

# Spektralna analiza audio signala

24. oktobar 2016

Isak Njutn je u slavnom eksperimentu pokazao da je moguće bijelu svjetlost razložiti na komponente različitih boja, odnosno, talasnih dužina, kao i da je, pomoću ovih komponentata moguće ponovo sintetizovati bijelu svjetlost. Skup talasnih dužina, odnosno, frekvencija dobijenih komponentata naziva se *spektar* vidljive svjetlosti. Spektar vidljive svjetlosti je dio elektromagnetnog spektra koji obuhvata frekvencije svih poznatih fotona. Spektralna analiza signala poopštava ovu ideju na dekompoziciju proizvoljnog, analognog ili digitalnog, signala na elementarne signale različitih frekvencija. Ovi elementarni signali se nazivaju *frekvencijske komponente* signala. Spektar signala pokazuje na koji način se kombinovanjem frekvencijskih komponentata može dobiti originalni signal, odnosno, kakav je udio pojedinih frekvencijskih komponentata u signalu. Spektar signala se može odrediti analitički, korištenjem Furijeove analize i eksperimentalno, korištenjem analizatora spektra. Mogućnost analize spektralnog sadržaja signala je značajna i sa stanovišta obrade signala, posebno frekvencijski selektivnog filtriranja kakvo se sreće npr. u audio ekvilajzerima. Frekvencijski selektivno filtriranje mijenja signal tako što se određene frekvencijske komponente pojačavaju ili slabe.

## 1 Furijeova analiza kontinualnih signala

U osnovi spektralne analize signala leži ideja Žana Batista Furijeja da je periodične funkcije koje zadovoljavaju određene uslove moguće razložiti na linearnu kombinaciju prostoperiodičnih (sinusnih) funkcija. Ova reprezentacija periodične funkcije se naziva Furijeov red i ima oblik

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\Omega_0 t) + b_k \sin(k\Omega_0 t)), \quad (1)$$

gdje su  $a_k$  i  $b_k$  koeficijenti Furijeovog reda koji se dobijaju kao

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\Omega_0 t) dt, \quad (2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\Omega_0 t) dt. \quad (3)$$

U gornjim jednačinama  $T$  je period signala, a  $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  je osnovna frekvencija signala. Ovaj oblik Furijeovog reda naziva se trigonometrijski oblik. Članovi Furijeovog reda su oblika

$$a_k \cos(k\Omega_0 t) + b_k \sin(k\Omega_0 t) \quad (4)$$

i njihove frekvencije su umnošci osnovne frekvencije  $\Omega_0$ . Pošto su frekvencije članova Furijeovog reda u harmonijskom odnosu, oni se nazivaju *harmonici*. Frekvencija člana Furijeovog reda za  $k = 1$  jednaka je osnovnoj frekvenciji signala  $\Omega_0$  i on se naziva *osnovni harmonik*. Harmonici za  $k \geq 2$  se nazivaju *viši harmonici*. Član reda  $\frac{a_0}{2}$  se naziva *jednosmjerna komponenta* i jednak je srednjoj vrijednosti signala. Ovdje se nećemo baviti uslovima za konvergenciju Furijeovog reda, a zainteresovani čitalac može konsultovati široku literaturu iz ove oblasti.

Korištenjem konačnog broja članova Furijeovog reda dobija se frekvencijski ograničena aproksimacija originalnog periodičnog signala. Primjer aproksimacije pravougaonog signala Furijeovim redom je prikazan na Slici 1. Dodavanjem većeg broja članova Furijeovog reda aproksimacija je sve bolja i u graničnom slučaju dobija se polazni (u ovom slučaju pravougaoni) signal. Vidimo da je oblik dobijenog signala određen koeficijentima ( $a_k$  i  $b_k$ ) članova Furijeovog reda.

U spektralnoj analizi signala, često se koristi kompleksni oblik Furijeovog reda

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_0 t}, \quad (5)$$

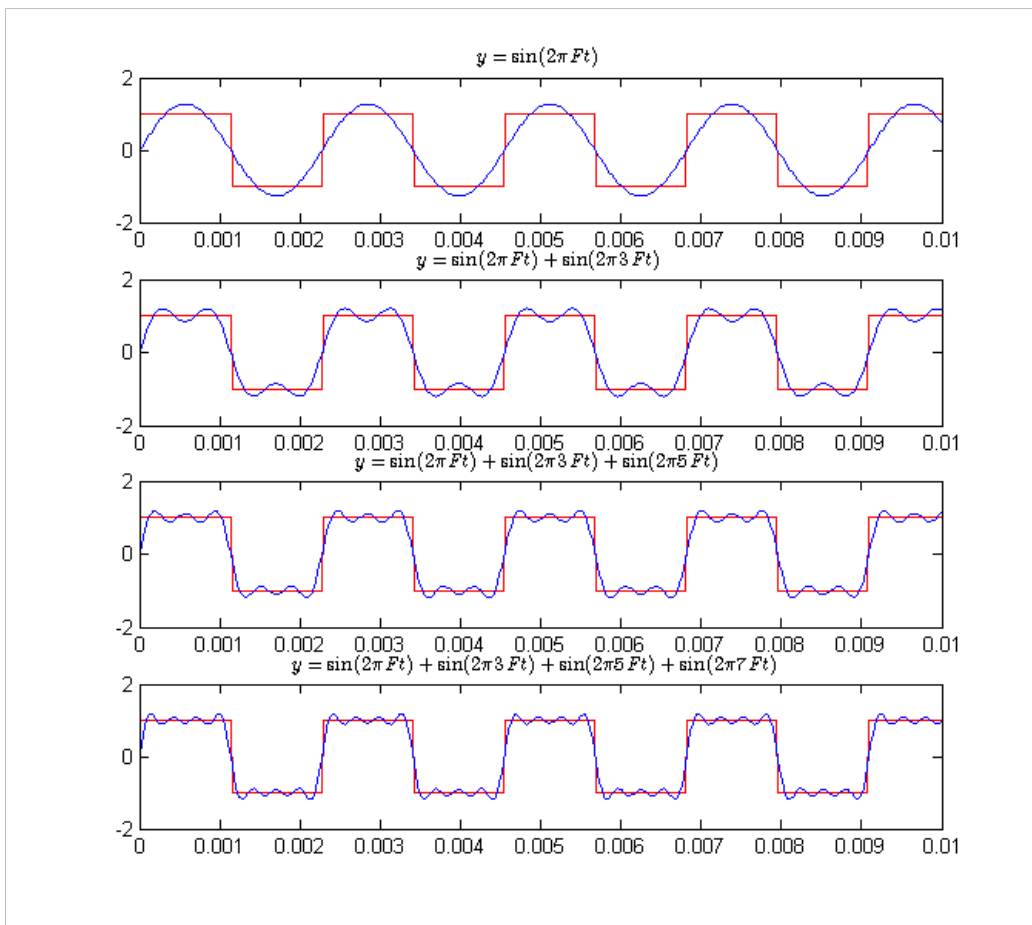
gdje su koeficijenti Furijeovog reda

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt. \quad (6)$$

U ovom slučaju, član reda  $C_0$  je jednosmjerna komponenta signala, a osnovni harmonici su članovi sa indeksima  $k = 1$  i  $k = -1$ , odnosno,  $C_{\pm 1} e^{\pm j\Omega_0 t}$ . Viši harmonici se dobijaju za  $|k| \geq 2$ .

U opštem slučaju koeficijenti  $C_k$  su kompleksni brojevi

$$C_k = |C_k| e^{j\theta_k}. \quad (7)$$



Slika 1: Aproksimacija pravougaonog signala pomoću Furijeovog reda.

Moduli koeficijenata,  $|C_k|$  čine *amplitudni spektar*, a njihovi argumenti  $\theta_k$ , *fazni spektar* signala. Zajedno, amplitudni i fazni spektar se nazivaju *spektar* signala. Spektar signala je u potpunosti određen skupom koeficijenata Furijeovog reda,  $C_k$ .

Za realne periodične signale kompleksni oblik Furijeovog reda je potpuno ekvivalentan trigonometrijskom obliku i vrijedi

$$\begin{aligned} a_0 &= 2C_0, \\ a_k &= 2|C_k| \cos \theta_k, \\ b_k &= 2|C_k| \sin \theta_k. \end{aligned} \quad (8)$$

Elementarni prostoperiodični signal  $\cos \Omega_0 t$  se može predstaviti Furijeovim redom u kompleksnom obliku na sljedeći način

$$\cos \Omega_0 t = \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 t}. \quad (9)$$

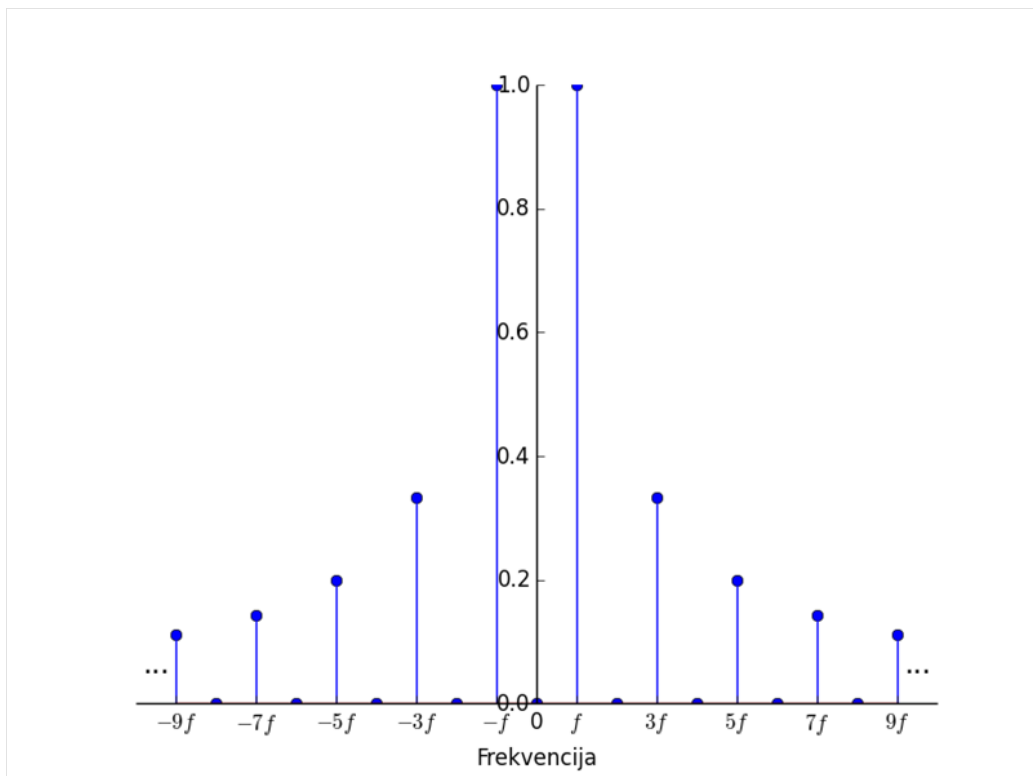
Dakle, spektar kosinusnog signala čine samo dva koeficijenta Furijeovog reda koji su različiti od nule. To su  $C_1 = \frac{1}{2}$  i  $C_{-1} = \frac{1}{2}$ . Ovi koeficijenti odgovaraju frekvencijama  $\Omega_0$  i  $-\Omega_0$ . Iako signali iz stvarnog svijeta ne mogu imati negativne frekvencije, one se koriste u spektralnoj analizi zato što pojednostavljaju korištene matematičke modele. Iz datog primjera vidimo da je za reprezentaciju elementarnog prostoperiodičnog signala potreban par frekvencija od kojih je jedna pozitivna, a druga negativna.

U audio aplikacijama najčešće se koristi amplitudni spektar signala. Primjer amplitudnog spektra pravougaonog signala prikazan je na Slici 2. U ovom slučaju spektar se sastoji od beskonačno mnogo koeficijenata, kao što je i za tačnu reprezentaciju pravougaonog signala potrebno beskonačno mnogo članova Furijeovog reda. Može se primjetiti da za pravougaoni signal postoje samo neparni harmonici – harmonici čije su frekvencije neparni umnošci osnovne frekvencije.

Kada je signal koji analiziramo periodičan, spektar se sastoji iz skupa Furijeovih koeficijenata na diskretnim frekvencijama. U tom slučaju spektar je diskretan ili linijski. Za frekvencijsku analizu neperiodičnih (aperiodičnih) kontinualnih signala koristi se Furijeova transformacija

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt. \quad (10)$$

Furijeova transformacija je kompleksna veličina i njen moduo,  $|X(\Omega)|$ , je amplitudni spektar, a njen argument,  $\theta(\Omega) = \arg X(\Omega)$ , je fazni spektar signala. Furijeova transformacija aperiodičnog kontinualnog signala je, u opštem slučaju, kontinualna funkcija frekvencije. Iako je definisana za



Slika 2: Amplitudni spektar pravougaonog signala. Prikazane su relativne veličine harmonika.

aperiodične signale, moguće je proširiti Furijeovu transformaciju tako da se može primjeniti i na periodične signale. Rezultati koji se dobijaju u tom slučaju su ekvivalentni rezultatima dobijenim korištenjem Furijeovog reda. Ovo proširenje izlazi iz okvira ovog kursa i neće biti razmatrano.

Furijeova transformacija je invertibilna i izrazom

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega, \quad (11)$$

data je inverzna Furijeova transformacija. Invertibilnost Furijeove transformacije povlači ekvivalenciju vremenske i frekvencijske reprezentacije signala. Posljedica ove ekvivalencije je da je moguće obrađivati signal bilo u vremenskom, bilo u frekvencijskom domenu pri čemu će dobijeni rezultati biti isti.

## 2 Furijeova analiza diskretnih signala

Signali sa kojima radimo u multimedijalnim sistemima su digitalni, tako da je potrebno alate Furijeove analize prilagoditi diskretnom domenu. U ovom dijelu ćemo zanemariti kvantovanje signala, tako da ćemo, u suštini, raditi sa diskretnim signalima. Furijeova transformacija diskretnog nepериодичnog signala je

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}. \quad (12)$$

Može se uočiti sličnost ove jednačine sa definicijom Furijeove transformacije kontinualnog signala (10). Pošto se radi o diskretnom signalu integral je zamijenjen sumom (redom), a umjesto kontinualne frekvencije  $\Omega$  koristi se digitalna frekvencija

$$\omega = \frac{\Omega}{F_S} = 2\pi \frac{F}{F_S}, \quad (13)$$

gdje je  $F_S$  frekvencija odmjeraavanja. Važno je uočiti da je Furijeova transformacija diskretnog signala kontinualna funkcija digitalne frekvencije  $\omega$ . Pored toga, ona je periodična funkcija sa periodom  $2\pi$ . Ova periodičnost je posljedica činjenice da je nemoguće razlikovati diskretne sinusoide čije se frekvencije razlikuju za cjelobrojni umnožak  $2\pi$ .

Furijeova transformacija diskretnog signala je takođe kompleksna veličina i njen moduo,  $|X(\omega)|$ , predstavlja amplitudni spektar, a njen argument,  $\theta(\omega) = \arg X(\omega)$ , fazni spektar diskretnog signala.

Iako Furijeova transformacija diskretnog signala omogućava spektralnu analizu diskretnih signala, ona zahtijeva poznavanje odmjeraaka signala na čitavoj vremenskoj osi. Međutim, u praktičnim primjenama to je nemoguće

i poznate su samo vrijednosti odmjeraka u baferu konačne dužine. U tom slučaju se, umjesto Furijeove transformacije diskretnog signala, koristi diskretna Furijeova transformacija (DFT). DFT se dobija diskretizacijom Furijeove transformacije diskretnog signala u  $N$  frekvencija ravnomjerno raspoređenih na intervalu dužine  $2\pi$

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (14)$$

Diskretna Furijeova transformacija signala  $x(n)$  u  $N$  tačaka je

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (15)$$

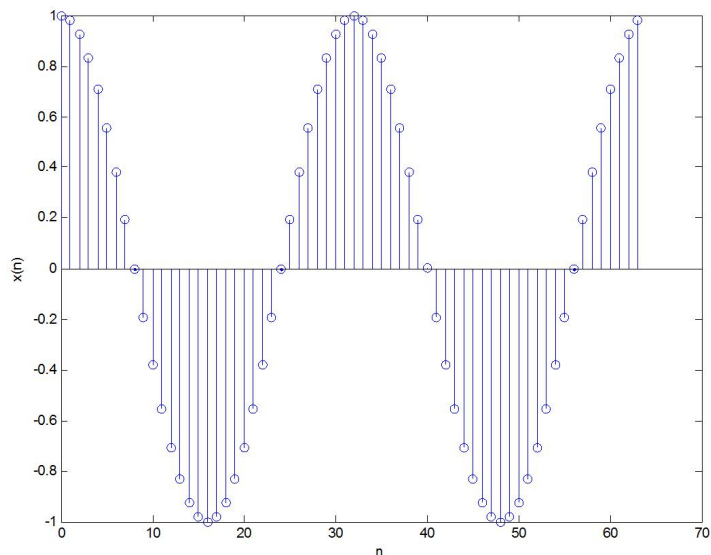
a inverzna DFT je

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (16)$$

Vidimo da DFT u  $N$  tačaka koristi samo  $N$  odmjeraka signala. Pošto su vrijednosti DFT u stvari odmjeraci Furijeove transformacije diskretnog signala,  $X(k) = X(\omega_k)$ , potrebno je obratiti pažnju na uslov pod kojim se na osnovu tih odmjeraka može rekonstruisati tačna Furijeova transformacija diskretnog signala. Može se dokazati da se ovaj uslov svodi na to da se na ovaj način može izračunati Furijeova transformacija signala konačnog trajanja pri čemu broj tačaka u kojima se računa DFT mora biti veći ili jednak od trajanja signala.

Kada smo razmatrali Furijeov red uočili smo da diskretan spektar odgovara periodičnom signalu. Analogno, diskretizacijom spektra u  $N$  tačaka, prilikom izračunavanja DFT, originalni diskretni signal implicitno postaje periodičan sa periodom  $N$ . Kada se posmatra signal konačnog trajanja koje je manje od  $N$  ovo nije problem jer se dobija periodično proširenje signala koji na osnovnom periodu izgleda isto kao originalni signal. U ovom slučaju se na osnovu odmjeraka DFT može rekonstruisati spektar originalnog diskretnog signala. Međutim, ako je trajanje signala veće od  $N$ , njegovim periodičnim proširivanjem sa periodom  $N$  dobija se signal koji se na osnovnom periodu razlikuje od originalnog signala i na osnovu odmjeraka DFT se ne može rekonstruisati spektar originalnog diskretnog signala.

Za efikasno izračunavanje DFT koristimo algoritam koji se zove *brza Furijeova transformacija* (Fast Fourier Transform, FFT). Postoje efikasne implementacije FFT algoritma, koje se mogu koristiti kao biblioteke u različitim programskim jezicima. U MATLAB-u FFT je implementirana funkcijom `fft` čiji je poziv oblika



Slika 3: Diskretna sinusoida frekvencije  $\omega_0 = \frac{\pi}{16}$ .

`X = fft (x, N)`

Dakle, pri izračunavanju DFT potrebno je zadati u koliko se tačaka računa transformacija. Ova broj odgovara broju frekvencija na intervalu dužine  $2\pi$  u kojima se odmjerava Furijeova transformacija diskretnog signala.

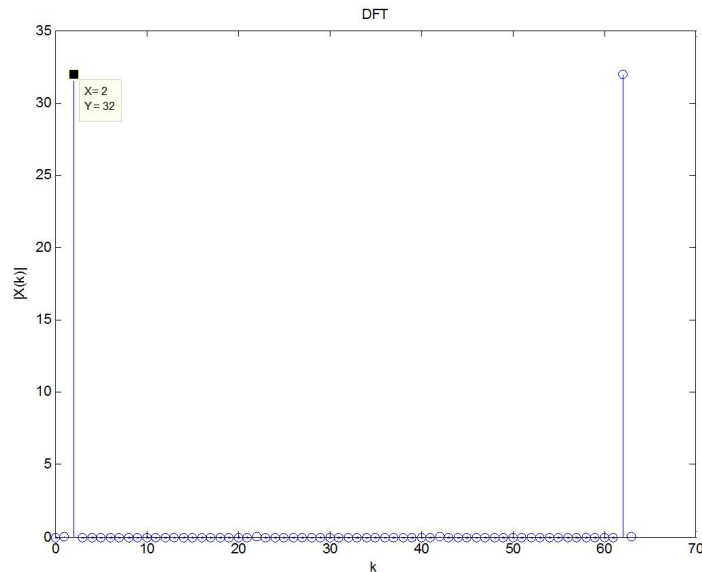
Zanimljiva posljedica ove analize je da se pomoću DFT može izračunati spektar diskretne sinusoida čiji je period jednak broju tačaka DFT. Neka je data diskretna sinusoida

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{16}n\right).$$

Digitalna frekvencija ove sinusoida je  $\omega_0 = \frac{\pi}{16}$ , a njen period je  $\frac{2\pi}{\omega_0} = 32$  odmjerka. Na Slici 3 prikazan je uzorak ove sinusoida dužine  $L = 64$  odmjerka.

Iz (15) se vidi da su vrijednosti DFT kompleksni brojevi. Na Slici 4 prikazani su moduli vrijednosti DFT ove sinusoida. Vidimo da su vrijednosti DFT različite od nule samo za  $k = 2$  i  $k = N - 2 = 64 - 2 = 62$ . Vrijednost DFT za  $k = 2$  odgovara digitalnoj frekvenciji sinusoida  $\omega_0 = \frac{\pi}{16}$ , a  $k = 62$  odgovara digitalnoj frekvenciji  $2\pi - \frac{\pi}{16} = \frac{31\pi}{16}$ . Zbog periodičnosti spektra diskretnog signala ova komponenta jednaka je komponenti na frekvenciji  $-\frac{\pi}{16}$ . Dakle, u ovom slučaju, spektar je različit od nule na frekvencijama  $\omega_0$  i  $-\omega_0$ , što znači da je sva energija signala sadržana u frekvencijskim komponentama na tim



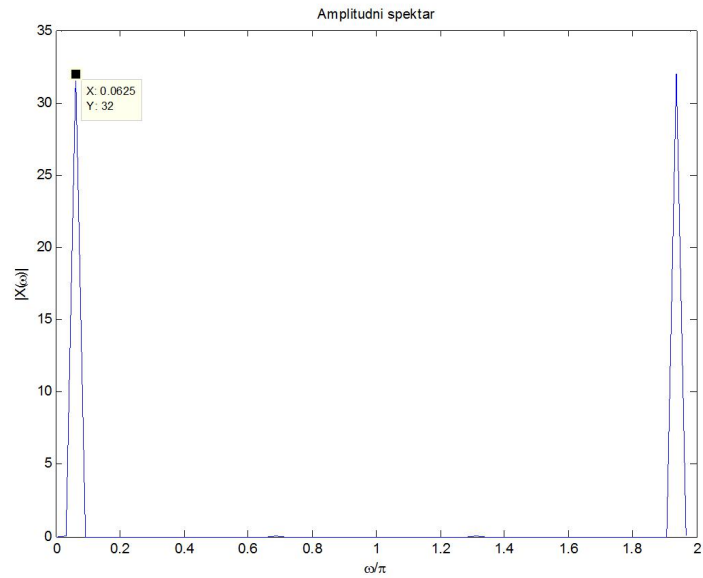


Slika 4: DFT sinusoide frekvencije  $\omega_0 = \frac{\pi}{16}$ .

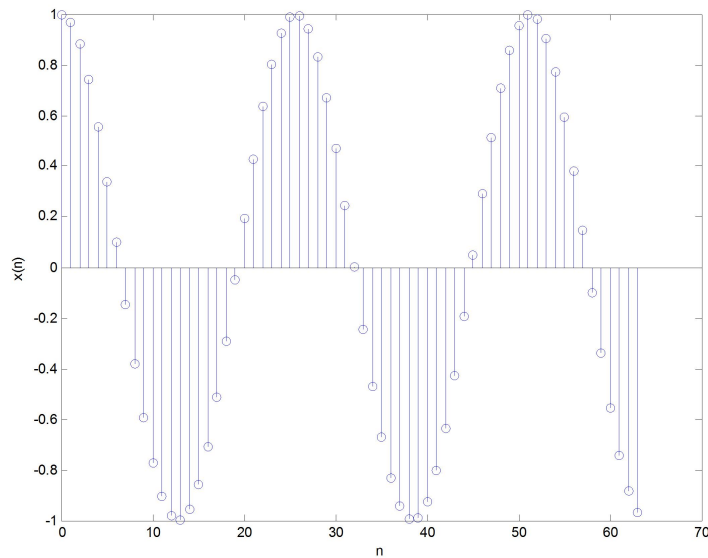
frekvencijama. Ovo je analogno spektru kontinualne sinusoide koji je različit od nule na frekvencijama  $\Omega_0$  i  $-\Omega_0$ . Imajući u vidu da je spektar diskretnog signala kontinualna funkcija, amplitudni spektar sinusoide frekvencije  $\omega_0 = \frac{\pi}{16}$  možemo približno prikazati kao na Slici 5. U ovom slučaju je trajanje uzorka sinusoide jednako broju tačaka u kojima se računa DFT, odnosno, frekvencija sinusoide može da se prikaže u obliku  $\frac{2\pi}{N}k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Posmatrajmo sada sinusoidu  $x(n) = \cos\pi\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{64}\right)n$ . Uzorak dužine  $L = 64$  odmjerka je prikazan na Slici 6. Amplitudni spektar ove sinusoide izračunat pomoću DFT u  $N = 64$  tačke prikazan je na Slici 7. U ovom slučaju vidimo da amplitudni spektar ima vršne vrijednosti za dvije vrijednosti digitalne frekvencije, ali za ostale frekvencije nije jednak nuli. Takođe, uočene vršne vrijednosti ne odgovaraju tačnoj frekvenciji sinusoide. Ova pojava naziva se *curenje spektra* i posljedica je činjenice da uzorak sinusoide na kojem je izračunata DFT nije umnožak perioda sinusoide, odnosno frekvencija sinusoide ne može da se prikaže u obliku  $\frac{2\pi}{N}k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ .

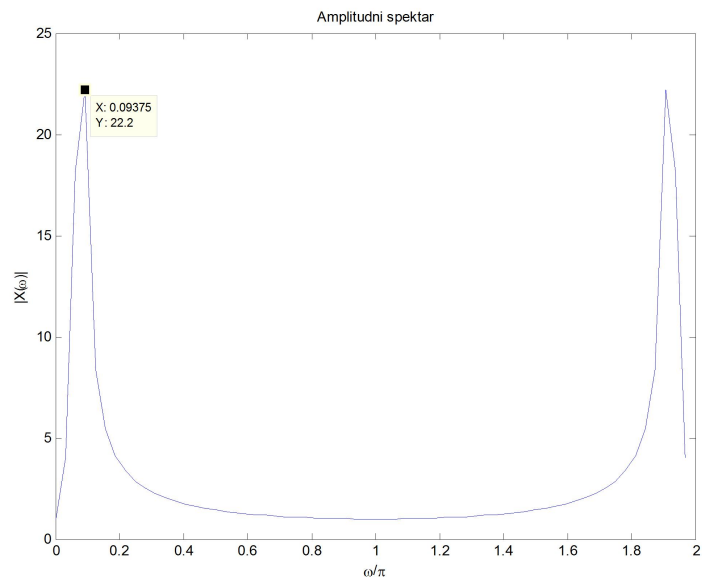
Da bismo dobili bolji uvid u problem curenja spektra pogledajmo Sliku 8 na kojoj je prikazano periodično proširenje uzorka sinusoide sa Slike 6. Ovo periodično proširenje sadrži skokovitu promjenu signala u trenutku  $n = 64$ . Skokovita promjena signala sadrži visokofrekventne komponente tako da energija signala nije više koncentrisana na frekvenciji sinusoide.



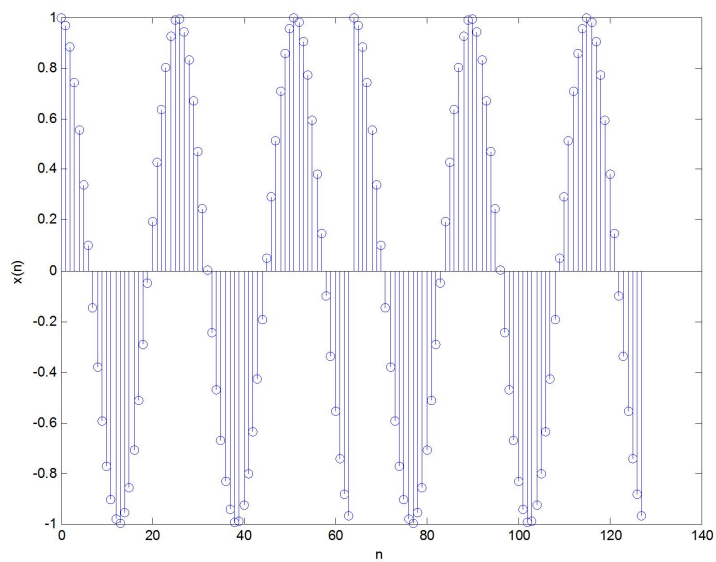
Slika 5: Amplitudni spektar diskretne sinusoide frekvencije  $\omega_0 = \frac{\pi}{16}$  određen pomoću DFT.



Slika 6: Diskretna sinusoida frekvencije  $\omega_0 = \pi \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \right)$ .



Slika 7: Amplitudni spektar diskretne sinusoide frekvencije  $\omega_0 = \pi \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \right)$  određen pomoću DFT.



Slika 8: Periodično proširenje diskretne sinusoide frekvencije  $\omega_0 = \pi \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \right)$ .

Curenje spektra je posljedica računanja spektra signala konačnog trajanja i ne može se izbjeći. Odsustvo curenja spektra pri računanju spektra sinusoide frekvencije  $\omega_0 = \frac{\pi}{16}$  u 64 tačke je poseban slučaj na koji se ne može računati u praktičnim primjenama spektralne analize. Razlog za ovo je što je, u opštem slučaju, frekvencija signala upravo ono što se određuje spektralnom analizom, pa nije moguće izabrati broj tačaka DFT tako da frekvencija signala bude oblika  $\frac{2\pi}{N}k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Kako bi se dobila bolja aproksimacija spektra signala često se DFT računa u većem broju tačaka od trajanja signala. U ovom slučaju je uobičajeno da se smatra da se računa DFT signala dopunjenog nulama, odnosno, signala koji se dobija konkatencijom originalnog signala i određenog broja nula. Većina biblioteka za računanje FFT implicitno dopunjava signal nulama kada se koristi veći broj tačaka od trajanja signala. Primjer amplitudnog spektra diskretne sinusoide frekvencije  $\omega_0 = \pi \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \right)$  prikazan je na Slici 9. U ovom slučaju trajanje uzorka signala je  $L = 64$  odmjerk, a DFT se računa u  $N = 512$  tačaka. Vidimo da je vršna vrijednost amplitudnog spektra bliža tačnoj frekvenciji sinusoide, što ukazuje na bolju aproksimaciju tačnog spektra signala. Nažalost, dopunjavanje nulama ne utiče na curenje spektra. Za njegovo ublažavanje se koriste tehnike koje izlaze iz okvira ovog izlaganja. Zainteresovani čitalac može da pronađe više informacija o ovoj temi u literaturi iz Digitalne obrade signala.

### 3 Primjena DFT u spektralnoj analizi signala

DFT se može koristiti za spektralnu analizu kontinualnih signala uz uzimanje u obzir uticaja diskretizacije signala i curenja spektra. Pogledajmo primjer kontinualne sinusoide frekvencije 440 Hz

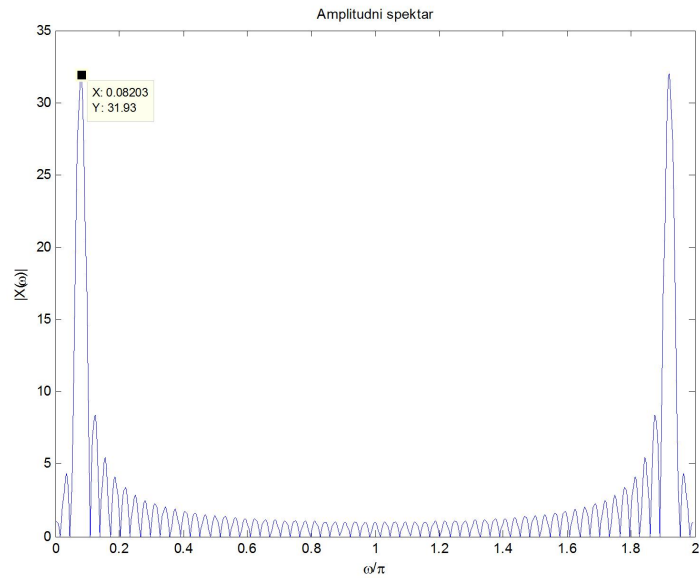
$$x(t) = \cos(2\pi 440t).$$

Na Slici 10 je prikazan uzorak ove sinusoide trajanja 0,1 s. Odmjeravanjem ove sinusoide sa frekvencijom odmjerkavanja  $F_S = 8000$  Hz, dobijamo diskretnu sinusoidu frekvencije

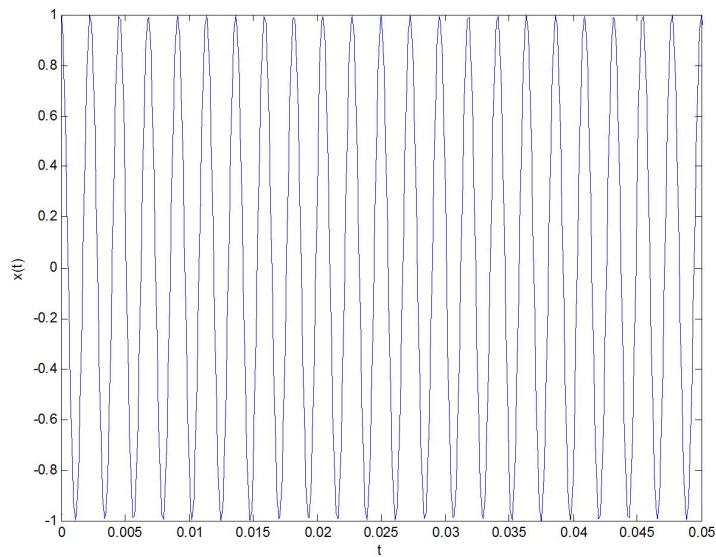
$$\omega = 2\pi \frac{F}{F_S} = 2\pi \frac{440}{8000} = \frac{11}{100}\pi.$$

Uzorak trajanja 0,1 s sadrži 800 odmjerkova sinusoide. Računanjem DFT u 800 tačaka dobijamo amplitudni spektar prikazan na Slici 11 pri čemu je korištena frekvencijska osa u Hercima. Odmjerci DFT su na frekvencijama

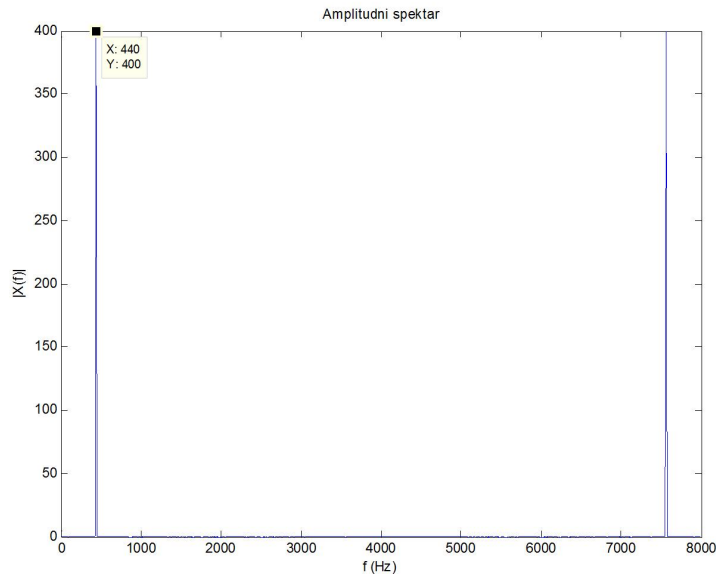
$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, \dots, N - 1. \quad (17)$$



Slika 9: Amplitudni spektar diskretne sinusoide frekvencije  $\omega_0 = \pi \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \right)$  izračunat korištenjem DFT u  $N=512$  tačaka.



Slika 10: Kontinualna sinusoida frekvencije 440 Hz.



Slika 11: Spektar sinusoide frekvencije 440 Hz dobijen pomoću DFT.

Sa druge strane, digitalna frekvencija signala se, za datu frekvenciju odmjerenja, u odsustvu preklapanja spektra, može izračunati kao

$$\omega = 2\pi \frac{F}{F_S}. \quad (18)$$

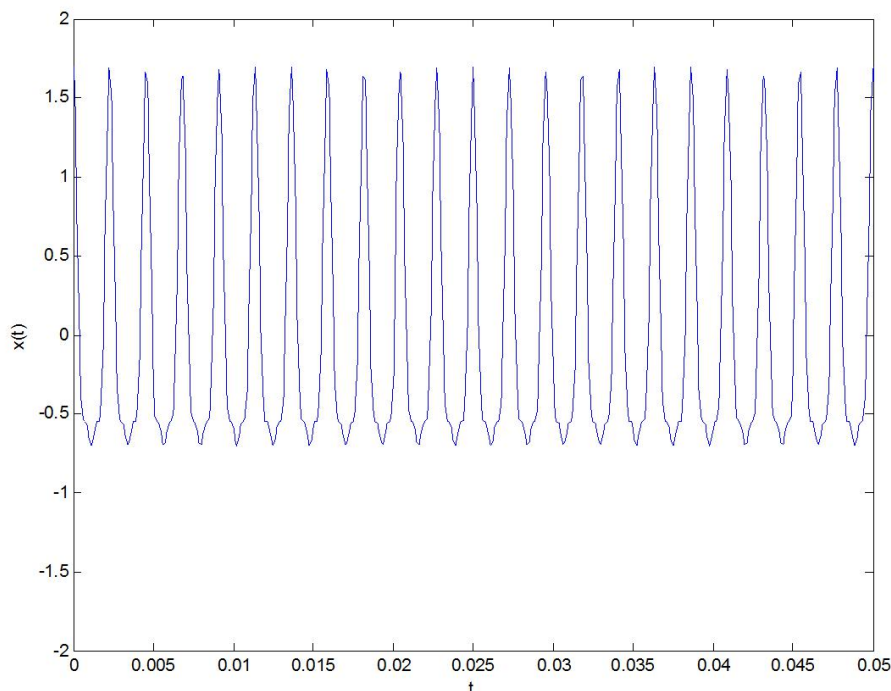
Slijedi da se odmjerci DFT nalaze na frekvencijama

$$F_k = \frac{kF_S}{N}. \quad (19)$$

Vidimo da u ovom slučaju vršne vrijednosti amplitudnog spektra odgovaraju frekvencijama 440 Hz i  $8000 - 440 = 7560$  Hz. Vršna vrijednost na 7560 Hz je posljedica diskretizacije signala i periodičnosti spektra diskretnog signala i odgovara frekvenciji od  $-440$  Hz. Pošto su negativne frekvencije korisne u matematičkoj analizi spektra ali nemaju fizičko tumačenje, često se amplitudni i fazni spektri diskretizovanih signala prikazuju samo do Nyquistove frekvencije, koja u ovom slučaju iznosi 4000 Hz. Pošto se u datom slučaju DFT računa u 800 tačaka, odmjerci frekvencijske karakteristike su u tačkama  $\omega_k = \frac{2\pi}{800}k = \frac{\pi}{400}k$ . Frekvencija diskretizovane sinusoide se dobija za  $k = 44$  pa nema curenja spektra.

Posmatrajmo sada složenoperiodičan signal koji se sastoji od tri harmonika

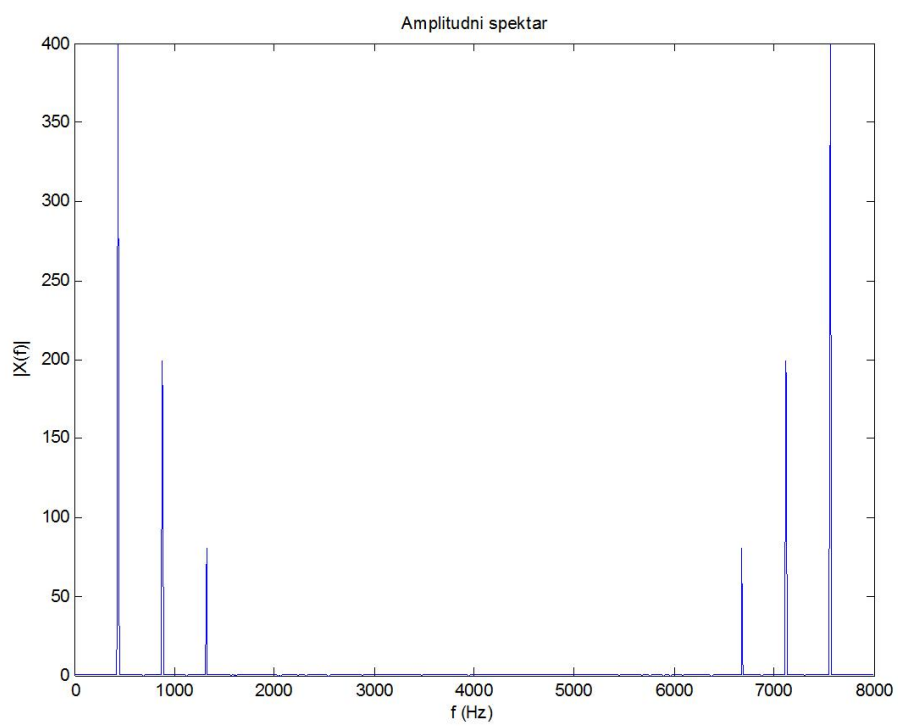
$$x(t) = \cos(2\pi Ft) + 0,5 \cos(2\pi 2Ft) + 0,2 \cos(2\pi 3Ft).$$



Slika 12: Složenoperiodični signal  $x(t) = \cos(2\pi Ft) + 0,5 \cos(2\pi 2Ft) + 0,2 \cos(2\pi 3Ft)$ .

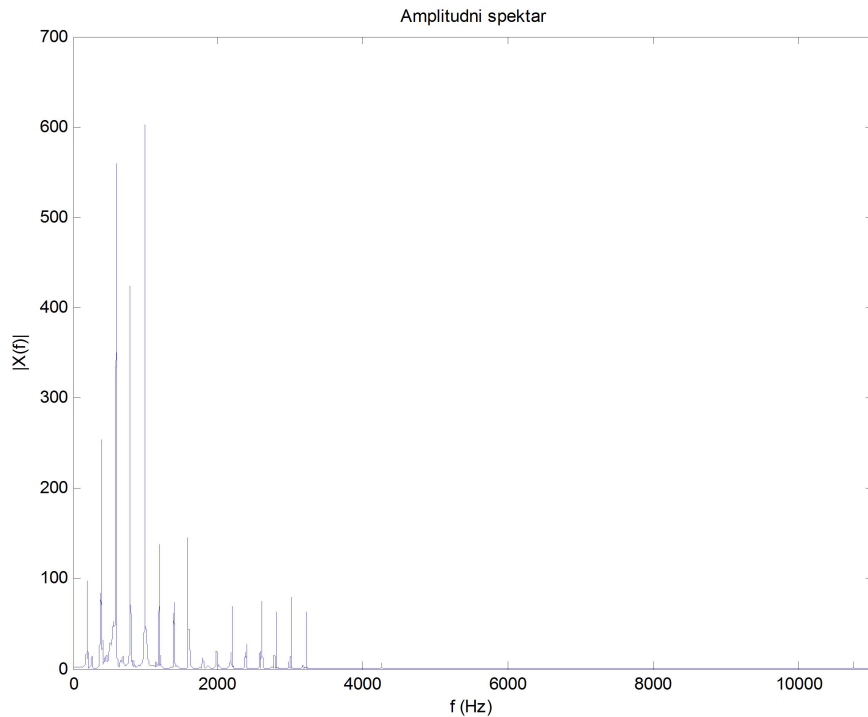
Neka je osnovna frekvencija  $F = 440$  Hz, a frekvencija odmjerenja  $F_S = 8000$  Hz. Uzorak signala trajanja 0,05 s je prikazan na Slici 12. Spektar ovog signala izračunat na osnovu uzorka trajanja 0,1 s pomoću DFT u 800 tačaka prikazan je na Slici 13. Lako je moguće uočiti tri impulsa na frekvencijama koje odgovaraju frekvencijama harmonika, kao i tri impulsa na frekvencijama koje odgovaraju negativnim frekvencijama harmonika. Relativne visine ovih impulsa su jednake relativnim amplitudama harmonika.

Konačno, na Slici 14 prikazan je amplitudni spektar tona odsviranog na muzičkom instrumentu – bendžu. Frekvencija odmjerenja u ovom slučaju je 22050 Hz. Jednostavnosti radi, prikazana je frekvencijska osa samo do Nikvistove frekvencije, 11025 Hz. Izraženi impulsi na približno jednakim razmacima na frekvencijskoj osi ukazuju na približno diskretnu prirodu ovog spektra, odnosno, na približnu periodičnost signala. To je zaista tačno, jer je ton na bendžu proizveden vibriranjem žice. Razmak između impulsa jednak je fundamentalnoj frekvenciji ovog tona. Prisustvo viših harmonika i njihovi relativni odnosi određuju njegovu boju. Sa slike je uočljivo da ampli-



Slika 13: Amplitudni spektar složenoperiodičnog signala izračunat pomoću DFT.





Slika 14: Amplitudni spektar tona odsviranog na bendžu, izračunat pomoću DFT.

tudni spektar nije jednak jedinici na ostalim frekvencijama, već je primjetno i curenje spektra. Međutim, zahvaljujući velikom broju tačaka u kojima je izračunata DFT (jednak trajanju signala u odmjerima), impulsi su vrlo uski, a zahvaljujući dobrom odnosu signal-šum, lako ih je detektovati, tako da curenje spektra u ovom slučaju ne predstavlja značajan problem.

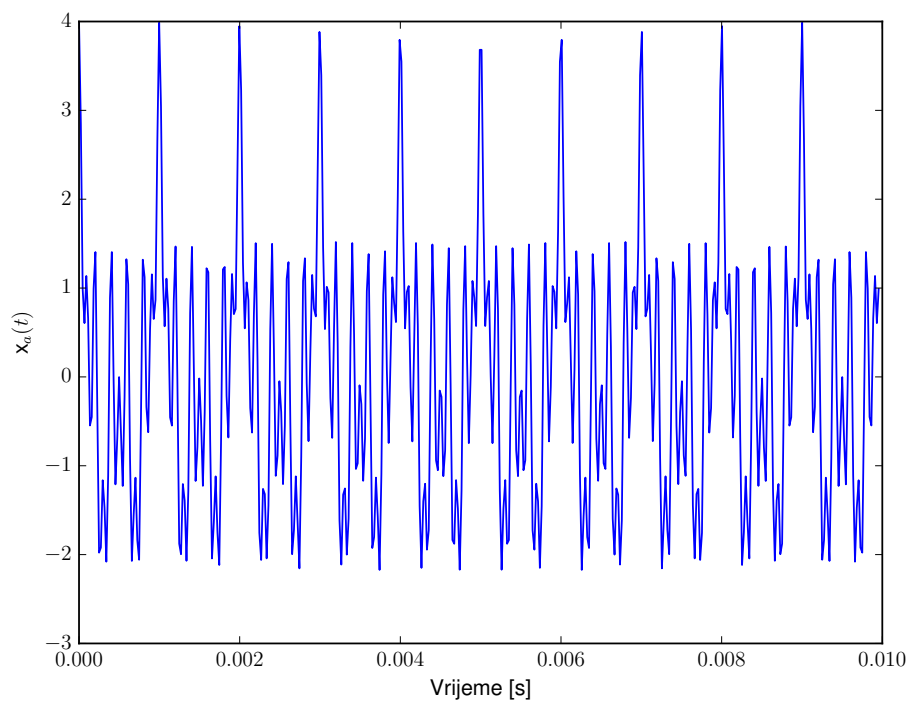
## 4 Spektralna analiza nestacionarnih signala

Posmatrajmo primjere signala na Slikama 15 i 16. Prvi signal je složenoperiodični i sadrži četiri harmonika

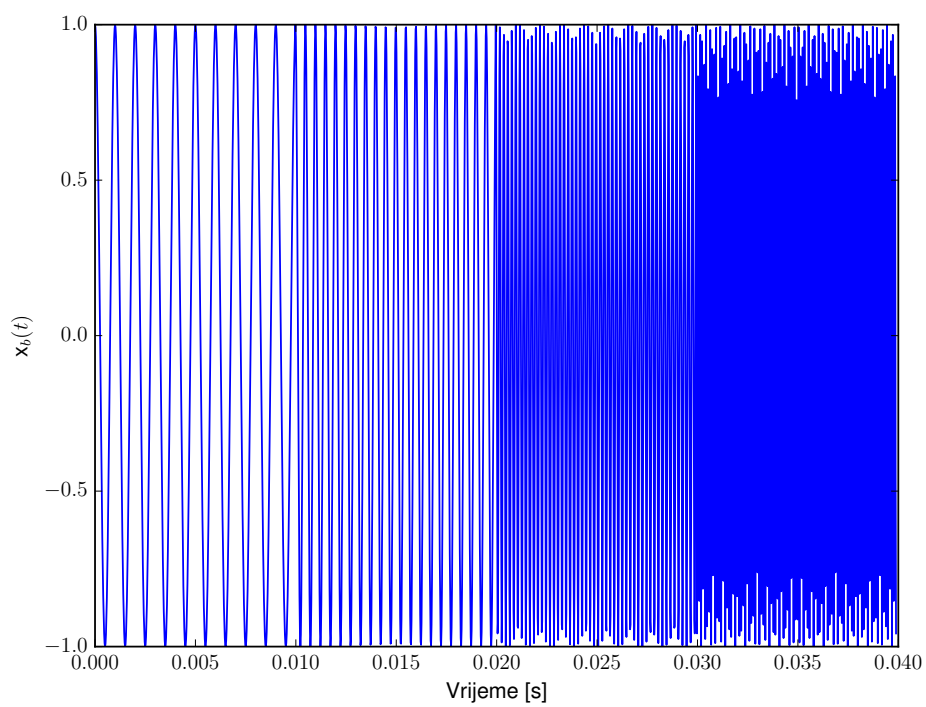
$$x(t) = \cos(2\pi 1000t) + \cos(2\pi 2000t) + \cos(2\pi 5000t) + \cos(2\pi 10000t).$$

Drugi signal je formiran konkatencijom četiri signala:  $x_1(t) = \cos(2\pi 1000t)$ ,  $x_2(t) = \cos(2\pi 2000t)$ ,  $x_3(t) = \cos(2\pi 5000t)$  i  $x_4(t) = \cos(2\pi 10000t)$ , od kojih svaki traje približno po 10 ms<sup>1</sup>.

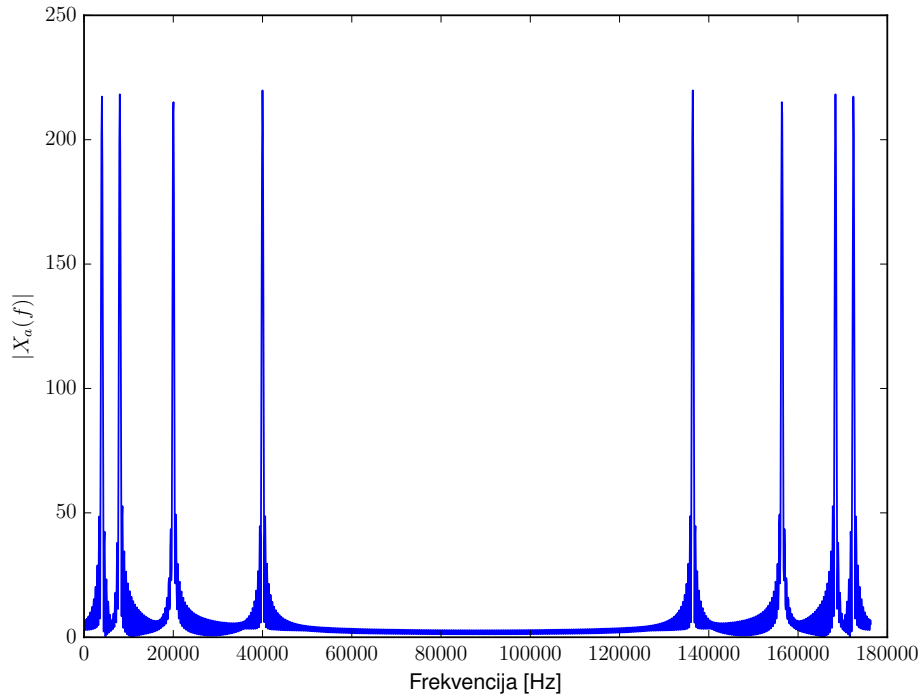
<sup>1</sup>Stvarno trajanje signala je jedan odmjerak manje od 10 ms.



Slika 15: Složenoperiodični signal  $x(t) = \cos(2\pi 1000t) + \cos(2\pi 2000t) + \cos(2\pi 5000t) + \cos(2\pi 10000t)$ .



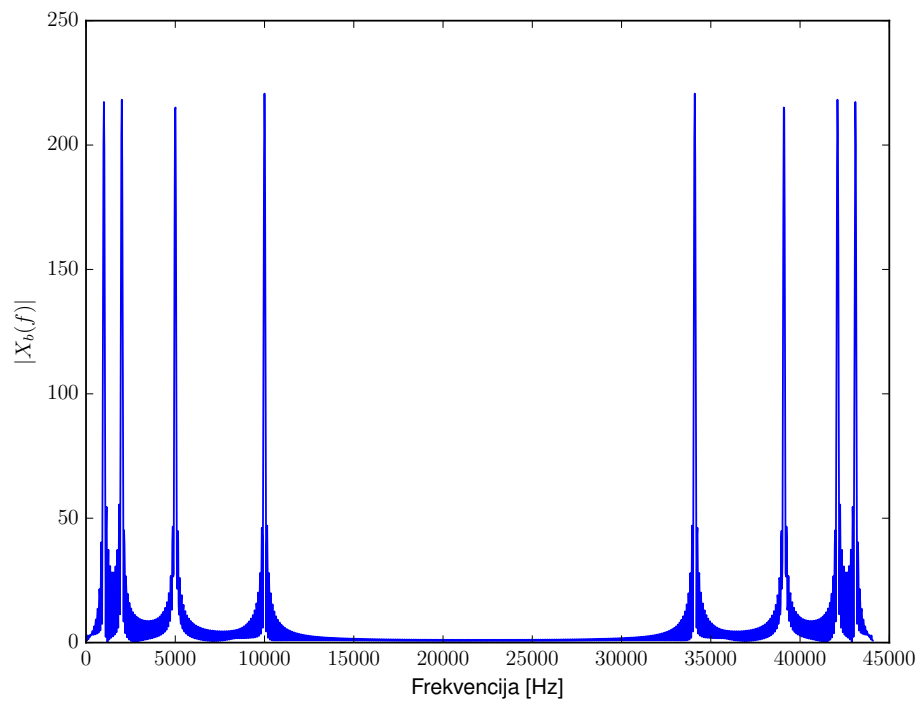
Slika 16: Signal dobijen konkatencijom četiri sinusoide.



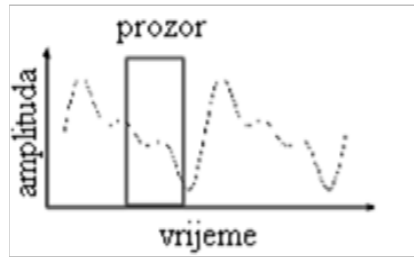
Slika 17: Spektar složenoperiodičnog signala.

Amplitudni spektri ovih signala prikazani su na Slikama 17 i 18, respektivno. Signali su različiti, ali amplitudni spektri dobijeni pomoću DFT su isti. Oba signala sadrže iste prostoperiodične komponente, ali one su prisutne u različitim vremenskim trenucima. Kod prvog signala, sve četiri komponente su prisutne tokom cijelog trajanja uzorka, odnosno, njegov spektar se ne mijenja tokom vremena – signal je stacionaran. Kod drugog signala u svakom trenutku je prisutna samo jedna od komponenata, odnosno ovaj signal je nestacionaran – njegov spektar se mijenja s vremenom.

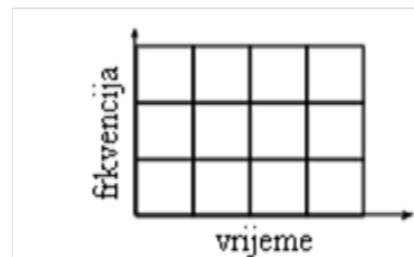
Furijeova analiza nije u stanju da nam da podatak o tome kada je koja komponenta prisutna u signalu, sve što možemo da dobijemo je ukupan spektralni sadržaj signala. Ovaj nedostatak čini Furijeovu transformaciju neadekvatnim alatom za analizu nestacionarnih signala, kakvi su npr. govor i muzika. Za analizu nestacionarnih signala potrebna nam je reprezentacija koja osim spektralne sadrži i vremensku informaciju, odnosno, informaciju o tome kada je koja komponenta prisutna u signalu. Ova vremensko-frekvencijska reprezentacija je umnogome slična notnom zapisu muzike. U notnom zapisu, svakom notom je određena visina tona i njegovo trajanje, odnosno, vremenski



Slika 18: Spektar nestacionarnog signala.



Slika 19: Dijeljenje signala na frejmove pomoću prozorske funkcije.



Slika 20: Podjela ravni vrijeme-prostor.

interval u kojem taj ton postoji.

Kako bi se ovo postiglo signal se dijeli na kratke segmente – frejmove, kao na Slici 19 i smatra se da je unutar jednog frejma signal stacionaran. Nakon toga se za svaki frejm računa Furijeova transformacija. Dijeljenje signala na frejmove se može interpretirati i kao pomjeranje prozorske funkcije koja je različita od nule samo u intervalu fiksne (i konačne) širine po vremenskoj osi i množenje signala sa tom prozorskom funkcijom. Dobija se reprezentacija signala koja je određena vremenom, odnosno, pozicijom prozora na vremenskoj osi, i frekvencijom

$$X(\omega, m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) w(n - m) e^{-j\omega n}. \quad (20)$$

Ovako definisana transformacija se naziva vremenski zavisna Furijeova transformacija ili kratkotrajna Furijeova transformacija (Short Time Fourier Transform – STFT).

Dobijena reprezentacija je formirana u ravni vrijeme-prostor, Slika 20. Vizuelizacija modula kratkotrajne Furijeove transformacije se naziva *spektrogram* signala.

U realizacijama se za izračunavanje kratkotrajne Furijeove transformacije koristi DFT, odnosno, FFT algoritam. Kao rezultat dobijaju se odmjerci

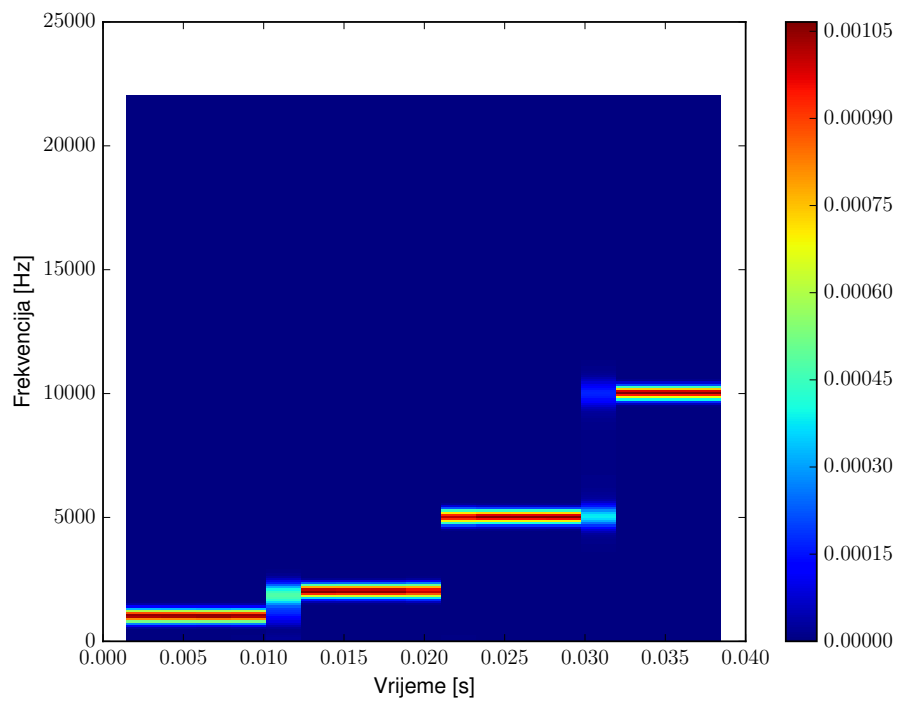
kratkotrajne Furijeove transformacije

$$X(k, m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w(n-m) e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}. \quad (21)$$

Kratkotrajna Furijeova transformacija je tačno predstavljena ovim odmjercima ako je broj tačaka u kojima se računa DFT (broj odmjerača u frekvenciji) veći ili jednak dužini prozora. U tom slučaju moguće je, na osnovu odmjerača kratkotrajne Furijeove transformacije, rekonstruisati dio signala unutar prozora.

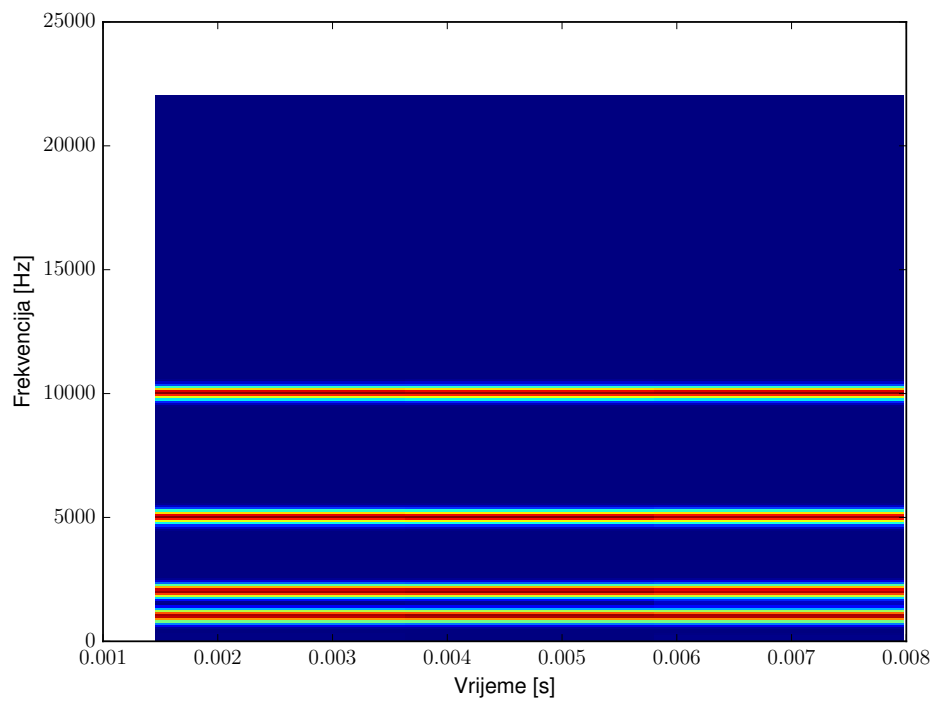
Na Slici 21 prikazan je spektrogram nestacionarnog signala dobijenog konkatencijom četiri sinusoide. Vrijednosti modula kratkotrajne Furijeove transformacije kodovane su bojom piksela, tako da nijanse plave odgovaraju manjim vrijednostima, a nijanse crvene većim vrijednostima, kao što je naznačeno legendom pored spektrograma. Vidimo da je, korištenjem spektrograma, moguće uočiti frekvencije komponenata, kao i intervale u kojima one postoje. Eventualni problemi se, zbog skokovitih promjena, javljaju na granicama pojedinih komponenata. Ovo je inherentan nedostatak svake vremensko-frekvencijske analize i posljedica je činjenice da je nemoguće istovremeno dobiti proizvoljno dobru rezoluciju u vremenu i frekvenciji. Sa druge strane na Slici 22 prikazan je spektrogram stacionarnog, složenoperiodičnog signala. U ovom slučaju iz spektrograma se jasno vidi da su sva četiri harmonika prisutna tokom čitavog trajanja signala.

Na Slici 23 prikazan je talasni oblik govornog signala. Izgovorena je riječ SAT. Jasno je moguće uočiti tri intervala koji odgovaraju glasovima S, A i T. Spektrogram ovog signala je prikazan na Slici 24.

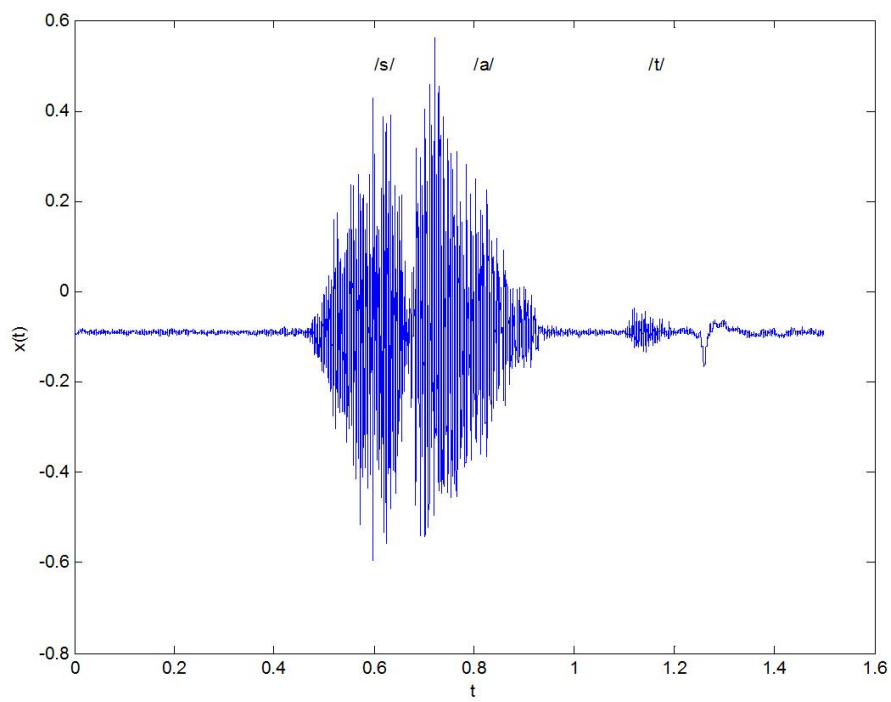


Slika 21: Spektrogram signala dobijenog konkatencijom četiri sinusoide.

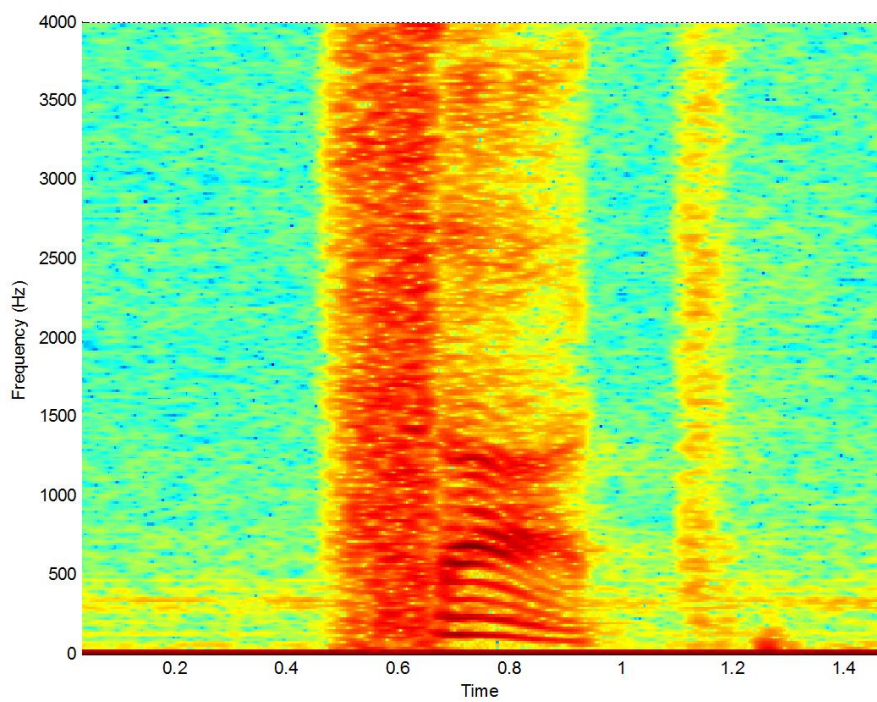




Slika 22: Spektrogram stacionarnog složenoperiodičnog signala.



Slika 23: Talasni oblik govornog signala za izgovorenu riječ SAT.



Slika 24: Spektrogram govornog signala za izgovorenu riječ SAT.