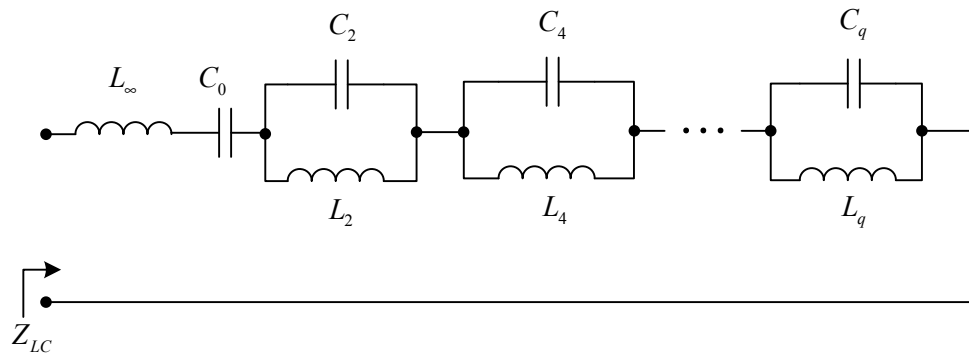
$$Z_{LC1}(s) = Z_{LC2}(s) + \frac{1}{C_0s}. \quad (3.46)$$

Uklanjanjem pola u nuli, odnosno izdvajanjem iz $Z_{LC1}(s)$ člana $\frac{1}{C_0s}$, preostaje impedansa:

$$Z_{LC2}(s) = \sum_{i=2(\text{parno})}^q \frac{1}{C_i s + \frac{1}{L_i s}}. \quad (3.47)$$



Slika 3.3 Postupak realizacije LC impedanse Fosterovim prvim metodom.



Slika 3.4 Fosterova prva forma LC mreže.

Oduzimanjem od $Z_{LC2}(s)$ jednog člana oblika $\frac{1}{C_i s + \frac{1}{L_i s}}$ uklanjamo par

konjugovano kompleksnih polova, odnosno realizujemo rednu vezu preostale impedanse $Z_{LC3}(s)$ i paralelnog oscilatornog kola sa kalemom inuktivnosti L_i i kondenzatorom kapacitivnosti C_i .

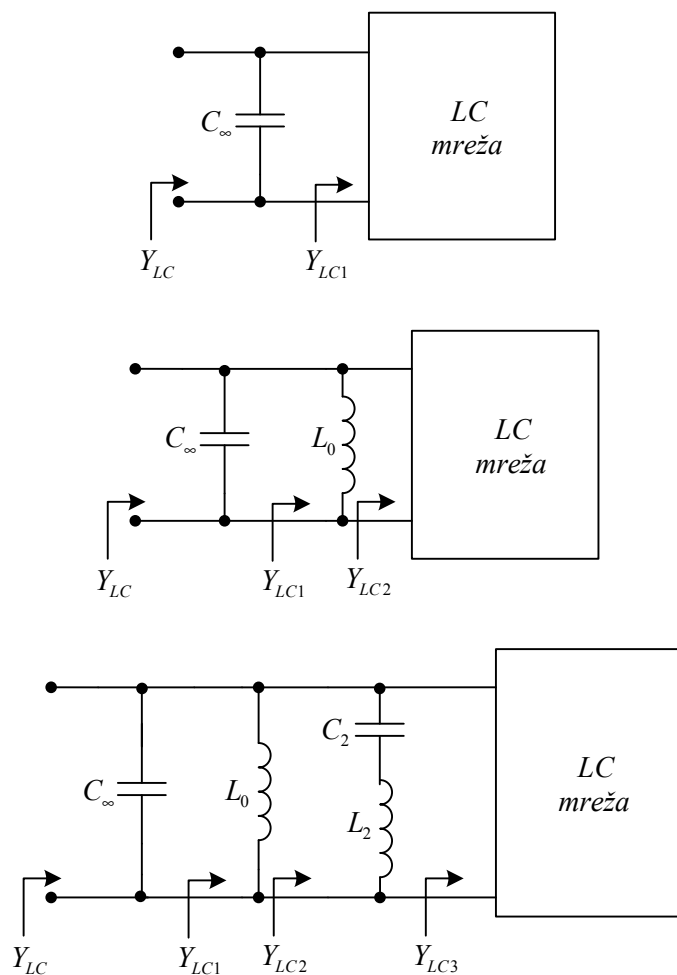
Svako uklanjanje pola u nuli ili u beskonačnosti košta nas jedan, a ukljanje pola na konačnoj učestanosti dva elementa. Topologija kola koje nastaje realizacijom impedanse Fosterovim metodom naziva se Fosterova prva forma i prikazana je na Slici 3.4.

3.2.2 Fosterov drugi metod

Fosterovim drugim metodom realizujemo admitansu sukcesivnim uklanjanjama njenih polova. Opšti oblik LC imitanse (3.36) prikazujemo kao:

$$Y_{LC}(s) = C_\infty s + \frac{1}{L_0 s} + \sum_{i=2(\text{parno})}^q \frac{1}{L_i s + \frac{1}{C_i s}}, \quad (3.48)$$

pri čemu smo uveli oznake: $C_\infty = k_\infty$, $L_0 = \frac{1}{k_0}$, $L_i = \frac{1}{k_i}$, $C_i = \frac{k_i}{\Omega_i^2}$.



Slika 3.5 Postupak realizacije LC admitanse Fosterovim drugim metodom.

Na Slici 3.5 ilustriran je postupak sukcesivnog uklanjanja polova LC admitanse. Izdvajanjem člana $C_\infty s$, što odgovara uklanjanju pola u beskonačnosti, preostaje admitansa:

$$Y_{LC1}(s) = \frac{1}{L_0 s} + \sum_{i=2(\text{parno})}^q \frac{1}{L_i s + \frac{1}{C_i s}}. \quad (3.49)$$

Na ovaj način realizujemo paralelnu vezu kondenzatora kapacitivnosti C_∞ i preostale admitanse $Y_{LC1}(s)$:

$$Y_{LC}(s) = Y_{LC1}(s) + C_\infty s. \quad (3.50)$$

Nakon toga uklanjamo pol u nuli izdvajanjem člana $\frac{1}{L_0 s}$, tako da je:

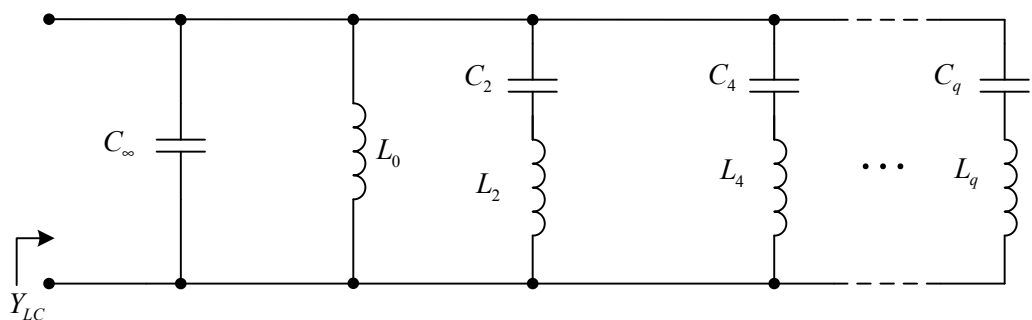
$$Y_{LC1}(s) = Y_{LC2}(s) + \frac{1}{L_0 s} \quad (3.51)$$

paralelna veza kalema induktivnosti L_0 i preostale admitanse:

$$Y_{LC2}(s) = \sum_{i=\text{parno}}^q \frac{1}{L_i s + \frac{1}{C_i s}}. \quad (3.52)$$

Zatim uklanjamo parove konjugovano kompleksnih polova. Član oblika $1/\left(L_i s + \frac{1}{C_i s}\right)$ je redno oscilatorno kolo, koje se sastoji od kondenzatora kapacitivnosti C_i i kalema induktivnosti L_i . Taj član je po svojoj prirodi admitansa, te se veže paralelno sa preostalom admitansom $Y_{LC3}(s)$.

Kao i kod Fosterovog prvog metoda, svako uklanjanje pola u nuli ili beskonačnosti košta nas jedan, a uklanjanje pola na konačnoj učestanosti dva elementa. Struktura kola koje nastaje realizacijom impedanse Fosterovim metodom naziva se Fosterova druga forma i prikazana je na Slici 3.6.



Slika 3.6 Fosterova druga forma LC mreže.

Primjer 3.1:

Fosterovim I metodom realizovati LC impedansu petog reda:

$$Z_{LC}(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)(s^2 + 16)}.$$

Rješenje:

Prije same realizacije neophodno je provjeriti da li zadana impedansa ima osobine LC impedansi. $Z_{LC}(s)$ je neparna racionalna funkcija kod koje je stepen polinoma u nazivniku za jedan veći od stepena polinoma u brojniku. $Z_{LC}(s)$ ima pol u $s=0$ i nulu u $s=\infty$. Nule: $s = \pm j1$ i $s = \pm j3$, kao i polovi: $s=0$, $s = \pm j2$, $s = \pm j4$ su prosti i smjenjuju se na imaginarnoj osi.

Da bismo pronašli rezidume, uvedimo smjenu $p = s^2$:

$$\frac{Z_{LC}(s)}{s} = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}{s^2(s^2 + 4)(s^2 + 16)} = \frac{(p + 1)(p + 9)}{p(p + 4)(p + 16)} = \frac{p^2 + 10p + 9}{p(p + 4)(p + 16)}, \quad (3.53)$$

$$\left. \frac{Z_{LC}(s)}{s} \right|_{s^2=p} = \frac{p^2 + 10p + 9}{p(p + 4)(p + 16)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + 4} + \frac{C}{p + 16} \triangleq \hat{Z}(p), \quad (3.54)$$

gdje su $A = \frac{9}{64}$, $B = \frac{5}{16}$ i $C = \frac{35}{64}$ reziduumi od $\hat{Z}(p)$ u polovima $p_1 = 0$, $p_2 = -4$ i $p_3 = -16$. Stoga je:

$$\frac{Z_{LC}(s)}{s} = \frac{9/64}{s^2} + \frac{5/16}{s^2 + 4} + \frac{35/64}{s^2 + 16}, \quad (3.55)$$

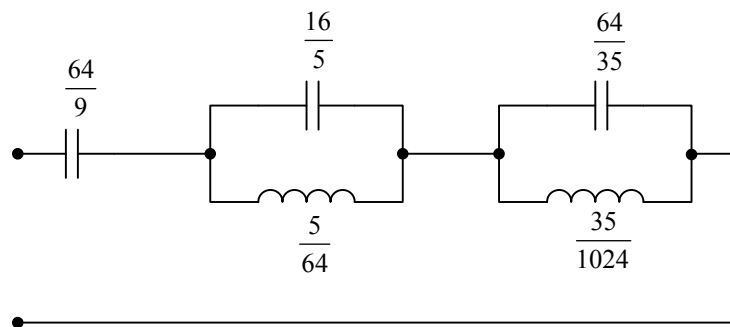
$$Z_{LC}(s) = \frac{9/64}{s} + \frac{(5/16)s}{s^2 + 4} + \frac{(35/64)s}{s^2 + 16}. \quad (3.56)$$

Svi rezidumi od $Z_{LC}(s)$ su realni i pozitivni. Dakle, $Z_{LC}(s)$ zadovoljava sve uslove da se može realizovati u formi LC mreže sa jednim pristupom.

Razvojem impedanse na parcijalne razlomke prikazujemo je u obliku zbira elementarnih impedansi (kalemova, kondenzatora i paralelnih oscilatornih kola):

$$Z_{LC}(s) = \frac{1}{\frac{64}{9}s} + \frac{1}{\frac{16}{5}s + \frac{1}{\frac{5}{64}s}} + \frac{1}{\frac{64}{35}s + \frac{1}{\frac{35}{1024}s}}, \quad (3.57)$$

te se radi o rednoj vezi impedansi nazvanoj Fosterova I forma. Realizacija zadane impedanse je prikazana na Slici 3.7.



Slika 3.7 Realizacija LC imitanse Fosterovom I formom.

□

Primjer 3.2:

Realizovati LC admitansu petog reda $Y(s) = \frac{s(s^2 + 2)(s^2 + 4)}{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}$, koristeći Fosterove metode realizacije.

Rješenje:

Prije same realizacije neophodno je provjeriti da li zadana admitansa ima osobine LC admitansi. Admitansa $Y(s)$ je neparna racionalna funkcija kod koje je stepen polinoma u brojniku za jedan veći od stepena polinoma u nazivniku. $Y(s)$ ima nulu u $s=0$ i pol u beskonačnosti. Preostale nule admitanse su: $s = \pm j\sqrt{2}$ i $s = \pm j2$, dok su preostali polovi: $s = \pm j1$, $s = \pm j\sqrt{3}$ prosti. Nule i polovi se nalaze na imaginarnoj osi i međusobno se smjenjuju. Svi rezidumi od $Y(s)$ su realni i pozitivni:

$$k_{\infty} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Y(s)}{s} = 1, \quad (3.58)$$

$$k_1 = \lim_{s^2 = -1} \frac{s^2 + 1}{s} Y(s) = \lim_{s^2 = -1} \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 4)}{(s^2 + 3)} = \frac{3}{2}, \quad (3.59)$$

$$k_2 = \lim_{s^2 = -3} \frac{s^2 + 3}{s} Y(s) = \lim_{s^2 = -3} \frac{(s^2 + 2)(s^2 + 4)}{(s^2 + 1)} = \frac{1}{2}. \quad (3.60)$$

Dakle, $Y(s)$ zadovoljava sve uslove da se može realizovati u formi LC mreže sa jednim pristupom. Razvojem admitanse $Y(s)$ na parcijalne razlomke prikazujemo je u obliku zbira, tj. paralelne veze elementarnih admitansi:

$$Y(s) = k_{\infty} s + \frac{k_1 s}{s^2 + 1} + \frac{k_2 s}{s^2 + 3}. \quad (3.61)$$

Uklanjanjem pola u beskonačnosti realizujemo kondenzator:

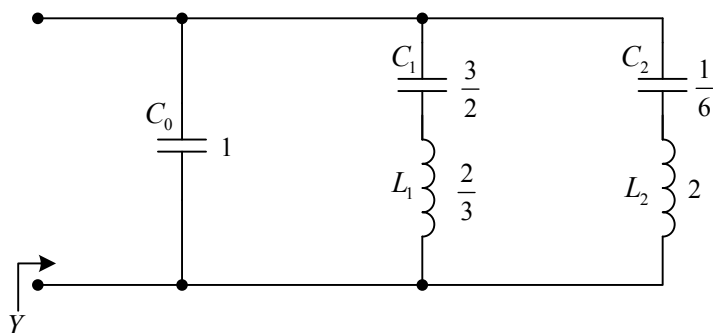
$$C_0 = k_{\infty} = 1. \quad (3.62)$$

Preostala dva člana zbira realizujemo u vidu rednih oscilatornih kola:

$$\frac{k_1 s}{s^2 + 1} = \frac{1}{\frac{1}{k_1 s} + \frac{1}{k_1}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1 s} + L_1 s} \Rightarrow C_1 = k_1 = \frac{3}{2}, L_1 = \frac{1}{k_1} = \frac{2}{3}, \quad (3.63)$$

$$\frac{k_2 s}{s^2 + 3} = \frac{1}{\frac{3}{k_2 s} + \frac{1}{k_2}} = \frac{1}{\frac{1}{C_2 s} + L_2 s} \Rightarrow C_2 = \frac{k_2}{3} = \frac{1}{6}, L_2 = \frac{1}{k_2} = 2. \quad (3.64)$$

Električna šema koja prikazuje zadatu admitansu data je na Slici 3.8.



Slika 3.8 Električna šema zadate LC admitanse u obliku druge Fosterove forme.

□

3.3 Kauerovi metodi realizacije LC imitansi

Realizacija imitansi koja se zasniva na razvoju imitanse na verižne razlomke i uzastopnom uklanjanju polova u beskonačnosti ili polova u nuli nazvana je po njemačkom naučniku Kaueru (Wilhelm Cauer, 1900-1945).

3.3.1 Kauerov prvi metod

Kada smo analizirali osobine LC imitansi, zaključili smo da se stepen polinoma u brojniku i stepen polinoma u nazivniku LC imitanse razlikuju tačno za jedan. Tačka u beskonačnosti je pol ili nula LC imitanse. Kauerovim prvim metodom se imitansa realizuje razvojem na verižne razlomke oko tačke u beskonačnosti i sukcesivnim uklanjanjem pola u beskonačnosti. Postupak realizacije LC impedanse Kauerovim prvim metodom ilustrovan je na Slici 3.9 i odvija se na sljedeći način.

Pretpostavimo da u beskonačnosti LC imitansa ima pol, tj. da je stepen polinoma u brojniku za jedan veći od stepena polinoma u nazivniku. Označimo imitansu koju treba da realizujemo sa $F_{LC1}(s)$. Budući da smo pretpostavili da LC imitansa ima pol u beskonačnosti, nakon prvog koraka dijeljenja polinoma u brojniku sa polinomom u nazivniku, imitansu možemo zapisati u obliku:

$$F_{LC}(s) = F_{LC1}(s) = k_{\infty 1} s + \frac{1}{F_{LC2}(s)}, \quad (3.65)$$

gdje je:

$$k_{\infty 1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{F_{LC1}(s)}{s} \quad (3.66)$$

ostatak u polu u beskonačnosti. Uklanjanjem pola u beskonačnosti, dobijamo imitansu:

$$\frac{1}{F_{LC2}(s)} = F_{LC1}(s) - k_{\infty 1} s. \quad (3.67)$$

Nakon uklanjanja pola u beskonačnosti, preostala imitansa data sa (3.67), u beskonačnosti nema pol. Na osnovu ranije razmatranih osobina znamo da LC imitansa u beskonačnosti mora da ima ili nulu ili pol, pa zaključujemo da LC imitansa data sa (3.67) u beskonačnosti mora da bude jednaka nuli:

$$\frac{1}{F_{LC2}(\infty)} = 0, \quad (3.68)$$

te stoga $F_{LC2}(s)$ ima pol u beskonačnosti:

$$F_{LC2}(s) = k_{\infty 2}s + \frac{1}{F_{LC3}(s)}, \quad (3.69)$$

sa reziduomom:

$$k_{\infty 2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{F_{LC2}(s)}{s}. \quad (3.70)$$

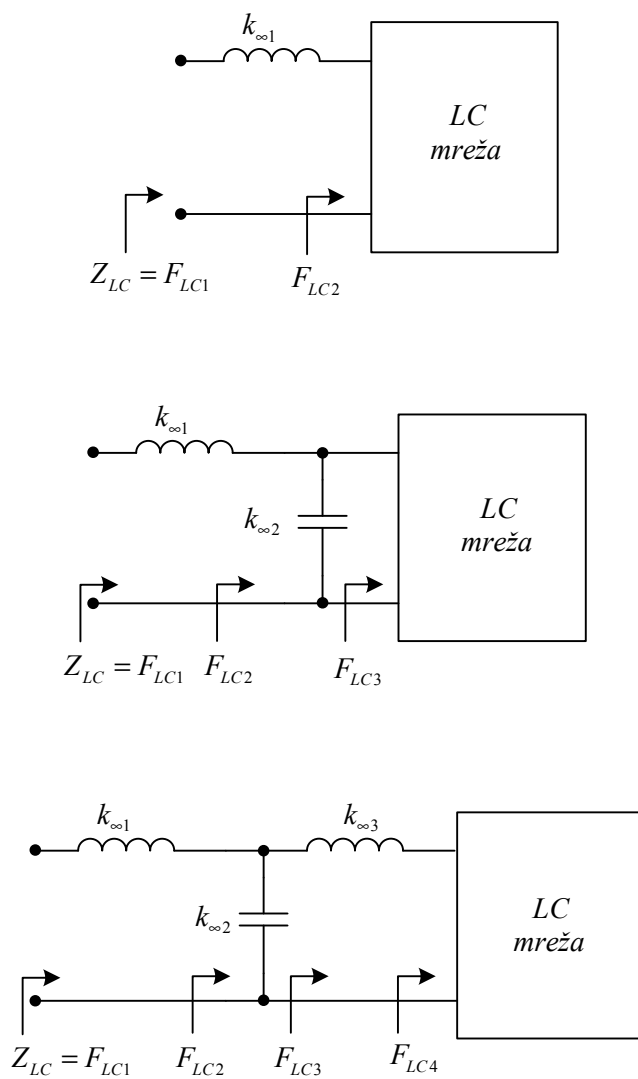
Ako ponovo uklonimo pol u beskonačnosti, $F_{LC3}(s)$ će imati pol u beskonačnosti. Ponavljanje ovog postupka vodi zapisu u obliku verižnog razlomka:

$$F_{LC}(s) = F_{LC1}(s) = k_{\infty 1}s + \frac{1}{k_{\infty 2}s + \frac{1}{k_{\infty 3}s + \dots + \frac{1}{k_{\infty n}s}}}, \quad (3.71)$$

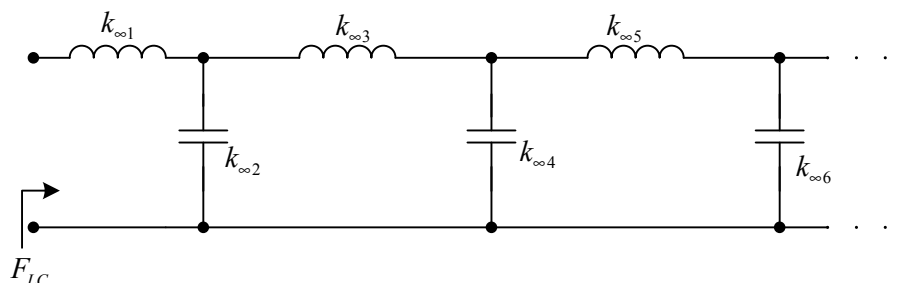
pri čemu su $k_{\infty i}$ reziduumi $F_{LCi}(s)$ u polu koji se nalazi u beskonačnosti.

Posmatrajući (3.65) zaključujemo da se radi o zbiru imitansi. Ako imitansa koju realizujemo ima prirodu impedanse, to znači da uklanjanjem pola u beskonačnosti u realizaciji dobijamo rednu vezu kabela i neke preostale impedanse. Nakon invertovanja, ta imitansa poprima prirodu admitanse. Uklanjanjem pola u beskonačnosti admitanse realizujemo paralelnu vezu kondenzatora i neke preostale admitanse, koja nakon invertovanja poprima prirodu impedanse.

Na ovaj način dobijamo kalemове u rednim, a kondenzatore u odvodnim granama realizovane LC mreže.



Slika 3.9 Postupak realizacije LC impedanse Kauerovim prvim metodom.



Slika 3.10 Kauerova prva forma LC mreže.

U slučaju da imitansa $F_{LC}(s)$ u beskonačnosti nema pol već nulu, onda uzimamo njenu recipročnu vrijednost, pa zatim primjenjujemo razvoj na verižne razlomke:

$$F_{LC}(s) = \frac{1}{F_{LC1}(s)} = \frac{1}{k_{\infty 1}s + \frac{1}{k_{\infty 2}s + \frac{1}{k_{\infty 3}s + \dots + \frac{1}{k_{\infty n}s}}} \quad (3.72)$$

U oba slučaja, neovisno o tome da li LC imitansa u beskonačnosti ima pol ili nulu, prilikom realizacije Kauerovim prvim metodom dobijamo kalemove u rednim, a kondenzatore u odvodnim granama, kao na Slici 3.10.

Realizovana LC mreža može početi i završiti kalemom u rednoj ili kondenzatorom u odvodnoj grani, ovisno o tome da li impedansa ili admitansa ima pol u beskonačnosti, te od reda zadate funkcije.

Primjer 3.3:

Realizovati LC impedansu petog reda:

$$Z_{LC}(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)(s^2 + 16)} = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^5 + 20s^3 + 64s}$$

Kauerovim I metodom.

Rješenje:

Provjerimo da li zadana impedansa ima osobine LC impedansi. $Z_{LC}(s)$ je neparna racionalna funkcija kod koje je stepen polinoma u nazivniku za jedan veći od stepena polinoma u brojniku. $Z_{LC}(s)$ ima pol u $s=0$ i nulu u $s=\infty$. Nule: $s=\pm j1$ i $s=\pm j3$ i polovi: $s=0$, $s=\pm j2$, $s=\pm j4$ su prosti i smjenjuju se na imaginarnoj osi. Da bismo pronašli reziduume, uvedimo smjenu $p=s^2$:

$$\frac{Z_{LC}(s)}{s} = \frac{(s^2+1)(s^2+9)}{s^2(s^2+4)(s^2+16)} = \frac{(p+1)(p+9)}{p(p+4)(p+16)} = \frac{p^2+10p+9}{p(p+4)(p+16)}, \quad (3.73)$$

$$\left. \frac{Z_{LC}(s)}{s} \right|_{s^2=p} = \frac{p^2+10p+9}{p(p+4)(p+16)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+4} + \frac{C}{p+16} \triangleq \hat{Z}(p), \quad (3.74)$$

pri čemu su $A=\frac{9}{64}$, $B=\frac{5}{16}$ i $C=\frac{35}{64}$ rezidumi od $\hat{Z}(p)$ u polovima $p_1=0$, $p_2=-4$ i $p_3=-16$. Stoga je:

$$\frac{Z_{LC}(s)}{s} = \frac{9/64}{s^2} + \frac{5/16}{s^2+4} + \frac{35/64}{s^2+16}, \quad (3.75)$$

$$Z_{LC}(s) = \frac{9/64}{s} + \frac{(5/16)s}{s^2+4} + \frac{(35/64)s}{s^2+16}. \quad (3.76)$$

Rezidumi od $Z_{LC}(s)$ su realni i pozitivni. Dakle, $Z_{LC}(s)$ zadovoljava sve uslove da se može realizovati u formi LC mreže sa jednim pristupom.

Kako je stepen polinoma u nazivniku za jedan veći od stepena polinoma u brojniku, zadana impedansa ima nulu u beskonačnosti, te je treba invertovati:

$$Y_1(s) = \frac{1}{Z_{LC}(s)} = \frac{s^5+20s^3+64s}{s^4+10s^2+9}, \quad (3.77)$$

kako bi se dobila admitansa sa polom $s=\infty$ i reziduomom:

$$k_{\infty 1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Y_1(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^4 + 20s^2 + 64}{s^4 + 10s^2 + 9} = 1. \quad (3.78)$$

Nakon izdvajanja pola u beskonačnosti, preostala admitansa:

$$Y_2(s) = Y_1(s) - k_{\infty 1}s = \frac{s^5 + 20s^3 + 64s}{s^4 + 10s^2 + 9} - s = \frac{10s^3 + 55s}{s^4 + 10s^2 + 9}, \quad (3.79)$$

ima nulu u beskonačnosti. Dobijena admitansa se invertuje:

$$Z_2(s) = \frac{1}{Y_2(s)} = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{10s^3 + 55s}, \quad (3.80)$$

te se ponovo izdvaja pol u beskonačnosti:

$$k_{\infty 2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Z_2(s)}{s} = \frac{s^3 + 10s + 9}{10s^3 + 55s} = 0.1. \quad (3.81)$$

Postupak se nastavlja na isti način:

$$Z_3(s) = Z_2(s) - k_{\infty 2}s = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{10s^3 + 55s} - 0.1s = \frac{4.5s^2 + 9}{10s^3 + 55s}, \quad (3.82)$$

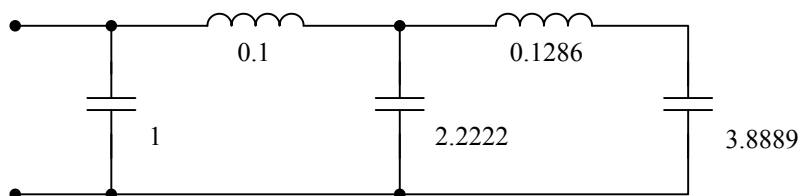
$$Y_3(s) = \frac{1}{Z_3(s)} = \frac{10s^3 + 55s}{4.5s^2 + 9}, \quad (3.83)$$

$$k_{\infty 3} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Y_3(s)}{s} = \frac{10s^2 + 55}{4.5s^2 + 9} = 2.2222, \quad (3.84)$$

$$Y_4(s) = Y_3(s) - k_{\infty 3}s = \frac{10s^3 + 55s}{4.5s^2 + 9} - 2.2222s = \frac{35s}{4.5s^2 + 9}, \quad (3.85)$$

$$Z_4(s) = \frac{1}{Y_4(s)} = \frac{4.5s^2 + 9}{35s}, \quad (3.86)$$

$$k_{\infty 4} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Z_4(s)}{s} = \frac{4.5s^2 + 9}{35s^2} = 0.1286, \quad (3.87)$$



Slika 3.11 Realizacija LC impedanse Kauerovom I formom.

$$Z_5(s) = Z_4(s) - k_{\infty 4}s = \frac{4.5s^2 + 9}{35s} - 0.1286s = \frac{9}{35s}, \quad (3.88)$$

$$Y_5(s) = \frac{1}{Z_5(s)} = \frac{35s}{9}, \quad (3.89)$$

$$k_{\infty 5} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Y_5(s)}{s} = 3.8889. \quad (3.90)$$

Konačan razvoj date impedanse u verižni razlomak oko beskonačnosti jeste:

$$Z_{LC}(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{0.1s + \frac{1}{2.2222s + \frac{1}{0.1286s + \frac{1}{3.8889s}}}}}, \quad (3.91)$$

a njena realizacija Kauerovom I formom je prikazana na Slici 3.11.

□

3.3.2 Kauerov drugi metod

Realizacija imitansi razvojem na verižne razlomke oko nule naziva se Kauerov drugi metod. Budući da imitansa u nuli ima pol ili nulu, $s=0$ mora biti pol ili impedanse ili admitanse, te uvijek možemo početi od pretpostavke

da imitansa ima pol u nuli, što znači da je stepen polinoma u brojniku za jedan veći od stepena polinoma u nazivniku.

Imitansu koju treba da realizujemo ćemo označiti sa $F_{LC1}(s)$ i zapisati u obliku:

$$F_{LC}(s) = F_{LC1}(s) = \frac{k_{01}}{s} + \frac{1}{F_{LC2}(s)}, \quad (3.92)$$

gdje je ostatak u polu $s=0$:

$$k_{01} = \lim_{s \rightarrow 0} s F_{LC1}(s). \quad (3.93)$$

Uklanjajući pol imitanse $F_{LC1}(s)$ u $s=0$ dobijamo imitansu:

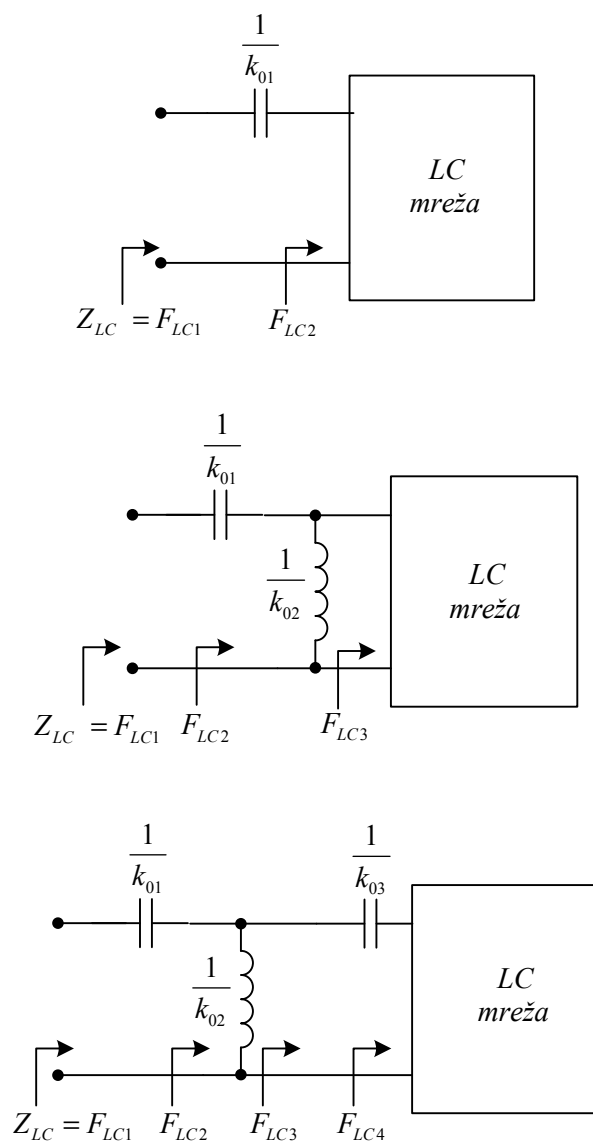
$$F_{LC2}(s) = \frac{k_{02}}{s} + \frac{1}{F_{LC3}(s)}, \quad (3.94)$$

koja takođe ima pol u nuli. Ako je imitansa $F_{LC1}(s)$ imala prirodu impedanse, $F_{LC2}(s)$ ima prirodu admitanse i obrnuto. Postupak ponavljamo tako da dobijamo verižni razlomak u obliku:

$$F_{LC}(s) = F_{LC1}(s) = \frac{k_{01}}{s} + \frac{1}{\frac{k_{02}}{s} + \frac{1}{\frac{k_{03}}{s} + \dots + \frac{1}{\frac{k_{0n}}{s}}}}. \quad (3.95)$$

Ako u nuli imitansa $F_{LC}(s)$ nema pol već nulu, uzimamo njenu recipročnu vrijednost, pa zatim primjenjujemo razvoj na verižne razlomke:

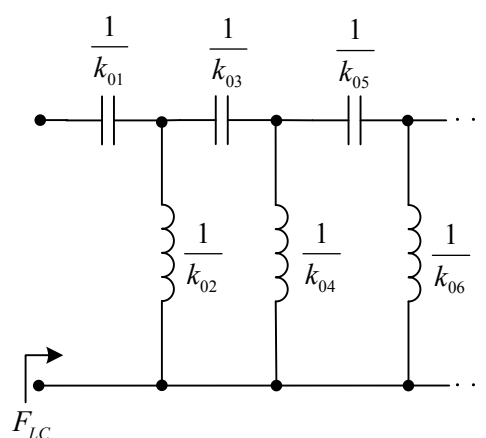
$$F_{LC}(s) = \frac{1}{F_{LC1}(s)} = \frac{1}{\frac{k_{01}}{s} + \frac{1}{\frac{k_{02}}{s} + \frac{1}{\frac{k_{03}}{s} + \dots + \frac{1}{\frac{k_{0n}}{s}}}}}. \quad (3.96)$$



Slika 3.12 Postupak realizacije LC impedanse Kauerovim drugim metodom.

Postupak realizacije LC impedanse Kauerovim drugim metodom prikazan je Slici 3.12.

Ako realizujemo impedansu, izdvajanjem pola u nuli realizujemo kondenzator u rednoj vezi sa nekom preostalom impedansom. Kada tu preostalu impedansu invertujemo, ona poprima prirodu admitanse. Prilikom realizacije admitanse, izdvajanje pola u nuli rezultuje paralelnom vezom kalema i preostale admitanse. Postupak nastavljamo, tako da ovim metodom dobijamo kondenzatore u rednim, a kalemове u odvodnim granama, kao na Slici 3.13.



Slika 3.13 Kauerova druga forma LC mreže.

Primjer 3.4:

Realizovati impedansu $Z(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}{s(s^2 + 2)(s^2 + 4)}$ drugim Kauerovim metodom.

Rješenje:

U Primjeru 3.1 provjerili smo da zadata admitansa, koja je jednaka recipročnoj vrijednosti ove impedanse, ima takve osobine da može biti realizovana kao LC mreža. Drugi Kauerov metod zahtijeva razvoj imitanse na verižne razlomke oko nule:

$$Z(s) = Z_1(s) = \frac{s^4 + 4s^2 + 3}{s^5 + 6s^3 + 8s}, \quad (3.97)$$

$$Z_2(s) = Z_1(s) - \frac{k_{01}}{s} = Z_1(s) - \frac{0.375}{s} = \frac{0.625s^3 + 1.75s}{s^4 + 6s^2 + 8} = \frac{1}{Y_2(s)}, \quad (3.98)$$

$$Y_3(s) = Y_2(s) - \frac{k_{02}}{s} = \frac{s^4 + 6s^2 + 8}{0.625s^3 + 1.75s} - \frac{4.5714}{s} = \frac{s^3 + 3.1429s}{0.625s^3 + 1.75s} = \frac{1}{Z_3(s)}, \quad (3.99)$$

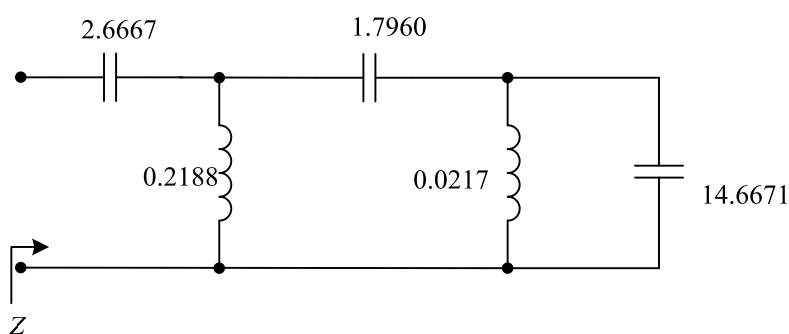
$$Z_4(s) = Z_3(s) - \frac{k_{03}}{s} = \frac{0.625s^2 + 1.75}{s^3 + 3.1429s} - \frac{0.5568}{s} = \frac{0.06818s}{s^2 + 3.1429} = \frac{1}{Y_4(s)}, \quad (3.100)$$

$$Y_5(s) = Y_4(s) - \frac{k_{04}}{s} = \frac{s^2 + 3.1429}{0.06818s} - \frac{46.095}{s} = \frac{s}{0.06818} = \frac{1}{Z_5(s)}. \quad (3.101)$$

Razvoj zadate impedanse na verižne razlomke je:

$$Z(s) = \frac{0.375}{s} + \frac{1}{\frac{4.5714}{s} + \frac{1}{\frac{0.5568}{s} + \frac{1}{\frac{46.095}{s} + \frac{1}{\frac{0.06818}{s}}}}}. \quad (3.102)$$

Električna šema zadate impedanse je prikazana na Slici 3.14.



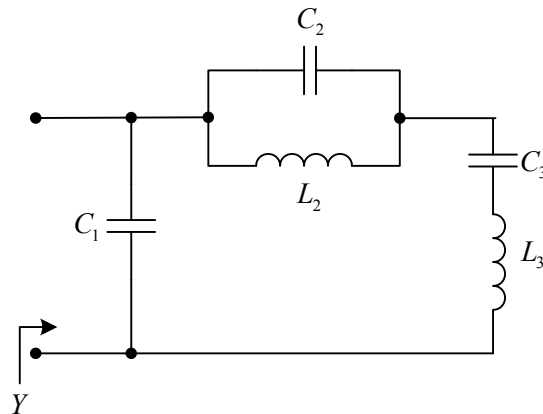
Slika 3.14 Električna šema zadate impedanse u obliku druge Kauerove forme.

Primjetimo da je ova LC mreža ekvivalentna mreži iz Primjera 3.1. U oba slučaja za realizaciju nam je trebalo pet elemenata, te su realizacije kanoničke.

□

Primjer 3.5:

Realizovati admitansu $Y(s) = \frac{s(s^2 + 2)(s^2 + 4)}{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}$ u formi datoj na Slici 3.15.



Slika 3.15 Kombinovana realizacija impedanse.

Rješenje:

Zadata forma se ne može postići primjenom samo jednog od izloženih metoda, već ih je neophodno kombinovati. Prvo uklanjamo pol u beskonačnosti admitanse kako bismo realizovali kondenzator kapacitivnosti C_1 u odvodnoj grani:

$$Y(s) = k_{\infty}s + Y_1(s), \quad (3.103)$$

$$k_{\infty} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Y(s)}{s} \Rightarrow C_1 = 1.000. \quad (3.104)$$

Zatim realizujemo preostalu admitansu:

$$Y_1(s) = Y(s) - s = \frac{2s(s^2 + 2.5)}{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}. \quad (3.105)$$

Budući da treba da realizujemo redno vezano paralelno oscilatorno kolo, admitansu $Y_1(s)$ invertujemo, pa iz tako dobijene impedanse $Z_1(s)$:

$$Z_1(s) = \frac{1}{Y_1(s)} = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}{2s(s^2 + 2.5)}, \quad (3.106)$$

izdvajamo konjugovano kompleksni par polova $s_{1,2} = \pm j\sqrt{2.5}$:

$$Z_1(s) = \frac{k_1 s}{s^2 + 2.5} + Z_2(s), \quad (3.107)$$

$$k_1 = \lim_{s^2 = -2.5} \frac{s^2 + 2.5}{s} \cdot \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}{2s(s^2 + 2.5)} = 0.15. \quad (3.108)$$

Vrijednosti kondenzatora i kalema u paralelnom oscilatornom kolu se računaju iz impedanse tog kola na sljedeći način:

$$\frac{0.15s}{s^2 + 2.5} = \frac{1}{\frac{s}{0.15} + \frac{2.5}{0.15s}} = \frac{1}{C_2 s + \frac{1}{L_2 s}} \Rightarrow C_2 = 6.667, L_2 = 0.060. \quad (3.109)$$

Impedansa koja je preostala za realizaciju je:

$$Z_2(s) = Z_1(s) - \frac{0.15s}{s^2 + 2.5} = \frac{s^2 + 1.2}{2s}. \quad (3.110)$$

Zatim nam treba paralelno vezano redno oscilatorno kolo. Invertujemo impedansu $Z_2(s)$:

$$Y_2(s) = \frac{1}{Z_2(s)} = \frac{2s}{s^2 + 1.2}, \quad (3.111)$$

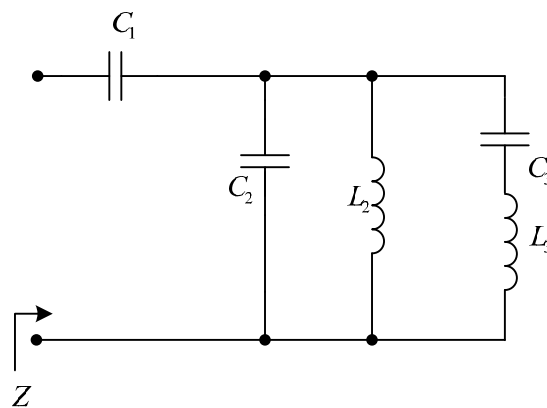
pa odredimo vrijednosti kalema i kondenzatora u rednom oscilatornom kolu iz njegove admitanse:

$$\frac{2s}{s^2 + 1.2} = \frac{1}{\frac{s}{2} + \frac{0.6}{s}} = \frac{1}{L_3 s + \frac{1}{C_3 s}} \Rightarrow L_3 = 0.500, C_3 = 1.667. \quad (3.112)$$

□

Primjer 3.6:

Realizovati impedansu $Z(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}{s(s^2 + 2)(s^2 + 4)}$ u formi datoj na Slici 3.16.



Slika 3.16 Kombinovana realizacija impedanse.

Rješenje:

Prvo uklanjamo pol impedanse $Z(s)$ u nuli da bismo dobili redno vezan kondenzator C_1 :

$$Z(s) = \frac{k_0}{s} + Z_1(s) = \frac{3}{8s} + \frac{(s^2+1)(s^2+3)}{s(s^2+2)(s^2+4)} \Rightarrow C_1 = \frac{8}{3} = 2.6667, \quad (3.113)$$

pa ostatak mreže:

$$Z_1(s) = Z(s) - \frac{k_0}{s} = \frac{(s^2+1)(s^2+3)}{s(s^2+2)(s^2+4)} - \frac{3}{8s} = \frac{0.625s(s^2+2.8)}{s^4+6s^2+8}. \quad (3.114)$$

realizujemo Fosterovim drugim metodom. Fosterovim drugim metodom realizujemo admitanse, te je potrebno invertovati $Z_1(s)$:

$$Y_1(s) = \frac{1}{Z_1(s)} = \frac{s^4+6s^2+8}{0.625s(s^2+2.8)}. \quad (3.115)$$

Razvojem admitanse na parcijalne razlomke dobijamo:

$$Y_1(s) = 1.600s + \frac{4.5714}{s} + \frac{0.5486s}{s^2+2.8} \Rightarrow C_2 = 1.6000, L_2 = 1/4.5714 = 0.2188, \quad (3.116)$$

a vrijednosti induktivnosti kalema L_3 i kapacitivnosti kondenzatora C_3 određujemo iz admitanse rednog oscilatornog kola:

$$\frac{0.5486s}{s^2+2.8} = \frac{1}{\frac{s}{0.5486} + \frac{2.8}{0.5486s}} = \frac{1}{L_3s + \frac{1}{C_3s}} \Rightarrow L_3 = 1.8228, C_3 = 0.1959. \quad (3.117)$$

□

3.4 Osobine RC imitansi

Osobine RC impedansi i osobine RC admitansi se donekle razlikuju, pa ćemo ih razmatrati odvojeno.

3.4.1 Osobine RC impedansi

Impedansa pasivne RC mreže sa jednim pristupom je pozitivno realna funkcija. Iz (3.9) vidimo da je njen opšti oblik:

$$Z_{RC}(s) = \sum_R R_k \frac{|I_k(s)|^2}{|I_1(s)|^2} + \frac{1}{s} \sum_C \frac{1}{C_k} \frac{|I_k(s)|^2}{|I_1(s)|^2}. \quad (3.118)$$

- Svi polovi i nule RC impedanse su na negativnom dijelu realne ose u s ravni.

Dokaz:

Uz oznake:

$$\alpha(s) = \sum_R R_k \frac{|I_k(s)|^2}{|I_1(s)|^2} \geq 0, \quad \forall s, \quad (3.119)$$

$$\beta(s) = \sum_C \frac{1}{C_k} \frac{|I_k(s)|^2}{|I_1(s)|^2} \geq 0, \quad \forall s, \quad (3.120)$$

zaključujemo da se nule impedanse:

$$Z_{RC}(s) = 0 \Rightarrow \alpha(s)s + \beta(s) = 0 \Rightarrow s = -\frac{\beta(s)}{\alpha(s)} \quad (3.121)$$

nalaze na negativnom dijelu realne ose u s ravni. Dualnim putem izvodimo isti zaključak za polove RC impedansi.

□

- Reziduumi RC impedanse $Z_{RC}(s)$ su realni i pozitivni.

Dokaz:

Da bismo na jednostavniji način došli do izraza za RC impedansu zapisanu preko razvoja na parcijalne razlomke, posmatrajmo prvo LC mrežu, čija impedansa se može izraziti kao:

$$Z_{LC}(s) = L_{\infty}s + \frac{1}{C_0s} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i s + \frac{1}{L_i s}}. \quad (3.122)$$

Ako svaku granu sa kalemom impedanse $L_i s$ zamijenimo otpornikom otpornosti R_i , dobićemo impedansu RC mreže:

$$Z_{RC}(s) = R_{\infty} + \frac{1}{C_0s} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i s + \frac{1}{R_i}}. \quad (3.123)$$

Uz oznake $k_{\infty} = R_{\infty}$, $k_0 = \frac{1}{C_0}$, $k_i = \frac{1}{C_i}$ i $\sigma_i = \frac{1}{R_i C_i}$, RC impedansu možemo zapisati sa:

$$Z_{RC}(s) = k_{\infty} + \frac{k_0}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s + \sigma_i}. \quad (3.124)$$

Iz (3.124) zaključujemo da su svi reziduumi k_i , $i = 1, 2, \dots, n$, kao i k_0 i k_{∞} realni i pozitivni.

□

- RC impedansa $Z_{RC}(s)$ ne može imati pol u beskonačnosti. Uvijek je $Z_{RC}(\infty) < Z_{RC}(0)$.

Dokaz:

Vrijednost RC impedanse u beskonačnosti je konačna i nenegativna:

$$Z_{RC}(\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} Z_{RC}(s) = k_{\infty}, \quad (3.125)$$

dok se, na osnovu (3.124), vrijednost u nuli može izraziti kao:

$$Z_{RC}(0) = k_{\infty} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_0}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\sigma_i}, \quad (3.126)$$

odakle slijedi da je:

$$k_{\infty} = Z_{RC}(\infty) = Z_{RC}(0) - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_0}{s} - \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\sigma_i}. \quad (3.127)$$

Kako su svi reziduumi realni i pozitivni, vrijedi da je:

$$Z_{RC}(\infty) < Z_{RC}(0). \quad (3.128)$$

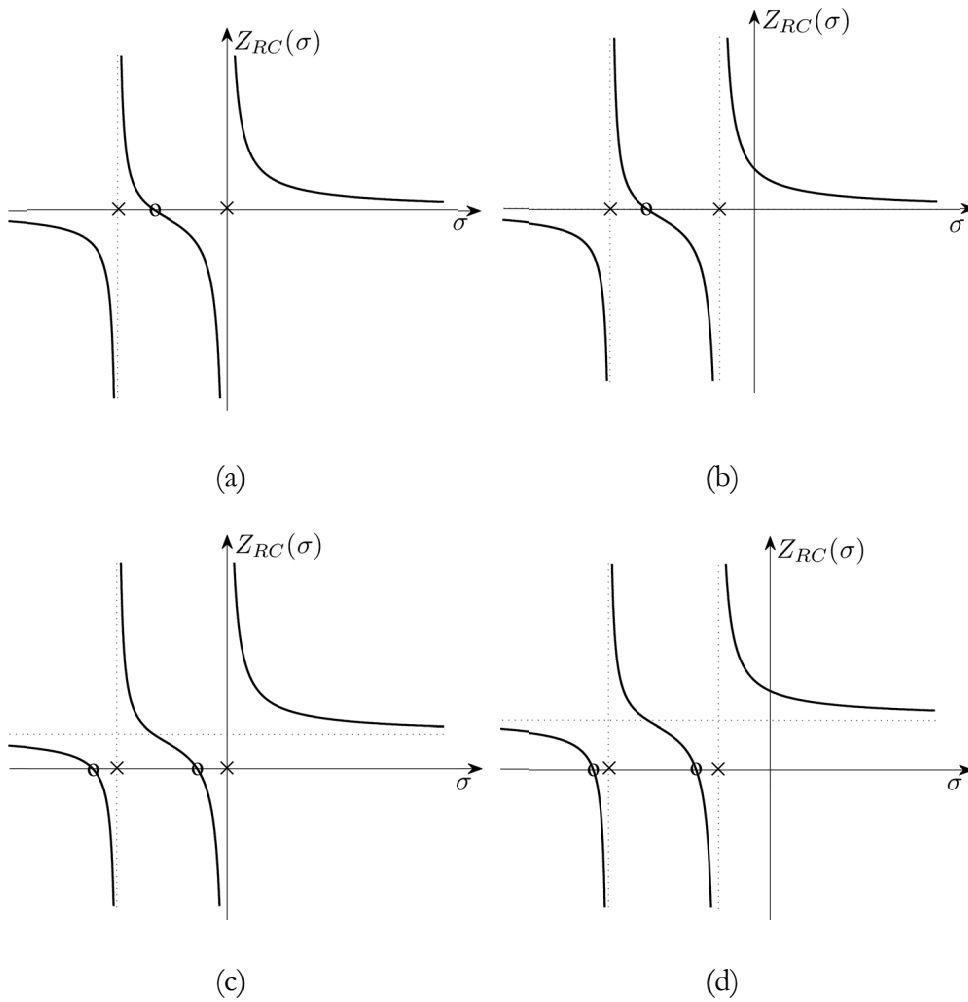
□

- Impedansa RC mreže $Z_{RC}(s)$ je monotonno opadajuća funkcija duž realne ose s ravni, izuzev u polovima funkcije $Z_{RC}(s)$.

Dokaz:

Izvod funkcije $Z_{RC}(s)$ po σ je negativan:

$$\frac{dZ_{RC}(s)}{ds} = -\frac{k_0}{s^2} - \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{(s + \sigma_i)^2} \Big|_{s=\sigma} = -\frac{k_0}{\sigma^2} - \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{(\sigma + \sigma_i)^2} < 0, \quad (3.129)$$



Slika 3.17 Mogući oblici funkcije $Z_{RC}(\sigma)$.

osim za $\sigma = -\sigma_i$, $i=1,2,\dots,n$, što su polovi funkcije $Z_{RC}(s)$. Grafički prikaz mogućih oblika RC impedanse u funkciji od σ je prikazan na Slici 3.17.

□

- Realni dio impedanse $Z_{RC}(s)$, posmatran na imaginarnoj osi, monotono opada kad $|\Omega|$ raste.

Dokaz:

Realni dio impedanse $Z_{RC}(s)$, posmatran na imaginarnoj osi:

$$\operatorname{Re}\{Z_{RC}(\Omega)\} = k_{\infty} + \sum_{i=1}^n \frac{k_i \sigma_i}{\Omega^2 + \sigma_i^2}, \quad (3.130)$$

očito opada pri porastu vrijednosti za $|\Omega|$. Stoga $\operatorname{Re}\{Z_{RC}(\Omega)\}$ ima minimalnu vrijednost u beskonačnosti.

S druge strane, iz izraza:

$$Z_{RC}(s) = k_{\infty} + \frac{k_0}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s + \sigma_i} \quad (3.131)$$

se vidi da je $Z_{RC}(\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} Z_{RC}(s)$ realno. Dakle:

$$Z_{RC}(\infty) = \operatorname{Re}\{Z_{RC}(\infty)\} \leq \operatorname{Re}\{Z_{RC}(\Omega)\}, \quad \forall |\Omega| < \infty. \quad (3.132)$$

To znači da je $Z_{RC}(\infty)$ najveća pozitivna konstanta koju možemo izvući iz $Z_{RC}(s)$, a da preostala impedansa i dalje ima sve osobine RC impedansi mreža sa jednim pristupom. Ovo je važna osobina za realizaciju RC mreža po prvom Kauerovom metodu.

□

Svi polovi i nule $Z_{RC}(s)$ su jednostruki i smjenjuju se duž negativnog dijela realne ose. Posmatrajući moguće rasporede nula i polova na Slici 3.17 i znajući da je $Z_{RC}(\infty) < Z_{RC}(0)$, zaključujemo da kritična tačka najbliža ishodištu ili u ishodištu mora biti pol, dok kritična tačka najbliža beskonačnosti ili u beskonačnosti mora biti nula. Uključujući tačku u beskonačnosti, broj polova jednak je broju nula.

Na osnovu navedenih osobina, impedansa RC mreže se može predstaviti u obliku:

$$Z_{RC}(s) = \frac{k_{\infty}(s + \sigma_2)(s + \sigma_4)\dots(s + \sigma_r)}{(s + \sigma_1)(s + \sigma_3)\dots(s + \sigma_{r-1})} \quad (3.133)$$

ako RC impedansa $Z_{RC}(s)$ u beskonačnosti nema nulu, odnosno u obliku:

$$Z_{RC}(s) = \frac{k(s + \sigma_2)(s + \sigma_4)\dots(s + \sigma_r)}{(s + \sigma_1)(s + \sigma_3)\dots(s + \sigma_{r+1})}, \quad (3.134)$$

ako je u beskonačnosti nula impedanse $Z_{RC}(s)$, pri čemu je r parno i $0 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_{r+1}$.

U prvom slučaju, broj konačnih polova jednak je broju konačnih nula i stepeni polinoma u brojniku i nazivniku su jednaki. U drugom slučaju, stepen polinoma u nazivniku je za jedan veći, što znači da je broj konačnih polova veći od broja konačnih nula.

Sve navedene osobine RC impedansi nisu međusobno neovisne. Potrebni i dovoljni uslovi koje treba da zadovolji funkcija prenosa da bi bila RC impedansa su:

1. da je racionalna funkcija kompleksne učestanosti,
2. da ima proste polove i to samo na negativnom dijelu realne ose ili u koordinatnom početku, dok u beskonačnosti ne smije da ima pol,
3. da su reziduumi u polovima realni i pozitivni.

3.4.2 Osobine RC admitansi

Opšti oblik admitanse pasivne RC mreže sa jednim pristupom je:

$$Y_{RC}(s) = C_{\infty}s + \frac{1}{R_0} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i + \frac{1}{C_i s}}. \quad (3.135)$$

Uz oznake: $k_0 = \frac{1}{R_0}$, $k_i = \frac{1}{R_i}$, $k_\infty = C_\infty$, $\sigma_i = \frac{1}{R_i C_i}$, admitansu RC mreže možemo napisati u obliku:

$$Y_{RC}(s) = k_\infty s + k_0 + \sum_{i=1}^n \frac{k_i s}{s + \sigma_i}. \quad (3.136)$$

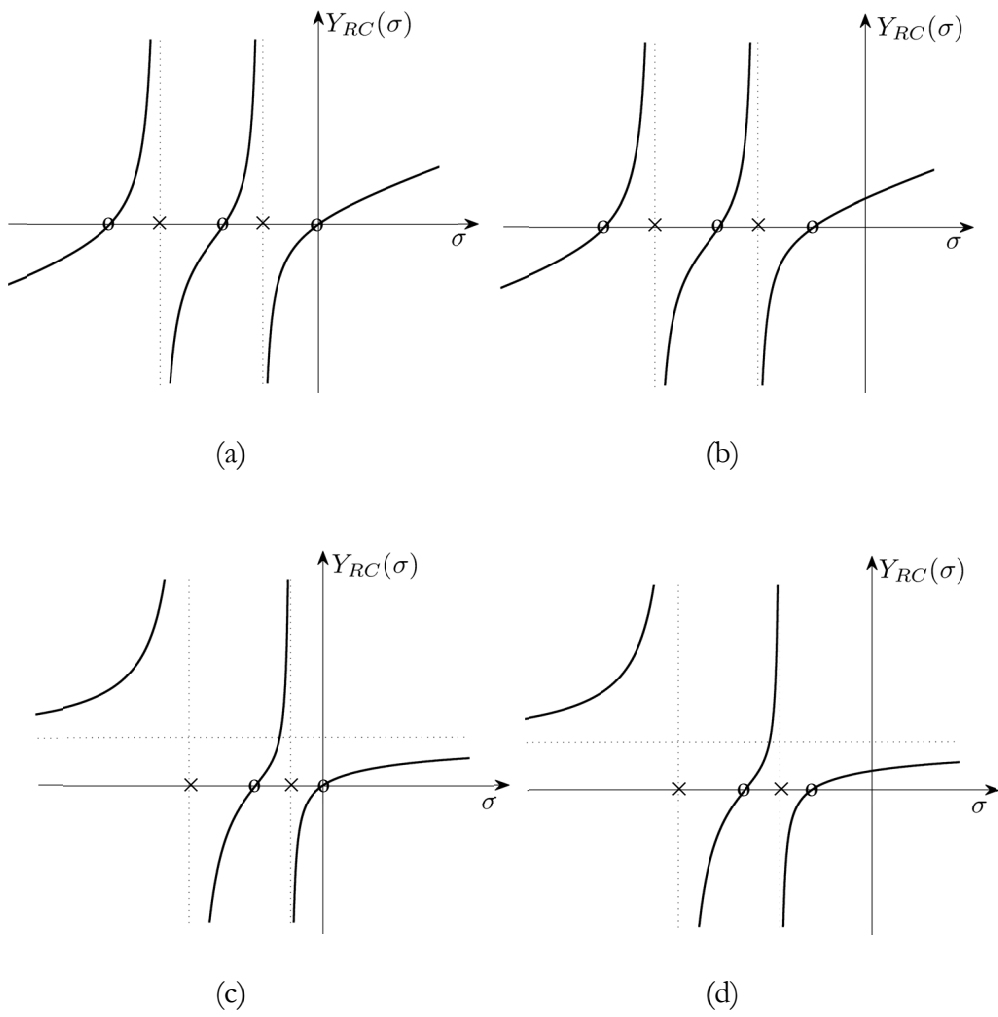
Većina osobina RC admitansi je slična osobinama RC impedansi, pa ćemo ih navesti i samo neke od njih dokazati:

- Svi polovi i nule RC admitanse $Y_{RC}(s)$ su na negativnom dijelu realne ose s ravni.
- Reziiduumi RC admitanse $Y_{RC}(s)$ u konačnim, realnim i negativnim polovima su realni i negativni. Reziiduum $Y_{RC}(s)$ u polu u beskonačnosti je realan i pozitivan.
- RC admitansa $Y_{RC}(s)$ ne može imati pol u nuli. Uvijek je:

$$Y_{RC}(0) \leq Y_{RC}(\infty) = |Y_{RC}(-\infty)|. \quad (3.137)$$

Admitansa $Y_{RC}(s)$ može imati pol u beskonačnosti i/ili nulu u nuli.

- RC admitansa $Y_{RC}(s)$ je monotono rastuća funkcija duž realne ose s ravni, izuzev u polovima, vidi Sliku 3.18.
- Realni dio admitanse $\frac{Y_{RC}(s)}{s}$, posmatran na imaginarnoj osi, monotono opada kad $|\Omega|$ raste.



Slika 3.18 Mogući oblici funkcije $Y_{RC}(\sigma)$.

Dokaz:

Admitansa:

$$\frac{Y_{RC}(s)}{s} = k_{\infty} + \frac{k_0}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s + \sigma_i} \quad (3.138)$$

ima istu formu kao impedansa $Z_{RC}(s)$, te $\operatorname{Re}\{Y_{RC}(\Omega)/j\Omega\}$, jednako kao $\operatorname{Re}\{Z_{RC}(\Omega)\}$, monotono opada kad $|\Omega|$ raste.

□

- Realni dio admitanse $Y_{RC}(s)$, posmatran na imaginarnoj osi, je monotono rastuća funkcija od $|\Omega|$. Vrijedi da je $Y_{RC}(0) \leq \operatorname{Re}\{Y_{RC}(\Omega)\}$, $\forall \Omega$.

Dokaz:

Realni dio RC admitanse, posmatran na imaginarnoj osi, se može zapisati kao:

$$\operatorname{Re}\{Y_{RC}(\Omega)\} = k_0 + \sum_{i=1}^n \frac{k_i \Omega^2}{\Omega^2 + \sigma_i^2}. \quad (3.139)$$

Minimalna vrijednost $\operatorname{Re}\{Y_{RC}(\Omega)\}$ se dobija za $\Omega=0$, jer je drugi sabirak (suma) pozitivan za svako $\Omega \neq 0$:

$$Y_{RC}(0) \leq \operatorname{Re}\{Y_{RC}(\Omega)\}, \quad \forall \Omega. \quad (3.140)$$

Takođe vrijedi da je:

$$Y_{RC}(0) = \operatorname{Re}\{Y_{RC}(0)\} = k_0. \quad (3.141)$$

Dakle, $Y_{RC}(0)$ je najveća konstanta koja se može izvući iz $Y_{RC}(s)$, a da preostala funkcija i dalje ima sve osobine RC admitanse mreže sa jednim pristupom, što je značajno pri realizaciji RC mreža drugim Kauerovim metodom.

□

Svi polovi i nule $Y_{RC}(s)$ su jednostruki i smjenjuju se duž realne ose. Kritična tačka najbliža ishodištu ili u ishodištu mora biti nula, a kritična tačka najbliža beskonačnosti ili u beskonačnosti mora biti pol. Uključujući pol u beskonačnosti, broj polova jednak je broju nula. Ako RC admitansa nema pol u beskonačnosti, njen oblik je:

$$Y_{RC}(s) = \frac{k_{\infty} (s + \sigma_1)(s + \sigma_3) \dots (s + \sigma_r)}{(s + \sigma_2)(s + \sigma_4) \dots (s + \sigma_{r+1})}, \quad (3.142)$$

a ako ima pol u beskonačnosti oblik admitanse je:

$$Y_{RC}(s) = \frac{k (s + \sigma_1)(s + \sigma_3) \dots (s + \sigma_r)}{(s + \sigma_2)(s + \sigma_4) \dots (s + \sigma_{r-1})}, \quad (3.143)$$

gdje je r neparno i $0 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_{r+1}$.

U drugom slučaju stepen polinoma u brojniku je veći od stepena polinoma u nazivniku.

Osobine RC admitansi koje smo analizirali nisu međusobno neovisne. Potrebni i dovoljni uslovi koje treba da zadovolji funkcija prenosa da bi bila RC admitansa su:

1. da je racionalna funkcija kompleksne učestanosti,
2. da ima proste polove i to samo na negativnom dijelu realne ose ili u beskonačnosti, dok u koordinatnom početku ne smije da ima pol,
3. da su reziduumi funkcije $\frac{Y_{RC}(s)}{s}$ u njenim polovima realni i pozitivni.

3.5 Fosterovi metodi realizacije RC imitansi

Fosterov prvi i drugi metod realizacije RC imitanse se, jednako kao kod Fosterovih metoda realizacije LC imitansi, zasniva na razvoju RC imitanse na parcijalne razlomke.

3.5.1 Fosterov prvi metod

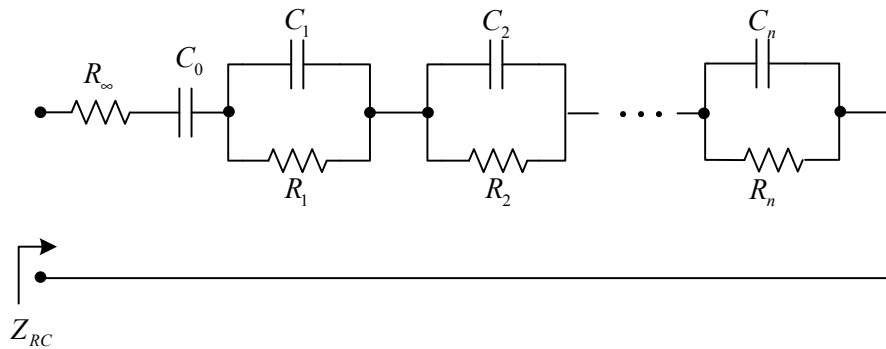
Fosterov prvi metod realizacije zasniva se na razvoju RC impedanse na parcijalne razlomke:

$$Z_{RC}(s) = R_{\infty} + \frac{1}{C_0 s} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i s + \frac{1}{R_i}}. \quad (3.144)$$

Iz (3.144) je potpuno jasno da se radi o rednoj vezi otpornika otpornosti R_{∞} , kondenzatora kapacitivnosti C_0 i impedansi:

$$Z_i(s) = \frac{1}{C_i s + \frac{1}{R_i}}, \quad (3.145)$$

koje se realizuju kao paralelne veze otpornika R_i i kondenzatora C_i . Na Slici 3.19 prikazana je opšta forma RC mreže koja se dobije realizacijom Fosterovim prvim metodom.



Slika 3.19 Fosterova prva forma RC mreže.

Primjer 3.7:

Realizovati RC impedansu $Z_{RC}(s) = \frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)}$ Fosterovim prvim metodom.

Rješenje:

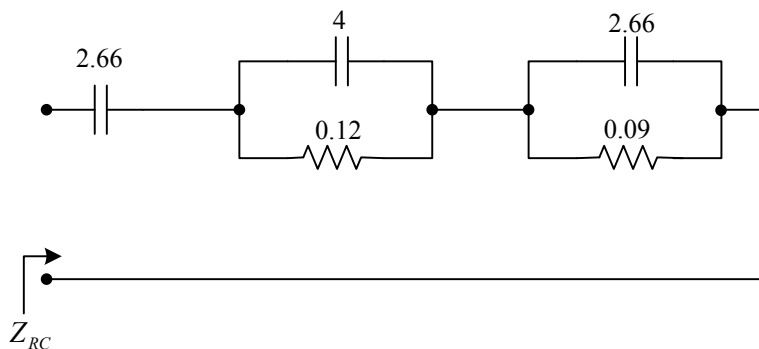
Zadata impedansa ima sve potrebne osobine impedanse RC mreže sa jednim pristupom. Razvojem na parcijalne razlomke dobijamo:

$$Z_{RC}(s) = \frac{k_0}{s} + \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s+4}, \quad k_0 = \frac{3}{8}, \quad k_1 = \frac{1}{4} \text{ i } k_2 = \frac{3}{8}, \quad (3.146)$$

tako da je:

$$Z_{RC}(s) = \frac{1}{\frac{8}{3}s} + \frac{1}{4s+8} + \frac{1}{\frac{8}{3}s + \frac{32}{3}} = \frac{1}{C_0s} + \frac{1}{C_1s + \frac{1}{R_1}} + \frac{1}{C_2s + \frac{1}{R_2}}. \quad (3.147)$$

Električna šema realizovane RC mreže prikazana je na Slici 3.20.



Slika 3.20 Električna šema zadate RC impedanse u obliku druge Fosterove forme.

□

3.5.2 Fosterov drugi metod

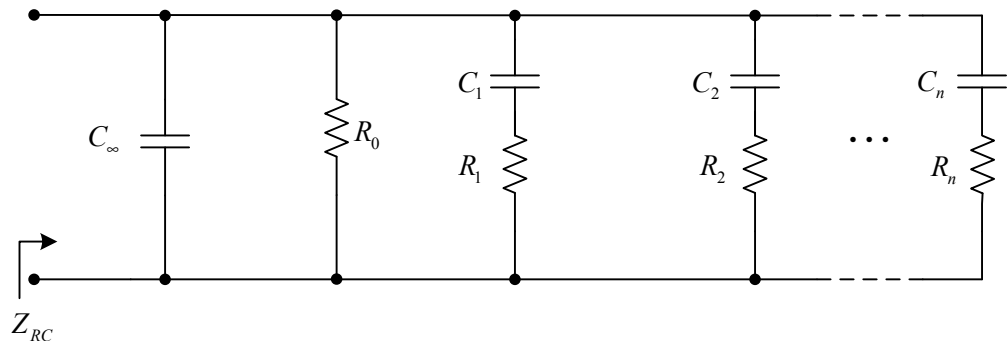
Fosterov drugi metod realizacije zasniva se na razvoju RC admitanse na parcijalne razlomke:

$$Y_{RC}(s) = C_{\infty}s + \frac{1}{R_0} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i + \frac{1}{C_i s}}. \quad (3.148)$$

Ovdje se radi o zbiru admitansi, odnosno o paralelnoj vezi kondenzatora kapacitivnosti C_{∞} , otpornika otpornosti R_0 i admitansi:

$$Y_i(s) = \frac{1}{R_i + \frac{1}{C_i s}}, \quad (3.149)$$

koje se realizuju u vidu redne veze otpornika R_i i kondenzatora C_i . Opšta forma RC mreže koja se dobije realizacijom Fosterovim drugim metodom je data na Slici 3.21.



Slika 3.21 Fosterova druga forma RC mreže.

□

Primjer 3.8:

Realizovati RC impedansu $Z_{RC}(s) = \frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)}$ Fosterovim drugim metodom.

Rješenje:

Fosterovom drugom formom realizujemo admitanse, te prvo zadatu impedansu invertujemo:

$$Y_{RC}(s) = \frac{s(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)}. \quad (3.150)$$

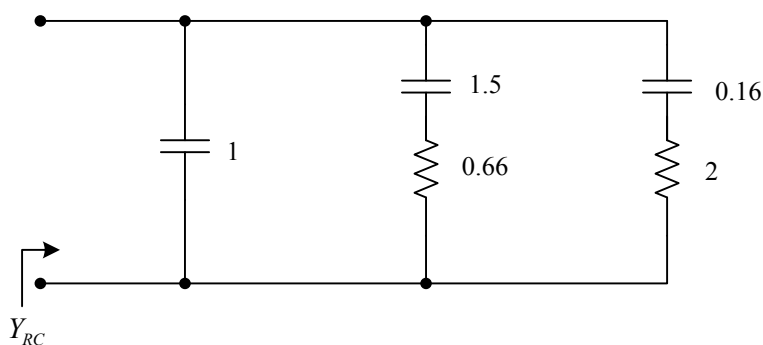
Stepen polinoma u brojniku je za jedan veći od stepena polinoma u nazivniku, pa na parcijalne razlomke razvijamo $\frac{Y_{RC}(s)}{s}$:

$$\frac{Y_{RC}(s)}{s} = 1 + \frac{2s+5}{(s+1)(s+3)} = 1 + \frac{\frac{3}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+3}. \quad (3.151)$$

Množenjem lijeve i desne strane (3.151) sa s , dobijamo:

$$Y_{RC}(s) = s + \frac{\frac{3}{2}s}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}s}{s+3} = s + \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{2}{3s}} + \frac{1}{2 + \frac{6}{s}} = C_{\infty}s + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{C_1s}} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{C_2s}}, \quad (3.152)$$

odakle jednostavnim poređenjem određujemo vrijednosti elemenata. Električna šema zadate admitanse prikazana je na Slici 3.22.



Slika 3.22 Električna šema zadate RC admitanse u obliku druge Fosterove forme.

□

3.6 Kauerovi metodi realizacije RC imitansi

Kauerov prvi metod zasniva se na sukcesivnom izdvajanju pola RC admitanse u beskonačnosti, dok se Kauerov drugi metod zasniva na sukcesivnom izdvajanju pola RC impedanse u nuli.

3.6.1 Kauerov prvi metod

Kauerov prvi metod koristi sljedeće osobine RC imitansi:

- RC admitansa $Y_{RC}(s)$ može imati pol u beskonačnosti,
- $Z_{RC}(\infty) = \operatorname{Re}\{Z_{RC}(\infty)\} \leq \operatorname{Re}\{Z_{RC}(\Omega)\}, \forall |\Omega| < \infty$.

To znači da, ako iz RC impedanse izdvojimo $Z_{RC}(\infty)$, preostala impedansa:

$$Z'_{RC}(s) = Z_{RC}(s) - Z_{RC}(\infty), \quad (3.153)$$

i dalje ima istu prirodu kao $Z_{RC}(s)$. U beskonačnosti je $Z'_{RC}(\infty) = 0$, dok admitansa $Y'_{RC}(s)$ ima pol u beskonačnosti.

Realizacija se zasniva na sukcesivnom uklanjanju pola u beskonačnosti iz RC admitanse. Ukoliko admitansa nema pol u beskonačnosti, ona se invertuje, pa se iz tako dobijene impedanse izdvaja vrijednost te impedanse u beskonačnosti. Na taj način se postiže da impedansa u beskonačnosti bude nula, odnosno da nakon invertovanja admitansa ima pol u beskonačnosti.

Razmotrimo dvije mogućnosti. Prva je da zadata admitansa $Y_{RC}(s)$ ima pol u beskonačnosti, a druga da je $Y_{RC}(s)$ u beskonačnosti konačno.

Ako $Y_{RC}(s)$ ima pol u beskonačnosti, on se može odmah izdvojiti i realizovati odvodnim kondenzatorom:

$$Y_{RC}(s) = C_0 s + Y_{RC1}(s), \quad (3.154)$$

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} Y_{RC}(s), \quad (3.155)$$

kao na Slici 3.23. Preostala funkcija:

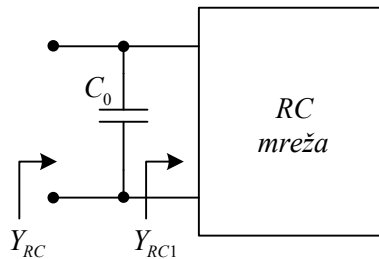
$$Y_{RC1}(s) = Y_{RC}(s) - C_0 s, \quad (3.156)$$

je takođe admitansa, koja u beskonačnosti nema pol. RC admitansa $Y_{RC1}(s)$ u beskonačnosti ne može ni da bude jednaka nuli, već ima neku konačnu vrijednost različitu od nule, jer RC impedansa u beskonačnosti ne može da ima pol.

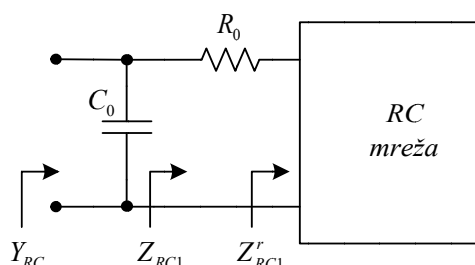
Realizacija $Y_{RC1}(s)$ se svodi na drugu mogućnost koja može da se pojavi u toku realizacije: da admitansa nema pol u beskonačnosti. U tom slučaju invertujemo $Y_{RC1}(s)$ da dobijemo $Z_{RC1}(s)$. Iz $Z_{RC1}(s)$ možemo izdvojiti $Z_{RC1}(\infty)$, a da preostala funkcija $Z'_{RC1}(s)$ i dalje ima prirodu RC impedanse:

$$Z'_{RC1}(s) = Z_{RC1}(s) - Z_{RC1}(\infty). \quad (3.157)$$

Dakle, $Z_{RC1}(s)$ možemo realizovati kao rednu vezu otpornika $R_0 = Z_{RC1}(\infty)$ i preostale impedanse $Z'_{RC1}(s)$, kao na Slici 3.24.



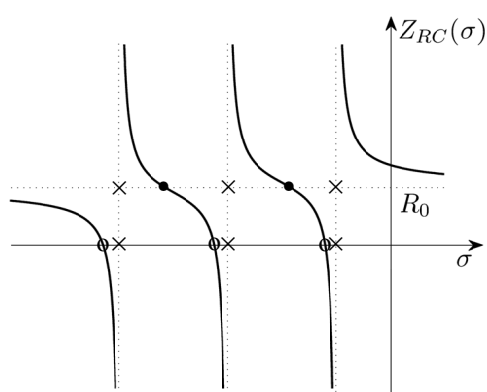
Slika 3.23 Kauerov prvi metod realizacije RC admitanse :
uklanjanje pola u beskonačnosti.



Slika 3.24 Kauerov prvi metod realizacije RC admitanse: izdvajanje realnog dijela.

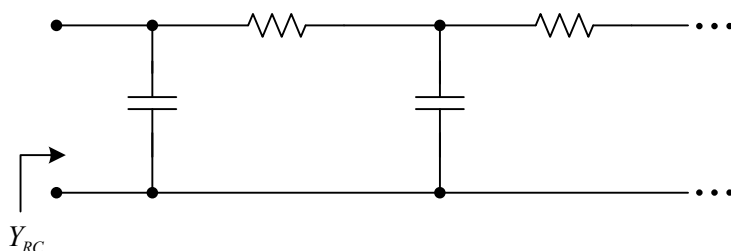
Impedansa $Z'_{RC1}(s)$ preostala nakon oduzimanja $Z_{RC1}(\infty)$ od $Z_{RC1}(s)$ u beskonačnosti ima nulu, pa admitansa $Y_{RC2}(s) = \frac{1}{Z'_{RC1}(s)}$ u beskonačnosti ima pol.

Ako posmatramo efekat izdvajanja otpornika $R_0 = Z_{RC1}(\infty)$ na tipičnom grafiku $Z_{RC}(\sigma)$, onda to odgovara pomaku horizontalne ose σ prema gore za R_0 , kao na Slici 3.25. Treba primjetiti da se lokacije polova ne mijenjaju, dok se lokacije nula mijenjaju i nastaje dodatna nula u beskonačnosti.

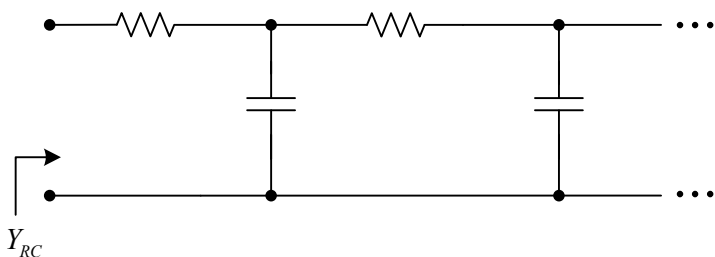


Slika 3.25 Efekat izdvajanja minimalnog realnog dijela impedanse.

Postupak realizacije se dalje nastavlja kao u prvom slučaju. Na ovaj način se u realizovanoj mreži dobiju kondenzatori u odvodnim, a otpornici u rednim granama ljestvičaste mreže. U prvom slučaju, kada polazna admitansa koju realizujemo ima pol u beskonačnosti, realizacija počinje odvodnim kondenzatorom, kao na Slici 3.26, a u drugom slučaju, kada u beskonačnosti nije pol polazne admitanse, realizacija počinje redno vezanim otpornikom, kao na Slici 3.27.



Slika 3.26 Kauerova prva forma kada RC admitansa ima pol u beskonačnosti.



Slika 3.27 Kauerova prva forma kada RC admitansa nema pol u beskonačnosti.

Primjer 3.9:

Realizovati RC impedansu $Z(s) = \frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)}$ u obliku Kauerove prve forme.

Rješenje:

Zadana impedansa u beskonačnosti nema pol, već nulu. Zbog toga je invertujemo i dobijamo admitansu:

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{s^3 + 6s^2 + 8s}{s^2 + 4s + 3} \quad (3.158)$$

ima pol u beskonačnosti, te odmah realizujemo odvodni kondenzator:

$$Y_1(s) = Y(s) - k_0 s = \frac{s^3 + 6s^2 + 8s}{s^2 + 4s + 3} - s \Rightarrow C_0 = 1. \quad (3.159)$$

Preostala admitansa:

$$Y_1(s) = \frac{2s^2 + 5s}{s^2 + 4s + 3} \quad (3.160)$$

nakon invertovanja daje impedansu koja u beskonačnosti ima konačnu vrijednost:

$$Z_1(s) = \frac{s^2 + 4s + 3}{2s^2 + 5s}. \quad (3.161)$$

Oduzimanjem $R_1 = Z_1(\infty)$ iz $Z_1(s)$ dobijamo otpornik:

$$Z_2(s) = Z_1(s) - Z_1(\infty) = \frac{s^2 + 4s + 3}{2s^2 + 5s} - \frac{1}{2} \Rightarrow R_1 = \frac{1}{2} \quad (3.162)$$

redno vezan sa preostalim impedansom:

$$Z_2(s) = \frac{\frac{3}{2}s + 3}{2s^2 + 5s}, \quad (3.163)$$

odnosno admitansom:

$$Y_2(s) = \frac{2s^2 + 5s}{\frac{3}{2}s + 3}. \quad (3.164)$$

Admitansa $Y_2(s)$ ima pol u beskonačnosti, pa ponovo izdvajamo odvodni kondenzator:

$$Y_3(s) = Y_2(s) - k_1s = \frac{2s^2 + 5s}{\frac{3}{2}s + 3} - \frac{4}{3}s \Rightarrow C_1 = \frac{4}{3}. \quad (3.165)$$

Preostala admitansa:

$$Y_3(s) = \frac{2s}{3s + 6}, \quad (3.166)$$

se invertuje i izdvajanjem vrijednosti u beskonačnosti realizuje redno vezan otpornik:

$$Z_3(s) = Z_2(s) - Z_2(\infty) = \frac{3s + 6}{2s} - \frac{3}{2} \Rightarrow R_2 = \frac{3}{2}. \quad (3.167)$$

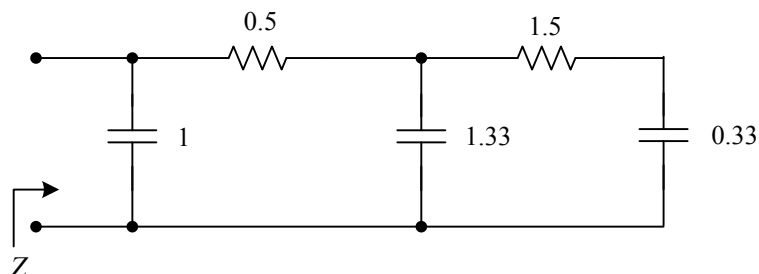
Na kraju, preostalu impedansu $Z_3(s) = \frac{3}{s}$ invertujemo i realizujemo kao odvodni kondenzator:

$$Y_3(s) = \frac{1}{3}s \Rightarrow C_3 = \frac{1}{3}. \quad (3.168)$$

Napisano preko verižnog razlomka, zadata admitansa je:

$$Y(s) = s + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{4}{\frac{3}{3}s + \frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{\frac{1}{3}s}}}}}. \quad (3.169)$$

Električna šema zadate impedanse je prikazana na Slici 3.28.



Slika 3.28 Električna šema zadate RC impedanse u vidu prve Kauerove forme.

□

3.6.2 Kauerov drugi metod

Kauerov drugi metod koristi sljedeće osobine RC imitansi:

- RC impedansa $Z_{RC}(s)$ može imati pol u nuli,
- $Y_{RC}(0) \leq \operatorname{Re}\{Y_{RC}(\Omega)\}, \forall \Omega$.

Prema tome, ako iz RC admitanse izdvojimo $Y_{RC}(0)$, preostala admitansa:

$$Y'_{RC}(s) = Y_{RC}(s) - Y_{RC}(0), \quad (3.170)$$

je iste prirode kao $Y_{RC}(s)$. U nuli je $Y'_{RC}(0) = 0$, dok impedansa $Z'_{RC}(s)$ ima pol u nuli.

Prilikom realizacije se vrši sukcesivno uklanjanje pola u nuli iz RC impedanse. Ako impedansa nema pol u nuli, ona se invertuje. Iz tako dobijene admitanse izdvaja se njena vrijednost u nuli. Na taj način se postiže da admitansa u nuli bude jednaka nuli, odnosno da nakon invertovanja impedansa u nuli ima pol.

Posmatraćemo dva moguća slučaja. U prvom zadata impedansa $Z_{RC}(s)$ ima pol u nuli, dok je u drugom slučaju njena vrijednost u nuli konačna.

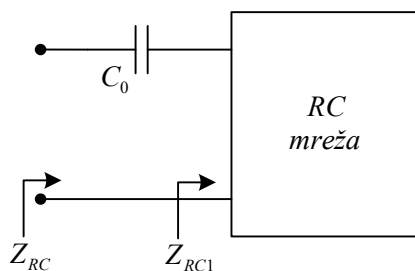
Ako $Z_{RC}(s)$ ima pol u nuli, prvo izvajamo taj pol, što rezultuje redno vezanim kondenzatorom (Slika 3.29):

$$Z_{RC}(s) = \frac{1}{C_0 s} + Z_{RC1}(s), \quad (3.171)$$

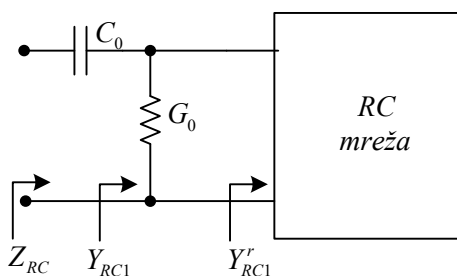
$$\frac{1}{C_0} = \lim_{s \rightarrow 0} s Z_{RC}(s). \quad (3.172)$$

Ako impedansa $Z_{RC1}(s)$ u nuli nema pol, ona se invertuje i od tako dobijene admitanse se oduzima najveća moguća vrijednost, tako da preostala admitansa i dalje ima sve osobine RC admitansi:

$$Y'_{RC1}(s) = Y_{RC1}(s) - Y_{RC1}(0). \quad (3.173)$$



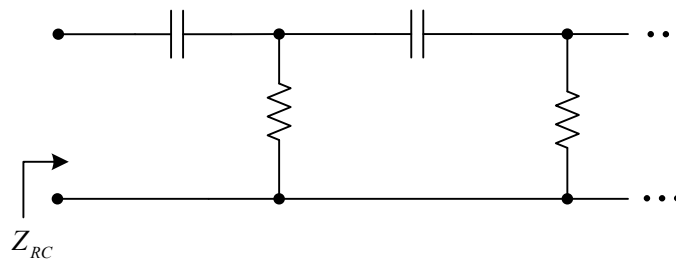
Slika 3.29 Kauerov drugi metod realizacije RC admitanse: uklanjanje pola u nuli.



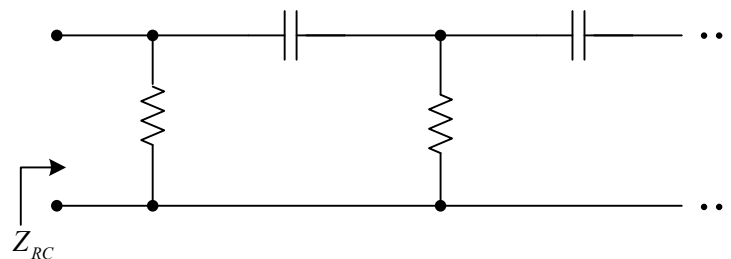
Slika 3.30 Kauerov drugi metod realizacije RC impedanse: izdvajanje realnog dijela.

Tako dobijamo rednu vezu otpornika provodnosti $G_0 = Y_{RC1}(0)$ i preostale admitanse $Y'_{RC1}(s)$, kao na Slici 3.30.

Preostala impedansa ima pol u nuli, pa postupak ponavljamo. Kauerovim drugim metodom realizacije RC mreža u rednim granama dobijamo kondenzatore, a u odvodnim otpornike. Kada polazna impedansa ima pol u nuli, realizacija počinje rednim kondenzatorom, kao na Slici 3.31, a kada u nuli nije pol polazne impedanse, realizacija počinje otpornikom u odvodnoj grani, kao na Slici 3.32.



Slika 3.31 Kauerova druga forma kada RC impedansa ima pol u nuli.



Slika 3.32 Kauerova druga forma kada RC impedansa nema pol u nuli.

Primjer 3.10:

Realizovati RC impedansu $Z(s) = \frac{3+4s+s^2}{8s+6s^2+s^3}$ u vidu Kauerove druge forme.

Rješenje:

Impedansa $Z(s)$ ima pol u nuli, tako da prvo realizujemo redni kondenzator:

$$Z_1(s) = Z(s) - \frac{k_0}{s} = \frac{3+4s+s^2}{8s+6s^2+s^3} - \frac{3}{8s} \Rightarrow C_0 = \frac{8}{3}. \quad (3.174)$$

Preostalu impedansu:

$$Z_1(s) = \frac{\frac{7}{4} + \frac{5}{8}s}{8+6s+s^2}, \quad (3.175)$$

invertujemo, pa oduzimamo njenu vrijednost u nuli i tako realizujemo otpornik u odvodnoj grani:

$$Y_2(s) = Y_1(s) - Y_1(0) = \frac{8+6s+s^2}{\frac{7}{4} + \frac{5}{8}s} - \frac{32}{7} \Rightarrow R_1 = \frac{7}{32}. \quad (3.176)$$

Sad smo dobili admitansu:

$$Y_2(s) = \frac{\frac{22}{7}s + s^2}{\frac{7}{4} + \frac{5}{8}s}, \quad (3.177)$$

koja u nuli ima nulu, tako da odgovarajuća impedansa ima pol u nuli, koji realizujemo kondenzatorom u rednoj grani:

$$Z_3(s) = Z_2(s) - \frac{k_1}{s} = \frac{\frac{7}{4} + \frac{5}{8}s}{\frac{22}{7}s + s^2} - \frac{49}{88s} \Rightarrow C_1 = \frac{88}{49}. \quad (3.178)$$

Impedansu:

$$Z_3(s) = \frac{3}{\frac{44}{\frac{22}{7} + s}} \quad (3.179)$$

invertujemo, pa oduzimamo vrijednost tako dobijene admitanse u nuli, što rezultuje otpornikom u odvodnoj grani:

$$Y_4(s) = Y_3(s) - Y_3(0) = \frac{\frac{22}{7} + s}{\frac{3}{44}} - \frac{968}{21} \Rightarrow R_2 = \frac{21}{968}. \quad (3.180)$$

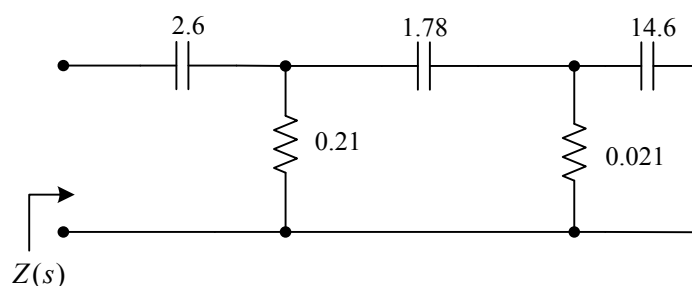
Konačno, preostalu impedansu realizujemo u vidu kondenzatora u rednoj grani:

$$Y_4(s) = \frac{44}{3}s \Rightarrow C_2 = \frac{44}{3}. \quad (3.181)$$

Zadata impedansa zapisana u formi verižnog razlomka je:

$$Z(s) = \frac{3}{8s} + \frac{1}{\frac{32}{7} + \frac{1}{\frac{49}{88s} + \frac{1}{\frac{968}{21} + \frac{1}{\frac{3}{44s}}}}}, \quad (3.182)$$

a njena električna šema je prikazana na Slici 3.33.



Slika 3.33. Električna šema zadate RC impedanse u vidu druge Kauerove forme.

□