

---

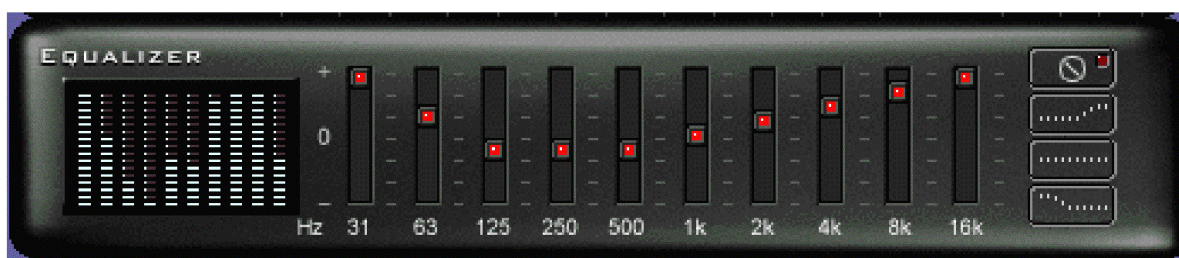
---

---

## FREKVENCIJSKE KARAKTERISTIKE AUDIO SIGNALA

Napomena: Formule ne treba pamtiti, potrebno je moći ih prepoznati kad su napisane.

Posmatrajmo primjer sa kojim se svakodnevno susrećemo. Frekvencijski sadržaj audio signala koji trenutno slušamo je grafički prikazan u lijevom uglu slike koja slijedi. Niske frekvencije odgovaraju dubokim tonovima, dok visoke frekvencije odgovaraju visokim tonovima. Podešavajući nivoe signala po različitim frekvencijskim opsezima (na desnom dijelu slike) pojačavamo ili slabimo odgovarajuće frekvencijske komponente, dakle radimo neku vrstu modifikacije (obrade) signala koju nazivamo filtriranjem.



Ideja razlaganja signala na prostoperiodične komponente eksponencijalnog (kosinusnog, sinusnog) oblika potiče s kraja 18. vijeka, kada je francuski matematičar, fizičar i istoričar Furije (Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768-1830), prilikom proučavanja oscilacija u fizici, tvrdio da se periodične kontinualne

funkcije mogu razložiti na prostoperiodične komponente. On je svoja istraživanja pokušao da publikuje 1807. godine, ali tadašnja matematička javnost ih nije prihvatila. Rezultate istraživanja je Furije objavio 1822. godine u svojoj knjizi o prostiranju toplote (*Théorie analytique de la chaleur*), ali je njegova teorija priznata tek nakon formalnih dokaza koje je proveo matematičar Dirihle (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859) 1829. godine. Nakon toga, Furijeova teorija je našla veoma široku primjenu u mnogim oblastima nauke: teoriji brojeva, kombinatorici, numeričkoj analizi, statistici, teoriji vjerovatnoće, kriptografiji, optici, akustici, okeanografiji, a posebno u analizi i obradi signala.

Pretpostavimo da možemo izvršiti dekompoziciju periodičnog kontinualnog signala  $\tilde{x}(t)$  na jednostavne kompleksne eksponencijalne signale  $C_k e^{jk\Omega_0 t}$ ,  $C_k \in \mathbb{C}$ :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_0 t}, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pri tome je  $T_0$  osnovni period signala, a varijabla  $\Omega$  ima prirodu učestanosti.

Ovakav zapis signala nazivamo *razvojem signala u Furijeov red (Fourier Series – FS)*. Signali  $C_k e^{jk\Omega_0 t}$  se nazivaju *harmonijske komponente signala* ili *harmonici*, a razvoj signala u Furijeov red *harmonijska analiza*. Osnovni ili prvi harmonici su komponente  $C_{\pm 1} e^{\pm j\Omega_0 t}$  Furijeovog reda, dok je  $C_0$  jednosmjerna komponenta i predstavlja srednju vrijednost signala. Koeficijenti Furijeovog reda su dati sa:

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Modul koeficijenata Furijeovog reda  $|C_k|$  nazivamo *amplitudni spektar signala*, a argument koeficijenata Furijeovog reda  $\theta_k = \arg C_k$  nazivamo *fazni spektar signala*.

Na sljedećoj slici prikazan je princip sinteze periodičnog signala sumiranjem prostoperiodičnih komponenti. Podešavanjem amplituda prostoperiodičnih signala i njihovim pomijeranjem u vremenu, dobijaju se različiti oblici sintetizovanog signala.

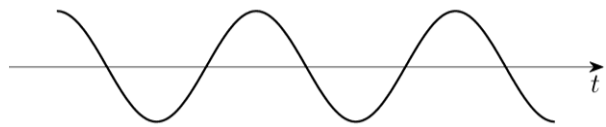


Komponente signala:

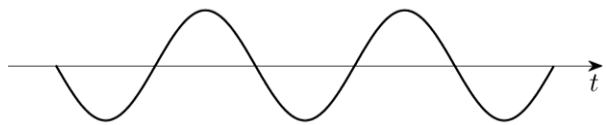
(a) jednosmjerna



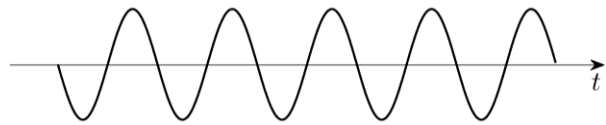
(b)  $\sin(\Omega_0 t)$



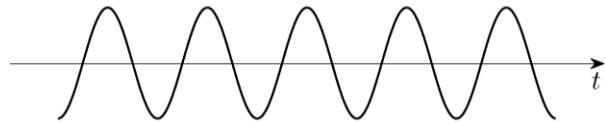
(c)  $\cos(\Omega_0 t)$



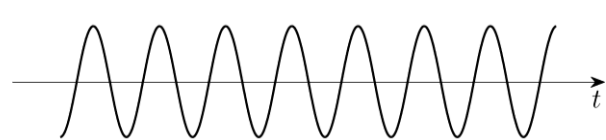
(d)  $\sin(2\Omega_0 t)$



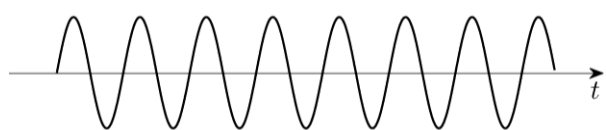
(e)  $\cos(2\Omega_0 t)$



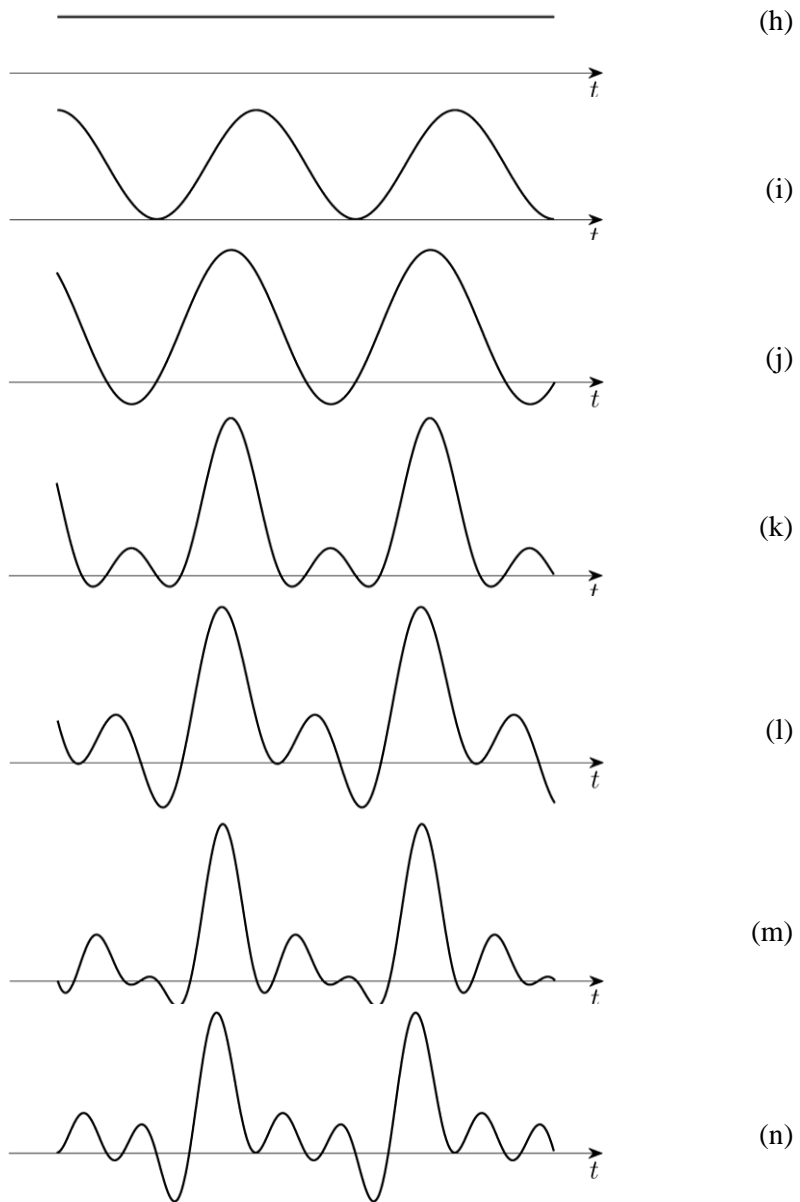
(f)  $\sin(3\Omega_0 t)$



(g)  $\cos(3\Omega_0 t)$



Slika: Prikaz signala preko linearne kombinacije prostoperiodičnih funkcija: (a) jednosmjerna komponenta i (b-g) prostoperiodične komponente (nastavak na sljedećoj stranici);



Slika: (nastavak): (h)  $a$ ; (i)  $a+b$ ; (j)  $a+b+c$ ; (k)  $a+b+c+d$ ;  
 (l)  $a+b+c+d+e$ ; (m)  $a+b+c+d+e+f$  i (n)  $a+b+c+d+e+f+g$ .

Za razliku od Furijeovog reda, kojim se vrši dekompoziciju periodičnog kontinualnog signala, za analizu *neperiodičnih kontinualnih signala* koristi se *Furijeova transformacija* definisana sa:

$$X(\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

Inverzna Furijeova transformacija je data sa:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

Furijeov red i Furijeova transformacija su pogodni za analizu kontinualnih signala. U multimedijalnim sistemima uglavnom radimo sa diskretnim signalima. U cilju frekvencijske analize *diskretnih signala*, definiše se *Furijeova transformacija diskretnog neperiodičnog signala* kao:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

Inverzna Furijeova transformacija diskretnih signala je data sa:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega.$$

Primijetimo da je Furijeova transformacija diskretnog neperiodičnog signala kontinualna funkcija učestanosti. Kako je digitalnim hardverom ili softverski nemoguće izračunati vrijednosti kontinualne funkcije za svaku vrijednost nezavisno promjenljive, neophodno je pronaći, sa praktičnog stanovišta gledano, efikasniju predstavu spektra diskretnih signala. Odabiranjem  $N$  učestanosti  $\omega = \omega_k = k \frac{2\pi}{N}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N$  u kojima se računaju vrijednosti Furijeove transformacije diskretnog aperiodičnog signala na osnovnom periodu, možemo steći približnu sliku spektra diskretnog signala. Tako dolazimo do definicije *Diskretne Furijeove transformacije (DFT)*:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

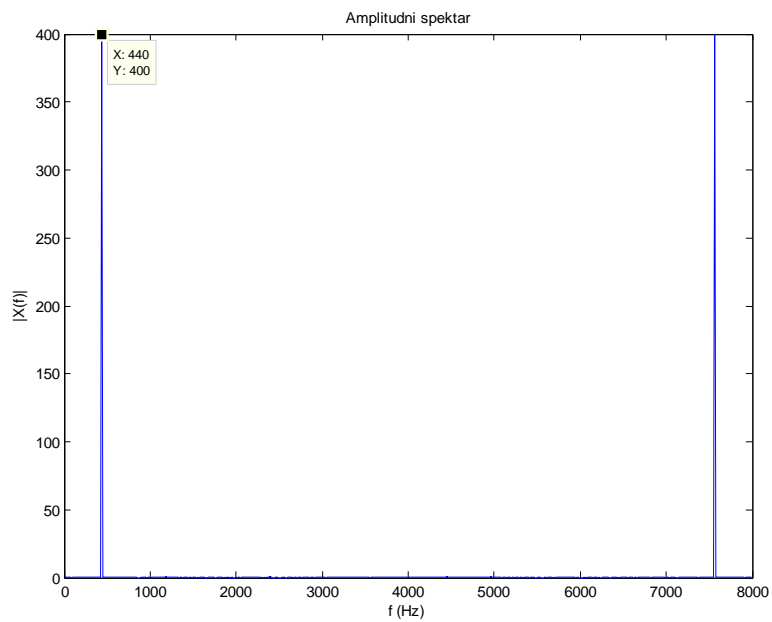
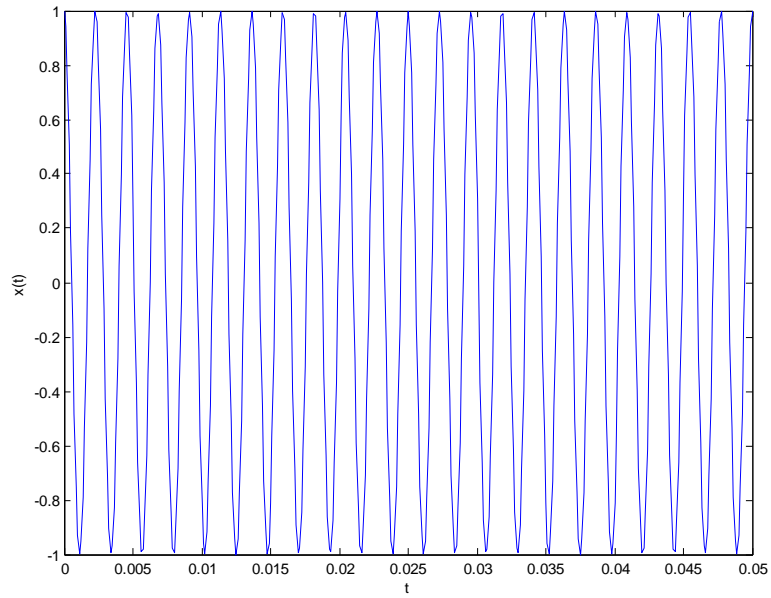
Inverzna DFT je jednaka:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

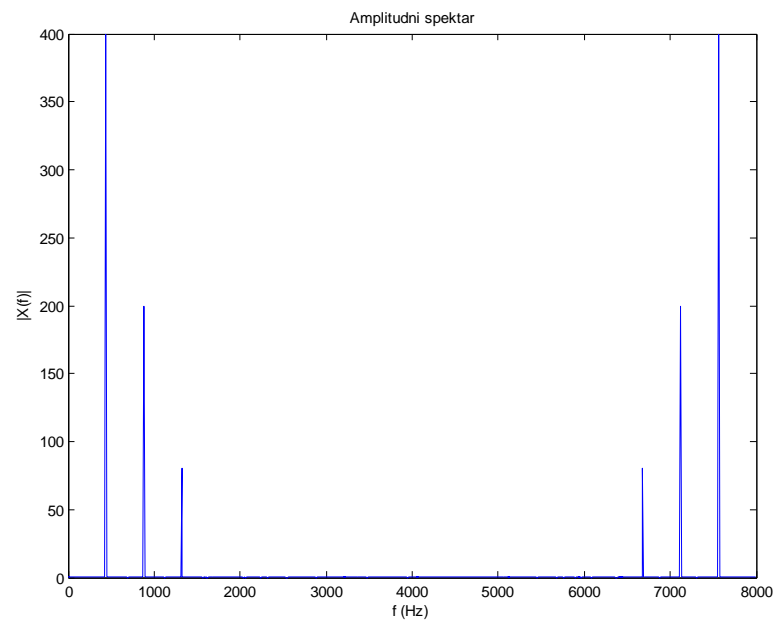
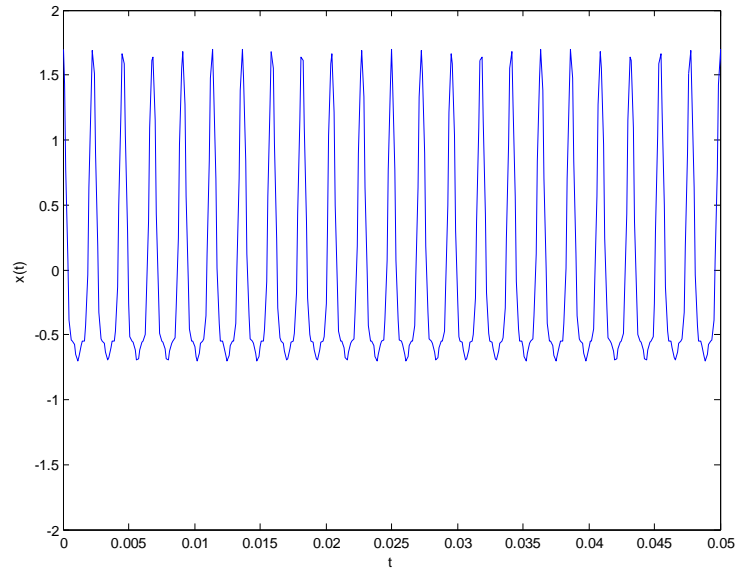
Primijetimo da je Furijeova transformacija diskretnog signala kontinualna funkcija periodična sa periodom  $2\pi$ , dok je DFT diskretna funkcija periodična sa  $N$ . Zbog toga je dovoljno posmatrati spektar signala na jednom periodu.

Na sljedećim slikama su dati primjeri spektara audio signala. U prvom primjeru (isječak sinusne funkcija) nacrtan je kontinualni amplitudni spektar signala (modul Furijeove transformacije diskretnog signala), pri čemu je apscisa normalizovana sa  $2\pi$ . Preostala dva primjera prikazuju diskretne amplitudne spektre, tj. module DFT, pri čemu je apscisa je normalizovana sa  $N$ . Drugi primjer prikazuje amplitudni spektar signala koji se sastoji od četiri sinusne funkcije konačnog trajanja i različitih učestanosti. Treći primjer je amplitudni spektar realnog signala.

Primjeri spektra signala:



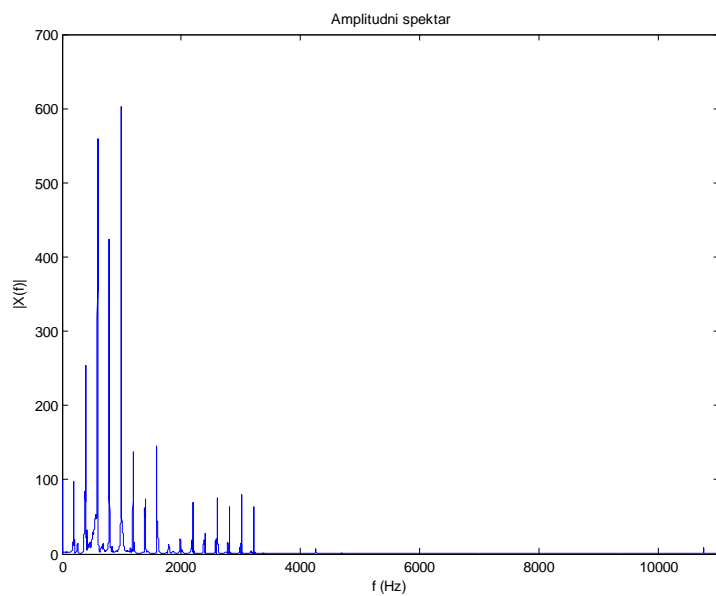
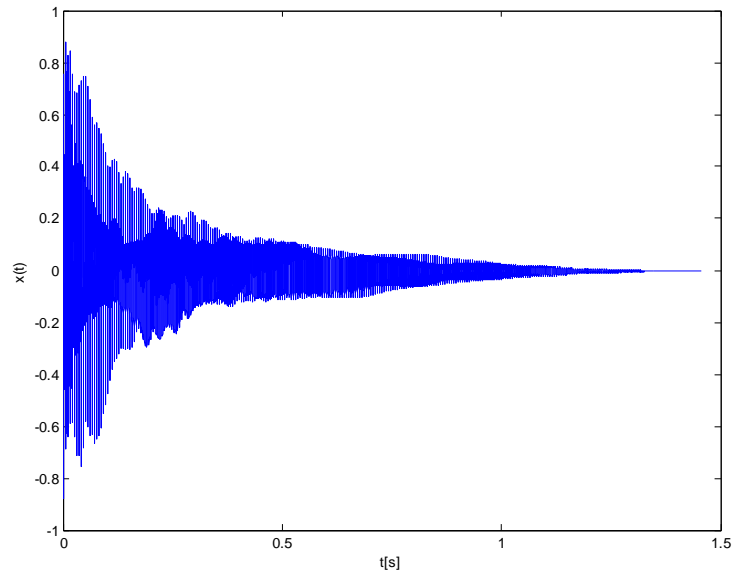
Slika: Sinusna funkcija  $F = 440$  Hz,  $FS = 8000$  Hz, trajanje 0,1 s  
Broj tačaka DFT jednak broju odmjeraka uzorka ( $N = 800$ )



- Slika: Zbir tri sinusne funkcije konačnog trajanja i različitih učestanosti, te spektar tog audio signala,  $F = 440$  Hz,  $F_s = 8000$  Hz

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \cos(2\pi Ft) \\
 &+ 0.5 \cos(2\pi 2Ft) \\
 &+ 0.2 \cos(2\pi 3Ft)
 \end{aligned}$$





Slika: Realni audio signal (isječak audio signala banjo.wav) i njegov spektar

- Linijska struktura spektra ukazuje na periodičnost analiziranog signala
- Razmak između linija odgovara fundamentalnoj frekvenciji tona
- Frekvencije u kojima je izračunat spektar su date sa

$$f_k = \frac{kF_s}{N}, k = 0 : N - 1$$