Univerzitet u Banjaluci
Elektrotehnički fakultet
Katedra za opštu elektrotehniku
Analogni i digitalni filtri

Vježba 5.
Uvod u digitalnu obradu signala

Predstavljanje digitalnih signala u MATLAB-u

Budući da je digitalni signal sekvenca (niz) brojeva njihovo predstavljanje u MATLAB-u je očigledno – pomoću MATLAB-ovih nizova (vektora) čiji su elementi odmjerci signala sa kojim radimo. Najvažnija razlika u odnosu na kontinualne signale je da je ovo potpuna reprezentacija signala, tj. mimo ovih odmjeraka signal nije definisan.

Za vizuelno predstavljanje digitalnih (diskretnih) signala povoljnija je komanda `stem`, čija je sintaksa ista kao i sintaksa ranije pomenute komande `plot`.

Za izračunavanje konvolucije nizova koristi se funkcija `conv(y,z)` čiji su parametri dva niza (diskretna signala) i koja kao rezultat vraća niz koji predstavlja konvoluciju nizova y i z. Ukoliko su u nizovima y i z koeficijenti polinoma onda ova funkcija vraća koeficijente polinoma koji se dobija množenjem polaznih polinoma.

Analiza i simulacija digitalnih filtara

Jedan od načina zadavanja digitalnih filtara u MATLAB-u je pomoću njihove funkcije prenosa. Poznato je da funkcija prenosa linearnih vremenski nepromjenljivih sistema ima oblik racionalne funkcije. Dakle, moguće je memorisati dva polinoma, b i a, koji predstavljaju brojnik i nazivnik funkcije prenosa. Koeficijenti ovih polinoma su, u stvari, koeficijenti jednačine diferencija.

Za analizu digitalnih filtara koriste se sledeće funkcije:

Za određivanje frekvencijske karakteristike filtra koristi se funkcija `freqz` čija je sintaksa:

```
[h, w] = freqz(b, a, N, 'whole');
```

gdje su `b` i `a` brojnik i nazivnik funkcije prenosa filtra, respektivno, `N` je broj tačaka u kojima se izračunava frekvencijska karakteristika, a `'whole'` se koristi da se izračuna frekvencijski odziv na cijelom opsegu $[0, 2\pi]$. Ukoliko se izostavi `'whole'` frekvencijska karakteristika će se računati samo na gornjoj polovini jedinične kružnice. U vektoru `h` nalaze se vrijednosti frekvencijske karakteristike u frekvencijama koje se nalaze u vektoru `w`.

Pokušajte da iskoristite funkciju `freqz` bez izlaznih parametara, dakle samo `freqz(b,a)`. Kakav rezultat se dobija?

Ukoliko želite da odredite vrijednosti frekvencijskog odziva u zadatim tačkama možete koristiti oblik

```
h = freqz(b, a, w);
```

gdje su u vektoru `w` nalaze frekvencije u kojima se računa odziv, uobičajeno između 0 i π.

Postoji i varijanta funkcije `freqz` u kojoj se zadaje frekvencija odmjeravanja tako da se frekvencijska karakteristika dobija izražena u Hz.

Impulsni odziv filtra dobija se funkcijom `impz(b,a,N)`, gdje su `b` i `a` brojnik i nazivnik funkcije prenosa filtra, respektivno, a `N` je broj odmjeraka koji se ne mora zadati.

Simulacija digitalnog filtra može se izvršiti pomoću funkcije `filter`, čija je sintaksa:

```
y = filter(b, a, x);
```

Kao i do sada `b` i `a` su brojnik i nazivnik funkcije prenosa filtra, respektivno, a u vektorima `x` nalazi se ulazni signal. Vrijednosti odmjeraka izlaznog signala nalaze se u vektoru `y`.

Furijeova analiza diskretnih signala

Centralnu ulogu u linearnoj obradi signala igra Furijeova transformacija, tj. u slučaju diskretnih signala diskretna Furijeova transformacija (DFT). U MATLAB-u je DFT implementirana kao brza Furijeova transformacija (FFT) i za njeno izračunavanje se koriste sledeće funkcije:

`fft(x, N)` Brza Furijeova transformacija niza x u N tačaka.

`ifft(X, N)` Inverzna Furijeova transformacija niza X u N tačaka.

Diskretna Furijeova transformacija izračunata funkcijom `fft` predstavlja odmjerke Furijeove transformacije diskretnog signala u frekvencijama $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$, $k = 0,1,\ldots,N-1$, dakle, u opsegu 0 do 2π. Pošto zbog periodičnosti Furijeove transformacije diskretnih signala dio ovog opsega od π do 2π odgovara opsegu od -π do 0, da bi se dobio spektar signala na intervalu od $-\pi$ do π potrebno je samo preurediti vektor vrijednosti FFT. Ovo se postiže funkcijom `fftshift` kojom se mijenjaju mjesta polovinama vektora.

Zadaci

Analiza diskretnih linearnih vremenski nepromjenljivih sistema

1) Za digitalni filtar opisan jednačinom diferencija

$$y(n) - 1{,}8\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)y(n-1) + 0{,}81y(n-2) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1),$$

generisati i nacrtati impulsni odziv. Odrediti impulsni odziv i analitički i potvrditi rezultate.
2) Za filtar iz tačke 1) generisati i nacrtati realni i imaginarni dio odziva na signal $x(n) = e^{-jn\pi/4}u(n)$. Prikazati dovoljno dugo trajanje odziva tako da prelazni režim nestane. Odredite vrijednost kompleksne amplitude izlaznog signala za $n \to \infty$.
3) Analitičkim putem odrediti frekvencijsku karakteristiku $H\left(e^{j\omega}\right)$ mreže iz tačke 1). Kolika je vrijednost frekvencijskog odziva za $\omega = \pi/4$?
4) Nacrtati amplitudnu i faznu karakteristiku date mreže korištenjem funkcije `freqz`. Odrediti približno frekvenciju na kojoj amplitudna karakteristika ima maksimum.
5) Odrediti slabljenje filtra na frekvencijama 0, π/16, π/4, π/2, π?

Furijeova transformacija diskretnih signala i diskretna Furijeova transformacija

1. Generisati impuls konačnog trajanja

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n < L \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

   Odrediti analitički izraz za Furijeovu transformaciju ovog diskretnog signala.

2. Izračunati Furijeovu transformaciju signala iz tačke 1. koristeći FFT. Nacrtati amplitudni i spektar ovog signala. Na apscisi treba da se nalazi digitalna frekvencija u opsegu od -π do π. Ako je `N` broj tačaka u kojima se računa FFT onda se frekvencijska osa može podesiti sledećim isječkom koda:

```
w = (2*pi/N) * (0:N-1);
mid = ceil(N/2) + 1;
w(mid:N) = w(mid:N) – 2*pi;
w = fftshift(w);
```

   Kako biste dobili glatke grafike izaberite broj tačaka FFT 5 do 10 puta veći od trajanja impulsa. Pregledniji grafici se dobijaju normalizacijom apscise sa π.

3. Nacrtati fazni spektar signala. Da li fazna karakteristika izgleda očekivano s obzirom na analitički izraz? Ako vam se čini da fazna karakteristika izgleda loše imajte u vidu da se faza izračunava modulo 2π, pa se skokovi u fazi za vrijednost 2π javljaju kada se faza vraća u interval [-π, π]. Pored toga na frekvencijama u kojima karakteristika mijenja znak javljaju se dodatni fazni skokovi od π. Pomoću funkcije `unwrap` možete izbjeći skokove za 2π.

4. Korištenjem FFT moguće je izračunati Furijeovu transformaciju signala konačnog trajanja. Ukoliko imamo diskretan signal beskonačnog trajanja njegovu Furijeovu transformaciju u opštem slučaju može biti vrlo teško ili nemoguće izračunati. Ipak, za eksponencijalne signale, koji su od velikog praktičnog značaja izračunavanje Furijeove transformacije je jednostavno i ona je racionalna funkcija po $e^{j\omega}$. U MATLAB-u se vrijednosti ove funkcije lako izračunavaju korištenjem već opisane funkcije `freqz`.

5. Analitički odrediti Furijeovu transformaciju $X(e^{j\omega})$ diskretnog signala $x(n) = a^n u(n)$.

6. Korištenjem `freqz` i rezultata iz prethodne tačke izračunati i nacrtati spektre signala $x_1(n) = (0{,}9)^n u(n)$ i $x_2(n) = e^{j3n\pi/5} u(n)$.

7. Generisati jedan period signala $x(n) = \cos(0.25\pi n)$.

   a) Nacrtati dobijeni signal;

   b) Izračunati DFT ovog signala u onoliko tačaka koliki je period signala i nacrtati njen realni i imaginarni dio. Nacrtati magnitudu DFT ovog signala sa indeksom DFT i sa digitalnom frekvencijom na apscisi. Ukoliko ste ovo dobro izveli grafici će biti izuzetno jednostavni.

   c) Rekonstruišite signal na osnovu njegovog spektra, tj. odredite inverznu Furijeovu transformaciju. Uvjerite se da se ponovo dobija polazni signal. Pri ovome imajte u vidu da Furijeova transformacija i inverzna Furijeova transformacija kao rezultat daju kompleksne veličine.

d) Ponoviti tačku b) za tri perioda signala koristeći DFT u onoliko tačaka koliki je period signala. Uporediti rezultat sa tačkom b).

e) Ponoviti tačku b) za 3,1 perioda signala. Zašto se rezultat razlikuje od rezultata dobijenog u tački b)?

f) Kako treba izabrati broj tačaka N u kojima se računa DFT signala $x(n) = \cos(\omega_0 n)$ tako da ne dođe do curenja spektra?