UNIVERZITET U BANJOJ LUCI
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET
STUDIJSKI PROGRAM TELEKOMUNIKACIJE

Vladimir Lekić

NIVO-SKUP METODE ZA SEGMENTACIJU SLIKA U BOJI

magistarski rad

Banja Luka, novembar 2011.

Tema:	**NIVO-SKUP METODE ZA SEGMENTACIJU SLIKA U BOJI**
Uža naučna oblast:	Digitalna obrada slike
Ključne riječi:	*nivo-skup, level-set, varijacioni račun, tenzor, CIE L*a*b*, k-means, superpikseli, parcijalne diferencijalne jednačine, funkcional, preciznost-odziv, precision-recall, F-mjera*
Komisija:	prof. dr. Zdenka Babić prof. dr. Momir Ćelić prof. dr. Branimir Reljin

Kandidat:
Vladimir Lekić

UNIVERZITET U BANJOJ LUCI

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

STUDIJSKI PROGRAM TELEKOMUNIKACIJE

Tema: **NIVO-SKUP METODE ZA SEGMENTACIJU SLIKA U BOJI**

Sažetak: U ovom radu predstavljena je metoda za segmentaciju slika u boji primjenom varijacionog računa i teorije parcijalnih diferencijalnih jednačina. Metode zasnovane na ovim teorijama imaju dosta dobrih karakteristika, kao što su dobra otpornost na šum, široka mogućnost primjene, proširivost metode na više dimenzija, mogućnost vizualizacije procesa segmentacije itd. Međutim, ove metode u prošlosti nisu davale zadovoljavajuće rezultate pri segmentaciji opštih slika u boji i bile su namijenjene isključivo za specifične zadatke jer je usljed kompleksne strukture evolucione jednačine bilo potrebno za svaku različitu klasu slika iznova podešavati njene parametre. U radu je pokazano da se korišćenjem tehnike superpikselske segmentacije može redukovati broj parametara evolucione nivo-skup jednačine. Pored toga, uključivanjem većeg broja informacija o slici u samu jednačinu postižu se znatno bolji rezultati segmentacije opštih slika u boji.

Abstract: In this work is presented method for image segmentation based on theories of calculus of variation and partial differential equations. Methods based on these theories have significant number of good characteristics, such good robustness to noise, wide application, method is easily extensible to higher dimensions, possibility to visualize process of segmentation etc. On the other hand these methods did not give satisfactory results in segmentation of color images and they were used exclusively for specific segmentation tasks. Reason for this is due to a complex structure of evolution equation. In work has been shown that by including various image cues in tensor level-set equation it is possible to achieve significantly better segmentation results, comparable to state-of-the art segmentation techniques.

Mentor: prof. dr. Zdenka Babić

Kandidat: Vladimir Lekić (p4/05)

Banja Luka, novembar 2011.

Sadržaj

1 Uvod **1**

1.1 Uvodna razmatranja . . . 1

1.2 Kratak sadržaj i organizacija rada . . . 1

2 Osnove teorije mjere i varijacionog računa **4**

2.1 Osnove teorije mjere . . . 4

2.1.1 Osnovni pojmovi i definicije . . . 4

2.1.1.1 Linearni prostori . . . 4

2.1.1.2 Normirani linearni prostori . . . 5

2.1.1.3 Banachovi prostori . . . 5

2.1.1.4 Hilbertovi prostori . . . 5

2.1.2 Prostori funkcija . . . 6

2.1.2.1 Osnovni pojmovi i definicije . . . 6

2.1.2.2 Mjera, Borelova mjera, Radonova mjera, mjerljive funkcije, integrali, Lebesgueova mjera i Lebesgueov integral . . . 6

2.1.2.3 L^p prostori . . . 10

2.1.2.4 Soboljevljevi prostori . . . 10

2.1.2.5 Hausdorffova mjera . . . 12

2.1.2.6 Funkcije ograničene varijacije . . . 13

2.2 Osnove varijacionog računa . . . 17

2.2.0.7 Opšti model problema . . . 17

2.2.0.8 Direktna metoda varijacionog računa . . . 18

3 Varijacioni račun u obradi slike **21**

3.1 Matematički model degradacije slike . . . 21

3.2 Stohastičko modelovanje . . . 22

3.3 Varijacione metode . . . 25

3.3.1 Statistička mehanika i veza sa digitalnom obradom slike - Gibbsov model slike . . . 25

3.3.2 Mumford-Shahov funkcional . . . 27

3.3.2.1 Mumford-Shahova definicija segmentacije . . . 27

4 Nivo-skup metode za segmentaciju slike **29**

4.1 Nivo-skup metoda . . . 29

4.1.1 Implicitne funkcije i krive . . . 29

4.1.2 Pomoćne funkcije . . . 30

4.1.3 Funkcija rastojanja sa predznakom 32
4.1.4 Reinicijalizacija funkcije rastojanja sa predznakom 33
4.1.5 Jednačine propagacije interfejsa 33
4.1.5.1 Kretanje pod uticajem eksternog vektorskog polja 33
4.1.5.2 Kretanje pod uticajem krivine interfejsa 35
4.1.5.3 Kretanje interfejsa u smjeru jedinične normale 36
4.1.5.4 Kombinovano kretanje 37
4.2 Segmentacija slike korišćenjem aktivnih kontura 37
4.3 Geodezijske aktivne konture 38
4.3.1 Nivo-skup formulacija 39
4.4 Aktivne konture bez reinicijalizacije 39
4.5 Chan-Veseova nivo-skup metoda 40
4.5.1 Nivo-skup reprezentacija 41
4.5.2 Dokaz postojanja minimuma nivo-skup reprezentacije 41
4.5.3 Euler-Lagrangeova jednačina 43
4.5.4 Numerička aproksimacija modela 43
4.6 Vektorska Chan-Veseova nivo-skup metoda 49
4.7 Multifazna Chan-Veseova nivo-skup metoda 51

5 Tenzorske nivo-skup metode za segmentaciju slike 55
5.1 Tenzori 55
5.1.1 Tenzori nultog reda (skalari) 55
5.1.2 Tenzori prvog reda (vektori) 55
5.1.3 Tenzori drugog reda 56
5.1.4 Tenzori višeg reda 56
5.2 Unificirana tenzorska nivo-skup metoda za segmentaciju slika 57
5.2.1 Gaborov filter 57
5.2.2 Konstrukcija tenzora 58
5.2.3 Unificirana tenzorska nivo-skup metoda 59
5.2.4 Eksperimentalni rezultati 62
5.3 Tenzorska nivo-skup metoda za segmentaciju slika u boji 62
5.3.1 Matrice rastojanja u CIE $L^*a^*b^*$ prostoru boja 64
5.3.2 Prekomjerna segmentacija korišćenjem superpiksela 66
5.3.3 Tenzorsko polje i evoluciona jednačina 67
5.3.4 Eksperimentalni rezultati 69
5.3.4.1 BS skup podataka 69
5.3.4.2 Dijagram preciznosti-odziva 71
5.3.4.3 Evaluacija predložene metode 74

6 Zaključak 78

Literatura 80

Slike

1.1 Ilustracija promjene topologije konture 2

2.1 Hausdorffova mjera 12
2.2 Definicija približnih granica funkcije 16

4.1 Nulta nivo-linija funkcije $\phi(x, y) = y - x^2 + 1$. 30
4.2 Regularizovana Heavisideova i Diracova funkcija. 32
4.3 Kretanje interfejsa pod uticajem eksternog vektorskog polja 34
4.4 Kretanje interfejsa pod uticajem krivine interfejsa 35
4.5 Kretanje interfejsa u smjeru jedinične normale 36
4.6 Kombinovano kretanje interfejsa 37
4.7 Primjer evolucije aktivne konture 40
4.8 Chan-Veseova metoda za segmentaciju - pravougaona inicijalna kontura . . 48
4.9 Chan-Veseova metoda za segmentaciju - eliptična inicijalna kontura 48
4.10 Chan-Veseova metoda za segmentaciju slika u boji - klasična metoda . . . 50
4.11 Vektorska Chan-Veseova metoda za segmentaciju slika u boji - 300 iteracija 50
4.12 Vektorska Chan-Veseova metoda za segmentaciju slika u boji - 145 iteracija 51
4.13 Multifazna Chan-Veseova nivo-skup metoda 52
4.14 Multifazna Chan-Veseova metoda za segmentaciju slika u boji - primjer 1 . 54
4.15 Multifazna Chan-Veseova metoda za segmentaciju slika u boji - primjer 2 . 54

5.1 Ilustracija promjene komponenti vektora usljed promjene koordinatnog sistema 56
5.2 Impulsni odziv Gaborovog filtera 58
5.3 Impulsni odziv Gaborovog filtera - $3D$ 59
5.4 Unificirana tenzorska reprezentacija svakog piksela slike 60
5.5 Kontura Γ u polju tenzora iz $\mathbb{R}^{S\times D\times K}$ 60
5.6 Tenzorska nivo-skup metoda - testne slike 62
5.7 Rezultati segmentacije slike eskima za dva položaja inicijalne konture . . . 63
5.8 Rezultati segmentacije slike tigra za dva položaja inicijalne konture 63
5.9 CIE $L^*a^*b^*$ prostor boja 64
5.10 Intezitetski prikaz matrica rastojanja određenih u CIE $L^*a^*b^*$ prostoru boja 65
5.11 Aproksimacija slike superpikselskom mapom 66
5.12 Rezultati segmentacije slike tigra i eskima za dva položaja inicijalne konture kada se kao za formiranje tenzorskog polja koriste matrice rastojanja iz CIE $L^*a^*b^*$ prostora boja 67
5.11 Primjeri slika iz BS skupa podataka 71

5.12 Primjer računanja preciznosti i odziva 72
5.13 Evaluacija alogoritama za segmentaciju na BS skupu slika 73
5.14 Graf F-mjere za algoritme zasnovane na totalnoj, prosječnoj i normalizovanoj različitosti piksela u poređenju sa Chan-Veseovom metodom 74
5.13 Primjeri segmentacija dobijeni predloženom metodom za segmentaciju . . . 77
5.14 Dijagram preciznosti-odziva za metodu predloženu u ovom radu i poređenje sa nekim poznatijim metodama za segmentaciju 77

1. Uvod

1.1 Uvodna razmatranja

Predmet razmatranja u okviru ovog rada je razvoj algoritma za segmentaciju slika u boji primjenom varijacionog računa i teorije parcijalnih diferencijalnih jednačina. Metode obrade digitalnih slika zasnovane na ovim matematičkim teorijama intenzivno se razvijaju posljednjih 20 godina i pokazale su dosta dobre rezultate u oblasti segmentacije slike.

Sve varijacione metode pa i ova predstavljena u ovom radu se zasnivaju u prvom redu na definiciji energetskog funkcionala čijom se minimizacijom postiže rješenje problema segmentacije ili restauracije slike. Minimum funkcionala se traži u adekvatnom prostoru funkcija. Pokazuje se da funkcija koja predstavlja minimum takođe predstavlja i rješenje Euler-Lagrangeove parcijalne diferencijalne jednačine, koja se dalje rješava metodom najstrmijeg spuštanja. Stacionarno rješenje tako dobijene parcijalne diferencijalne jednačine je i rješenje problema segmentacije. Traženje stacionarnog rješenja se fizički manifestuje kao propagacija konture pod uticajem vektorskog polja, a konačno rješenje u suštini predstavlja stanje ravnoteže u kojem se kontura više ne deformiše. Za numeričko rješavanje problema propagacije konture koristi se nivo-skup metoda (*eng.* level-set). Prednosti korišćenja nivo-skup metode za numeričko rješavanje problema propagacije konture su sljedeće.

- Implicitna funkcija ϕ, čiji nulti nivo-skup predstavlja konturu, ostaje glatka dok god je vektorsko polje glatko. U toku evolucije ϕ, nulti nivo-skup $\phi = 0$ pri tome može da mijenja topologiju, da se prekida i da se ponovo spaja. Ilustracija promjene topologije krive je data na slici 1.1 ([1]). Ovo je osnovna prednost ove metoda, jer se ove topološke promjene ne moraju tretirati složenim numeričkim metodama.

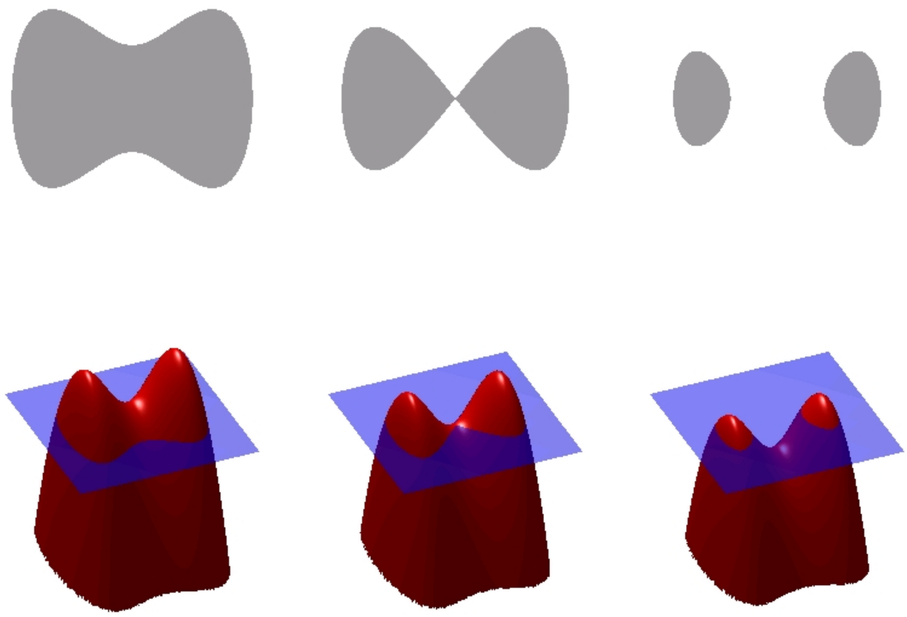
- Mogu se koristiti numeričke metode konačnih razlika za aproksimaciju prostornih i vremenski derivacija.

- Geometrijski elementi interfejsa, kao što su normala i krivina se mogu jednostavno izraziti preko nivo-skup funkcije ϕ.

- Predstavljena nivo-skup metoda se može proširiti i primijeniti na bilo koju dimenziju.

1.2 Kratak sadržaj i organizacija rada

Rad je motivisan činjenicom da se nivo-skup metode do sada nisu pokazale efikasne prilikom segmentacije opštih slika u boji. Zbog velikog broja parametara koje je potrebno



Slika 1.1: *Ilustracija promjene topologije konture.*

podešavati u evolucionoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačini ove metode su prilagođene uglavnom specifičnim primjenama.

Ciljevi i zadaci koji su postavljeni u okviru ovog rada su sljedeći.

1. Realizacija nivo-skup metode za segmentaciju slika u boji.
2. Kroz razradu metode provjeriti mogućnost smanjenja broja parametara algoritma.
3. Realizovati predloženu metodu u programskom okruženju Matlab.
4. Izvršiti eksperimentalno testiranje algoritma na većem broju slika u boji.

Rad se sastoji iz pet glava.

Prva glava je uvodna i ovdje je ukazano na značaj oblasti koja predstavlja predmet istraživanja. Pored toga dati su kratak sadržaj i organizacija rada.

U drugoj glavi rada predstavljen je matematički aparat neophodan za kvalitetno tretiranje problema iz oblasti obrade slike u okviru teorija varijacionog računa i parcijalnih diferencijalnih jednačina. Dati su osnovni pojmovi i definicije iz teorije skupova i prostora funkcija. Date su definicije L_p i Soboljevljevih prostora, a posebna pažnja je posvećena prostoru funkcija sa ograničenom varijacijom jer će se ovaj prostor funkcija pokazati posebno korisnim u nastavku rada. Na samom kraju ove glave date su osnove varijacionog računa, zaključno sa Euler-Lagrangeovom jednačinom koja će se često koristiti u radu.

U trećoj glavi rada predstavljen je matematički model degradacije slike. Na tom modelu bazirano je dalje izlaganje o stohastičkim i varijacionim metodama obrade slike. Date su osnove iz statističke mehanike, gdje je i izvedena Gibbsova distribucija koja daje vezu između stohastičkih i determinističkih, odnosno varijacionih metoda obrade slike.

Na kraju je predstavljen Mumford-Shahov funkcional koji predstavlja osnov za izlaganje u sljedećim glavama.

U četvrtoj glavi rada predstavljene su nivo-skup metode za obradu slike. Prvo su date neophodne definicije i teorija koja stoji iza nivo-skup metode, a zatim neki osnovni modeli za obradu slike zasnovani na nivo-skup metodama. Predstavljeni su modeli zasnovani na aktivnim konturama (sa i bez reinicijalizacije) i Chan-Veseove metode (skalarna, vektorska i multifazna).

U petoj glavi predstavljena je nova tenzorska nivo-skup metoda za obradu slika u boji, koja predstavlja naš doprinos u oblasti digitalne obrade slike. Na samom početku izlaganja u ovoj glavi date su osnove tenzorske reprezentacije i predstavljena je unificirana tenzorska nivo-skup metoda za segmentaciju sivih slika. Na samom kraju data je uporedna analiza naše metode sa postojećim metodama za segmentaciju slika u boji.

2. Osnove teorije mjere i varijacionog računa

Do sada je razvijeno mnogo različitih metoda za procesiranje digitalnih slika. Starije metode se uglavnom zasnivaju na teoriji filtera, spektralnoj analizi ili na teoriji vjerovatnoće i statistike, odnosno na tehnikama prenesenim iz srodne oblasti procesiranja jednodimenzionalnih signala. Efikasnost i prednost pojedine metode zavise od problema koji se rješava, ali i od klase i strukture slika koje se obrađuju. Posljednjih dvadeset godina, sa povećanjem procesorske moći računara i sa povećanjem interesovanja za ovu oblast nauke pojavile su se i nove metode, koje su i pored jake teoretske osnove u prošlosti bile zanemarivane. Tu se prije svega misli na metode zasnovane na stohastičkom modelovanju, računu varijacija i na metode zasnovane na teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina. U ovom poglavlju dat je odgovarajući matematički aparat potreban za ozbiljniju analizu slike u okviru ovih teorija, a nakon toga dat je pregled osnovnih metoda za procesiranje slika i ukazano na njihovu povezanost.

2.1 Osnove teorije mjere

2.1.1 Osnovni pojmovi i definicije

2.1.1.1 Linearni prostori

Definicija 2.1.1. *Skup $\mathcal{F}$ se naziva linearni (vektorski) prostor nad poljem $\mathbb{R}$ ako su na njemu definisane operacije sabiranja i množenja realnim brojem, ako rezultujući elementi tih operacija pripadaju skupu $\mathcal{F}$ i ako važe sljedeće osobine*

(a) $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$,

(b) $(f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + (f_2 + f_3)$,

(c) postoji neutralni element o u $\mathcal{F}$ takav da je $o + f = f + o = f$ za svaki $f \in \mathcal{F}$,

(d) za svaki element $f \in \mathcal{F}$ postoji inverzni element $-f \in \mathcal{F}$ takav da je $f + (-f) = o$,

(e) $(c_1 + c_2)f = c_1 f + c_2 f$,

(f) $c(f_1 + f_2) = cf_1 + cf_2$,

(g) $(c_1 c_2)f = c_1(c_2 f)$,

(h) $1 \cdot f = f$

za svaki $f, f_1, \ldots \in \mathcal{F}$ *i za sve brojeve* $c, c_1, \ldots \in \mathbb{R}$.

2.1.1.2 Normirani linearni prostori

Definicija 2.1.2. *Prostor* $\mathcal{F}$ *je normirani linarni prostor ako se svakom elementu* f *ovog prostora može pridružiti broj (norma)* $\|f\| \in \mathbb{R}$ *koji ima sljedeće osobine:*

(a) $\|f\| \geq 0$, *gdje je* $\|f\| = 0$ *ako i samo ako je* $f = o$,

(b) $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$ *za bilo koji realan* c *i bilo koji* $f \in \mathcal{F}$,

(c) $\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$ *za svaki* $f_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2$.

2.1.1.3 Banachovi prostori

U normirane linearne prostore uvode se pojmovi rastojanja $\|f_1 - f_2\|$ između dva elementa f_1 i f_2 i pojam konvergencije.

Definicije 2.1.3.

(a) Niz $(f_m), m = 1, 2, \ldots$ *elemenata iz normiranog linearnog prostora* $\mathcal{F}$ *naziva se fundamentalni niz (ili Cauchyjev niz) ako važi*

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall k, m > N)\ \|f_k - f_m\| < \epsilon.$$

(b) Kaže se da niz $(f_m), m = 1, 2, \ldots$ *elementa iz* $\mathcal{F}$ *konvergira ka* $f \in \mathcal{F}$ $(\lim_{m\to\infty} f_m = f)$ *ako* $\|f_m - f\| \to 0$ *kada* $m \to \infty$.

(c) Za normirani linearni prostor se kaže da je kompletan ako za svaki fundamentalni niz njegovih elemenata postoji element tog prostora kome taj niz konvergira.

(d) Kompletan normiran linearni prostor naziva se Banachov prostor.

2.1.1.4 Hilbertovi prostori

Da bi se definisao Hilbertov prostor potrebno je uvesti pojam skalarnog proizvoda.

Definicija 2.1.4. *Kaže se da je u realni linearni prostor* H *uveden skalarni proizvod ako za svaki par njegovih elemenata* $h_1, h_2 \in H$ *postoji broj* $\langle h_1, h_2 \rangle$ *(skalarni proizvod tih elemenata) sa sljedećim osobinama:*

(a) $\langle h_1, h_2 \rangle = \langle h_2, h_1 \rangle$,

(b) $\langle h_1 + h_2, h \rangle = \langle h_1, h \rangle + \langle h_2, h \rangle$,

(c) $\langle h, h \rangle \geq 0$, *gdje je* $\langle h, h \rangle = 0$ *ako i samo ako* $h = o$,

(d) $\langle \lambda h_1, h_2 \rangle = \lambda \langle h_1, h_2 \rangle$.

Može se pokazati (pogledati npr. [2]) da skalarni proizvod generiše normu $\|h\| = \sqrt{\langle h, h\rangle}$ u H. Linearni prostor sa skalarnim proizvodom koji je kompletan u odnosu na normu generisanu ovim skalarnim proizvodom naziva se Hilbertov prostor.

Najpoznatiji primjer realnog Hilbertovog prostora je Euklidov prostor $\mathbb{R}^n$ sa skalarnim proizvodom

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

2.1.2 Prostori funkcija

U prethodnom izlaganju su uvedeni pojmovi Banachovog i Hilbertovog prostora. Date definicije su bile zasnovane samo na vezi između elemenata, odnosno bilo je dovoljno da se uvedu operacije sabiranja i množenja, norma, odgovarajući skalarni proizvod i da su zadovoljeni određeni aksiomi. Priroda elemenata tih prostora nije uzimana u obzir. Međutim, za teoriju parcijalnih diferencijalnih jednačina i varijacioni račun uvedene opšte karakteristike elemenata nisu dovoljne. Svrsishodnije je posmatrati prostore funkcija, tj. prostore čiji su elementi funkcije sa n realnih varijabli.

2.1.2.1 Osnovni pojmovi i definicije

Ovdje će biti navedeni pomoćni pojmovi i oznake koji će se koristiti u daljem radu. Neka je sa $\mathbb{R}$ označen skup realnih brojeva. Otvoren i povezan skup[1] $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se naziva oblast. Granicom oblasti Ω se naziva skup $\Gamma = \partial\Omega = \overline{\Omega}\backslash\Omega$, gdje je $\overline{\Omega}$ zatvorenje[2] skupa Ω.

Skup funkcija $u : \Omega \to \mathbb{R}$ koje imaju sve neprekidne izvode zaključno sa redom $0 \leq k \leq \infty$ se označava sa $\mathcal{C}^k(\Omega)$, dok se skup funkcija $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ koji se sastoji od funkcija koje imaju neprekidne izvode zaključno sa redom $0 \leq k \leq \infty$ u $\overline{\Omega}$ označava sa $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$. Nosačem funkcije u, u oznaci $\operatorname{supp} u$, naziva se zatvorenje skupa tačaka u kojima je $u(x) \neq 0$, odnosno

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

Drugačije rečeno, $\operatorname{supp} u$ je komplement najvećeg otvorenog skupa na kom je u identički jednako nuli. Oznaka $A \subset\subset B$ znači da postoji kompaktan[3] skup K, takav da važi $A \subset K \subset B$. Sa $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$ se označava podskup $\mathcal{C}^k(\Omega)$ koji čine funkcije sa kompaktnim nosačem u Ω.

2.1.2.2 Mjera, Borelova mjera, Radonova mjera, mjerljive funkcije, integrali, Lebesgueova mjera i Lebesgueov integral

Principi mjerenja u matematici podliježu izvjesnim pravilima. Neka je sa 2^Ω označen partitivni skup od Ω, odnosno skup svih podskupova od Ω.

[1] Povezan skup je skup koji se ne može podijeliti na dva neprazna podskupa tako da nijedan od tih podskupova nema zajedničkih tačaka u zatvorenju onoga drugog.

[2] Zatvorenje $\overline{\Omega}$ skupa Ω je najmanji zatvoren skup koji sadrži Ω.

[3] Kompaktan skup je skup koji je ograničen i zatvoren.

Definicija 2.1.5. *Familija podskupova $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ je σ-algebra na Ω, ako važe svojstva:*

(a) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$,

(b) ako $A \in \mathcal{A}$, *onda* $\Omega - A \in \mathcal{A}$,

(c) ako je $A_n \in \mathcal{A}$ *za* $n = 1, 2, \ldots$, *tada i* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Neka je Ω proizvoljan skup i neka je $\mathcal{A}$ jedna σ-algebra podskupova od Ω. Par $(\Omega, \mathcal{A})$ naziva se mjerljiv prostor, a za elemente iz $\mathcal{A}$ se kaže da su mjerljivi skupovi u Ω.

Definicija 2.1.6. *Nenegativna funkcija μ koja je definisana na σ-algebri $\mathcal{A}$ naziva se mjera*[4] *na $\mathcal{A}$ ako važe svojstva:*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$,

(b) ako za svaki niz (A_m) *u parovima disjunktnih elemenata iz* $\mathcal{A}$ *važi*

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m).$$

Svaki mjerljiv prostor $(\Omega, \mathcal{A})$ koji je snabdjeven mjerom μ naziva se prostor sa mjerom i označava se sa $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Definicija 2.1.7. *Skup $A \subset \Omega$ je μ-mjerljiv ako za svaki skup $B \subset \Omega$ važi*

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B - A).$$

Potrebno je primijetiti da ako je $\mu(A) = 0$, onda je A μ-mjerljiv. Takođe, jasno je da je A μ-mjerljiv ako i samo ako je $\Omega - A$ μ-mjerljiv.

Kada se kaže da je μ mjera na Ω, pod tim se podrazumijeva da je μ mjera na σ-algebri $\mathcal{A}$ u Ω.

Ako je $\mu(\Omega) < +\infty$, kaže se da je μ konačna mjera na Ω. Vjerovatnoća P je primjer konačne mjere jer je $P(\Omega) = 1$.

Definicija 2.1.8. *Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}^n$ je najmanja σ-algebra na $\mathbb{R}^n$ koja sadrži sve otvorene podskupove iz $\mathbb{R}^n$.*

Elementi Borelove algebre nazivaju se Borelovi skupovi.

U nastavku su definisane određene klase mjera koje će se upotrebljavati u nastavku rada.

Definicije 2.1.9.

(a) Mjera μ na Ω je regularna ako za svaki skup $A \subset \Omega$ postoji μ-mjerljiv skup B takav da je $A \subset B$ i $\mu(A) = \mu(B)$.

(b) Mjera μ na $\mathbb{R}^n$ se naziva Borelova mjera ako je svaki Borelov skup μ-mjerljiv.

[4] Za mjeru koja se definiše na ovakav način kaže se da je pozitivna mjera (mada je ona u suštini nenegativna).

(c) Mjera μ na $\mathbb{R}^n$ je Borel regularna ako je μ Borelova mjera i za svaki $A \subset \mathbb{R}^n$ postoji Borelov skup B takav da je $A \subset B$ i $\mu(A) = \mu(B)$.

(d) Mjera μ na $\mathbb{R}^n$ se naziva Radonova mjera ako je μ Borel regularna i $\mu(K) < \infty$ za svaki kompaktni skup $K \subset \mathbb{R}^n$.

Pojam mjerljivosti se može proširiti i na skupove funkcija.

Definicija 2.1.10. *Za funkciju $f : \Omega \to Y$ se kaže da je μ-mjerljiva ako je za svaki otvoreni skup $U \subset Y$, skup $f^{-1}(U)$ μ-mjerljiv.*

Sa datim osnovama teorije mjere može se predstaviti i teorija integracije. Neka je sa χ_{A_i} označena tzv. karakteristična funkcija skupa A_i koja je definisana sa

$$\chi_{A_i}(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in A_i \\ 0 & : \quad x \notin A_i \end{cases}.$$

Neka je $(\Omega, \mathcal{A})$ mjerljiv prostor i neka je $s : \Omega \to \mathbb{R}$ μ-mjerljiva, jednostavna[5] i nenegativna funkcija. Svaka jednostavna funkcija s koja uzima vrijednosti α_i na A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ može se predstaviti kao linearna kombinacija karakterističnih funkcija skupova A_i, odnosno

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x),$$

pri čemu su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$, $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\}) \in \mathcal{A}$ i $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$.

Definicija 2.1.11. *Integral jednostavne, μ-mjerljive, nenegativne funkcije s na μ-mjerljivom skupu $A \subset \Omega$ definiše se sa*

$$\int_A s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap A).$$

Prije nego se definiše integral za funkcije koje nisu jednostavne potrebno je navesti sljedeće tvrđenje. Ako je $f : \Omega \to \mathbb{R}$ nenegativna μ-mjerljiva funkcija na Ω, tada postoji niz nenegativnih μ-mjerljivih jednostavnih funkcija (s_n) takav da je

$$s_1(x) \leq s_2(x) \leq \cdots \leq s_n(x) \leq \cdots \leq f(x)$$

i

$$\lim_{n \to \infty} s_n(x) = f(x) \text{ za svako } x \in \Omega.$$

Definicija 2.1.12. *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{R}$ nenegativna μ-mjerljiva funkcija. Integral funkcije f na μ-mjerljivom skupu $A \subset \Omega$ definiše se sa*

$$\int_A f \, d\mu = \sup_{0 \leq s \leq f} \int_A s \, d\mu,$$

gdje se supremum uzima preko svih jednostavnih μ-mjerljivih funkcija s.

[5] Funkcija $s : \Omega \to \mathbb{R}$ naziva se jednostavna funkcija ako joj je slika konačan skup.

Dalje, ako se eliminiše restrikcija da je funkcija f nenegativna, dobija se opšta definicija integrala. Prije definicije potrebno je uvesti nove pojmove. Neka je μ pozitivna mjera na mjerljivom prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$. Neka je $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μ-mjerljiva funkcija. Tada su funkcije

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \;\; f^- = \max\{-f, 0\}$$

nenegativne i μ-mjerljive. Jednostavno je provjeriti da važi

$$f = f^+ - f^-, \;\; \|f\| = f^+ + f^-.$$

Definicija 2.1.13. *Integral funkcije f na μ-mjerljivom skupu $A \subset \Omega$ definiše se kao*

$$\int_A f \, d\mu = \int_A f^+ \, d\mu - \int_A f^- \, d\mu.$$

Definicija 2.1.14. *Funkcija f je integrabilna na μ-mjerljivom skupu $A \subset \Omega$, ako je $\int_A f \, d\mu < +\infty$.*

Zbog izuzetnog značaja u daljem izlaganju posebno će biti izdvojena Lebesgueova mjera. U teoriji mjere, Lebesgueova mjera je u stvari standardizovani način pridruživanja mjere podskupovima n-dimenzionalnog Euklidovog prostora. Za $n = 1, 2$ i 3, Lebesgueova mjera identična je uobičajenim mjerama dužine, površine i volumena, respektivno.

Definicija 2.1.15. *Jednodimenzionalna Lebesgueova mjera $\mathcal{L}^1$ na $\mathbb{R}^1$ definiše se kao*

$$\mathcal{L}^1(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam} C_i \; : \; A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i, \; \textit{intervali } C_i \subset \mathbb{R} \right\}$$

za svaki $A \subset \mathbb{R}$.

Definicija 2.1.16. *Indukcijom se definiše n-dimenzionalna Lebesgueova mjera $\mathcal{L}^n$ na $\mathbb{R}^n$ kao*

$$\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{n-1} \times \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1 \times \cdots \times \mathcal{L}^1 \; (n \textit{ puta}).$$

Umjesto "$d\mathcal{L}^n$" u integralima u odnosu na mjeru $\mathcal{L}^n$ uvijek će se koristiti "dx", "dy" itd.

Definicija 2.1.17. *Kaže se da je skup $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgueove mjere nula, u oznaci $\mathcal{L}^n(A) = 0$, ako za svako $\epsilon > 0$ postoji prebrojiva unija paralelopipeda C_i u $\mathbb{R}^n$ takva da je $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ i njihov ukupni volumen $\sum_{i=1}^{\infty} |C_i| < \epsilon$. Sa $|C_i|$ je označen volumen paralelopipeda C_i, za $i = 1, 2, \ldots$.*

Na primjer, prebrojiv skup tačaka $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$ je skup Lebesgueove mjere nula u jednodimenzionalnom slučaju, jer se za svako $\epsilon > 0$ tačka x_k skupa E može prekriti intervalom čija je dužina manja od $\epsilon/2^k$. Tada će dužina svih prekrivajućih intervala biti manja od

$$\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\epsilon}{2^k} + \cdots = \epsilon.$$

Ako neka osobina važi za sve tačke x nekog skupa A, osim možda za skup Lebesgueove mjere nula, onda se kaže da ta osobina važi za skoro sve tačke $x \in A$, ili skoro svuda u A.

Definicija 2.1.18. *Za funkcije $u : \Omega \to \mathbb{R}$ koje su Lebesgue mjerljive kaže se da su jednake skoro svuda na Ω, i piše $f \sim g$, ako one možda nisu jednake na skupu Lebesgueove mjere nula, odnosno ako je*

$$\mathcal{L}(\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Ako je $f = g$ skoro svuda na mjerljivom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$, tada je

$$\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu,$$

što znači da integral u odnosu na Lebesgueovu mjeru ne zavisi od vrijednosti koje funkcija uzima na nekom skupu čija je Lebesgueova mjera nula.

2.1.2.3 L^p prostori

Definicija 2.1.19. *Neka je $\mathcal{L}^p(\Omega)$ skup mjerljivih funkcija f definisanih na Ω za koje je $\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$, $1 \leq p < \infty$. U taj skup se uvodi relacija ekvivalencije:*

$$f \sim g \text{ ako je } f(x) = g(x) \text{ skoro svuda na } \Omega.$$

Količnički skup $\mathcal{L}^p(\Omega)/\sim$ označava se sa $L^p(\Omega)$.

Mada je $L^p(\Omega)$ skup klasa ekvivalencije, obično se kaže da je $L^p(\Omega)$ skup funkcija (tj. predstavnika klasa ekvivalencije). To znači da se ne pravi razlika između dvije skoro svuda jednake funkcije, ili što je isto, smatra se da su dvije funkcije iz $L^p(\Omega)$ različite samo kada se njihove vrijednosti ne poklapaju na skupu pozitivne mjere.

Može se pokazati (pogledati npr. [2]) da je $L^p(\Omega)$ Banachov prostor sa normom

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Također, može se pokazati da je prostor $L^2(\Omega)$ Hilbertov, i to sa skalarnim proizvodom definisanim sa

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x) g(x) \, dx.$$

Definicija 2.1.20. *Skup funkcija koje su integrabilne na ograničenoj podoblasti Ω' oblasti Ω, $\Omega' \subset \Omega$, označavaju se sa $L^1_{loc}(\Omega)$. Funkcije iz $L^1_{loc}(\Omega)$ zovu se lokalno integrabilne funkcije.*

2.1.2.4 Soboljevljevi prostori

Prije nego se definišu Soboljevljevi prostori potrebno je uvesti pojam slabog izvoda. Može se pokazati da ako za neprekidnu funkciju $f(x) \in \mathcal{C}(\Omega)$ postoji funkcija $g(x)$ takva da važi

$$\int_\Omega f(x) \phi'(x) \, dx = - \int_\Omega g(x) \phi(x) \, dx, \tag{2.1.1}$$

za sve $\phi(x) \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$, tada funkcija $f(x)$ ima izvod $f'(x)$ u Ω i $f'(x) = g(x)$ za sve $x \in \Omega$. Za klasu neprekidnih funkcija ovo bi bila definicija izvoda ekvivalentna klasičnoj definiciji, motivisana metodom parcijalne integracije (uz $f(x) = u$, $\phi(x) = v$ i $\int udv = uv - \int vdu$). Međutim, ako se u (2.1.1) izostavi uslov neprekidnosti funkcija $f(x)$ i $g(x)$, a umjesto toga se zahtijeva da su one integrabilne ili da su njihovi kvadrati integrabilni i ako se integrali u (2.1.1) shvate kao integrali u Lebesgueovom smislu, tada se povećava klasa funkcija za koje se može uvesti pojam izvoda. Tada se kaže da je $g(x)$ slabi izvod od $f(x)$ u odnosu na $x \in \Omega$.

Ako se uvedu oznake $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ za multiindeks $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ i

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n},$$

može se dati opšta definicija slabog izvoda.

Definicija 2.1.21. *Kaže se da $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ima slabi izvod reda α, $|\alpha| \le m$, označen sa $\partial^\alpha f$, ako postoji funkcija $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ takva da za svako $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ važi*

$$\int_\Omega f(x) \partial^\alpha \phi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g(x) \phi(x)\, dx. \tag{2.1.2}$$

Funkcija g se zove slabi izvod reda α od f.

Definicija 2.1.22. *Neka je $m \in \mathbb{N}_0$, $p \ge 1$ i Ω otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Neka je $W^m(\Omega)$ vektorski prostor lokalno integrabilnih funkcija nad Ω koje posjeduju sve slabe izvode zaključno do reda m. Prostor Soboljeva $H^{m,p}(\Omega)$ je skup funkcija $u \in W^m(\Omega)$, takvih da za svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \le m$, važi $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$. Norma u tom prostoru je data sa*

$$\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega |\partial^\alpha u(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Posebno interesantan slučaj se dobija kada je $m = 1$ i $p = 2$. Može se pokazati da tada prostor $H^1(\Omega) = H^{1,2}(\Omega)$ posjeduje skalarni proizvod koji je saglasan sa njegovom normom, i dat je sa

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega u(x) v(x)\, dx + \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx,$$

pri čemu su sa $\nabla u(x)$ i $\nabla v(x)$ označeni gradijenti[6] funkcija $u(x)$ i $v(x)$, respektivno. Norma indukovana datim unutrašnjim proizvodom je

$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{\int_\Omega |u(x)|^2\, dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx} = \sqrt{\|u\|^2_{L^2} + \|\nabla u\|^2_{L^2}}.$$

Sa aspekta digitalne obrade slike važna karakteristika Soboljevljevih prostora je da je gradijent funkcije iz prostora Soboljeva i dalje funkcija iz $L^p(\Omega)$. Sa druge strane, u problemima obrade slike gradijent funkcije nosi važnu informaciju o granicama objekata sa slike, pa je samim tim poželjno da gradijent funkcije predstavlja konačnu mjeru. Zbog toga će u nastavku biti predstavljen prostor funkcija ograničene varijacije, koji na izvjestan način predstavlja proširenje Soboljevljevih prostora.

[6]Gradijent neke funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definiše se kao vektor čije su komponente parcijalne derivacije funkcije f, odnosno $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.

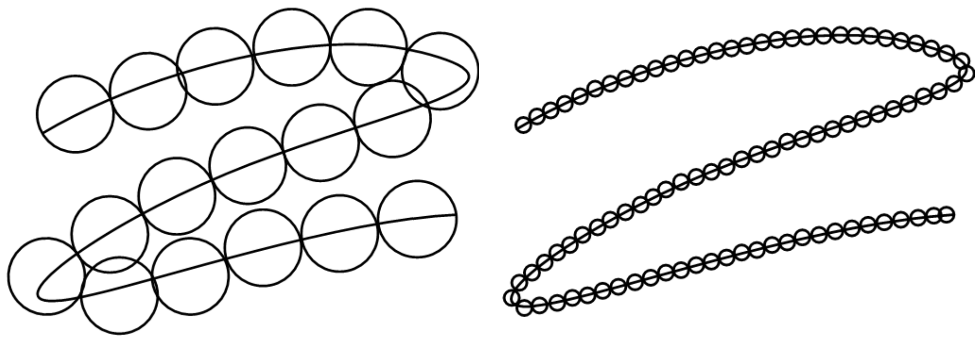
2.1.2.5 Hausdorffova mjera

Smisao Hausdorffove mjere je da se definiše mjera na $\mathbb{R}^n$ koja će pridruživati razumnu notaciju kao što su npr. dužina i površina skupovima određenih dimenzija. Na primjer, ako se želi uvesti termin dužine za proizvoljan skup $E \subset \mathbb{R}^n$, korišćenjem definicije Lebesgueove mjere 2.1.16 dužina se može definisati kao

$$\lambda(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam} A_i : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}.$$

Međutim, ako se uzme da je $n = 2$ i $E = \{(t, \sin(1/t)) : 0 \leq t \leq 1\}$, lako se uočava da je $\lambda(E) < \infty$ iako bi trebalo da je dužina skupa E beskonačna. Problem sa ovom definicijom je u tome što se skupovima koji aproksimiraju krivu ne postavlja uslov da prate geometriju krive.

Neka je U_i proizvoljan neprazan podskup $\mathbb{R}^n$ i neka je sa $|U_i|$ označen dijametar skupa U_i. Neka je sada $\{U_i\}$ prebrojiva ili konačna familija skupova dijametra ne većeg od δ koja pokriva neki skup F (F je podskup unije skupova iz te familije). Kaže se da je familija $\{U_i\}$ δ-pokrivač skupa F. Za $\delta > 0$ i $s \geq 0$ definiše se veličina $\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf \{\sum |U_i|^s : \{U_i\}$ je δ pokrivač od $F\}$. Jasno je da ako δ raste $\mathcal{H}^s_\delta(F)$ opada (dozvoljen je veći broj familija skupova, što čini infimum manjim), pogledati sliku 2.1. Puštajući da $\delta \to 0$ dobija se s-dimenzionalna Hausdorffova mjera skupa F, odnosno $\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(\mathrm{F})$.



(a) (b)

Slika 2.1: *Hausdorffova mjera. Na slici se vidi da se sa manjim δ postiže bolje pokrivanje dijela krive sa većom krivinom, dok $\mathcal{H}^s_\delta(F)$ u tom slučaju raste. U graničnom slučaju kada $\delta \to 0$ Hausdorffova mjera jednaka je dužini krive*

Nula-dimenzionalna Hausdorffova mjera jednaka je broju elemenata nekog skupa ako je skup konačan. Jednodimenzionalna mjera krive u $\mathbb{R}^n$ jednaka je dužini te krive. Slično tome, dvodimenzionalna Hausdorffova mjera mjerljivog podskupa od $\mathbb{R}^2$ je proporcionalna površini toga skupa.

2.1.2.6 Funkcije ograničene varijacije

U većini problema koji se javljaju u obradi slike diskontinuiteti na slikama igraju važnu ulogu u njihovom rješavanju. Upravo prilikom matematičkog opisivanja problema, potrebno je sliku definisati u prostoru funkcija koji obuhvata i funkcije sa prekidima. Soboljevljevi prostori nisu pogodni za tu primjenu jer je gradijent funkcije iz tog prostora i dalje funkcija. U tački gdje u ima prekid, gradijent od u se mora shvatiti kao mjera. Upravo je prostor funkcija ograničene varijacije $BV(\Omega)$ (*eng.* Bounded Variation) dobro prilagođen za ovu primjenu.

Definicija 2.1.23. *Neka je $(\Omega, \mathcal{A})$ mjerljiv prostor. Ako σ-aditivna funkcija skupa ν definisana na $\mathcal{A}$ uzima vrijednosti sa intervala $(-\infty, +\infty)$, tada se kaže da je ν realna mjera na $\mathcal{A}$.*

Definicija 2.1.24. *Neka je ν realna mjera na $(\Omega, \mathcal{A})$. Funkcija skupa $|\nu|$ definisana na $\mathcal{A}$ sa*

$$|\nu|(A) = \sup_{A_m} \sum_{m=1}^{\infty} |\nu(A_m)| \qquad (A \in \mathcal{A}),$$

gdje se supremum uzima preko svih razlaganja skupa A na skupove $A_m \in \mathcal{A}$, $m = 1, 2, \ldots$ (tj. $A = \cup_{m=1}^{\infty} A_m$ i $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$), naziva se totalna varijacija mjere ν. Specijalno, ako je ν konačna pozitivna mjera μ, njena totalna varijacija $|\mu|$ je jednaka μ ($|\mu| = \mu$) jer je tada

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\mu(A_m)| = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m) = \mu(A),$$

pa je

$$|\mu(A)| = \mu(A) \text{ za svako } A \in \mathcal{A}.$$

Pokazuje se da je totalna varijacija $|\nu|$ realne mjere ν na $(\Omega, \mathcal{A})$ konačna pozitivna mjera na $(\Omega, \mathcal{A})$.

Neka je Ω ograničen podskup od $\mathbb{R}^n$ i neka je u funkcija iz $L^1(\Omega)$. Totalna varijacija funkcije u definiše se kao

$$TV[u] = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \phi \, dx : \phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n) \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)^n, |\phi|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\},$$

gdje je $\operatorname{div} \phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}(x)$, dx je Lebesgueova mjera, $\mathcal{C}_0^1(\Omega)^n$ je prostor neprekidno diferencijabilnih funkcija sa kompaktnim nosačem u Ω i

$$|\phi|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_x \sqrt{\sum_i \phi_i^2(x)}.$$

Na primjer, ako je $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, onda $\int_\Omega u \operatorname{div} \phi \, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \phi \, dx$ i $TV[u] = \int_\Omega |\nabla u(x)| dx$. Očigledno je da se sa $TV[u]$ želi predstaviti mjera fluktuacije funkcije u u oblasti u kojoj je definisana. Sa aspekta obrade slike, ovom mjerom se može dati veza između integrala modula gradijenta slike i njenog informacionog sadržaja.

Definicija 2.1.25. *Prostor funkcija ograničenih varijacija $BV(\Omega)$ definiše se sa*

$$BV(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega) : TV[u] < \infty \right\}.$$

Može se pokazati (npr. pogledati u [3] ili [4]) da je $BV(\Omega)$ normirani linearni prostor. Norma se u tom prostoru definiše sa

$$\|u\|_{BV} = \|u\|_{L^1} + TV[u].$$

Takođe, može se pokazati da je $BV(\Omega)$ i Banachov prostor.

Može se pokazati (npr. u [3]) da ako je $u \in BV(\Omega)$, tada je slabi izvod Du funkcije u u stvari Radonova mjera i $TV[u]$ je jednaka njenoj totalnoj varijaciji $|Du|(\Omega)$. Takođe, uzimajući u obzir prethodno date definicije integrala i totalne varijacije mjere, ima se da je $TV[u] = |Du|(\Omega) = \int_\Omega |Du|$.

Važan primjer funkcije ograničene varijacije je karakteristična funkcija $u = \chi_A$ skupa $A \subset \mathbb{R}^n$ definisana sa

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & : \text{ ako } \quad x \in A \\ 0 & : \text{ ako } \quad x \notin A \end{cases}.$$

Broj $|D\chi_A|(\Omega)$ naziva se perimetar skupa A u Ω i označava se sa $P(A, \Omega)$ [5]. Na primjeru diska $\mathcal{D}(x, y, r) \in \mathbb{R}^2$ radijusa $r > 0$ prema definiciji se dobija

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |D\chi_{\mathcal{D}}| &= \sup_{\mathbf{g} \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^2)} \int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \mathbf{g} \, dxdy \\ &= \sup_{\mathbf{g} \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^2)} \int_{\partial(\mathcal{D})} \mathbf{g} \cdot \mathbf{N} \, d\mathcal{H}^1 \\ &\leq \int_{\partial(\mathcal{D})} d\mathcal{H}^1, \end{aligned}$$

gdje je $\mathbf{N}$ normala na granicu skupa. Izborom $\mathbf{g} \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^2)$, tako da je $\mathbf{g} = \mathbf{N}$ dobija se

$$\int_{\mathbb{R}^2} |D\chi_{\mathcal{D}}| = 2\pi r.$$

Posljednja jednakost pokazuje da je karakteristična funkcija u stvari funkcija ograničene varijacije. Ova činjenica će biti iskorišćena u dokazu postojanja minimuma Chan-Veseovog nivo-skup funkcionala za segmentaciju slike koji je dat u poglavlju 4.5.2. U navedenom primjeru je iskorišćena Greenova teorema o vezi između dvojnog i krivolinijskog integrala [6].

Definicija 2.1.26. *Neka je μ pozitivna mjera na σ-algebri $\mathcal{A}$ i neka je ν proizvoljna (realna ili pozitivna) mjera na $\mathcal{A}$. Mjera ν je apsolutno neprekidna u odnosu na mjeru μ ako za svako $A \in \mathcal{A}$ iz $\mu(A) = 0$ slijedi $\nu(A) = 0$. Piše se $\mu \ll \nu$.*
Neka su μ i ν mjere na $(\Omega, \mathcal{A})$. Mjera μ je singularna u odnosu na mjeru ν ako postoje skupovi $A, B \in \mathcal{A}$ takvi da je $A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \emptyset$ i $\mu(A) = 0$, $\nu(B) = 0$. Piše se $\mu \perp \nu$. Jasno je da je tada i mjera ν singularna u odnosu na mjeru μ pa se kaže da su tada mjere μ i ν uzajamno singularne.

Definicija 2.1.27. *Neka su μ i ν Radonove mjere na $\mathbb{R}^n$ i neka je $B(x,r)$ lopta sa centrom u tački $x \in \mathbb{R}^n$ radijusa r. Za svaku tačku x definišu se*

$$\Delta(x,r) = \begin{cases} \frac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} & : \text{ ako je } \mu(B(x,r)) > 0, \\ +\infty & : \text{ ako je } \mu(B(x,r)) = 0, \end{cases}$$

i

$$\overline{D}_\mu \nu(x) = \limsup_{r \to 0} \Delta(x,r), \quad \underline{D}_\mu \nu(x) = \liminf_{r \to 0} \Delta(x,r).$$

Ako je $\overline{D}_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x) < \infty$, kaže se da mjera ν ima izvod $D_\mu \nu(x)$ u odnosu na mjeru μ u tački x i taj izvod je jednak

$$D_\mu \nu(x) = \overline{D}_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x).$$

U literaturi se izvod $D_\mu \nu(x)$ još naziva i gustina mjere ν u odnosu na μ.

Za dalje izlaganje važna je sljedeća teorema, koja će biti navedena bez dokaza (za dokaz pogledati npr. u [3]).

Teorema 2.1.28 (Lebesgueova dekompozicija)**.** *Neka su ν, μ Radonove mjere na $\mathbb{R}^n$.*

(a) Tada je $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$, gdje su ν_{ac}, ν_s Radonove mjere na $\mathbb{R}^n$ i $\nu_{ac} \ll \mu$ i $\nu_s \perp \mu$.

(b) Dalje, $D_\mu \nu = D_\mu \nu_{ac}$ i $D_\mu \nu_s = 0$ i kao posljedica slijedi da je

$$\nu(A) = \int_A D_\mu \nu \, d\mu + \nu_s(A)$$

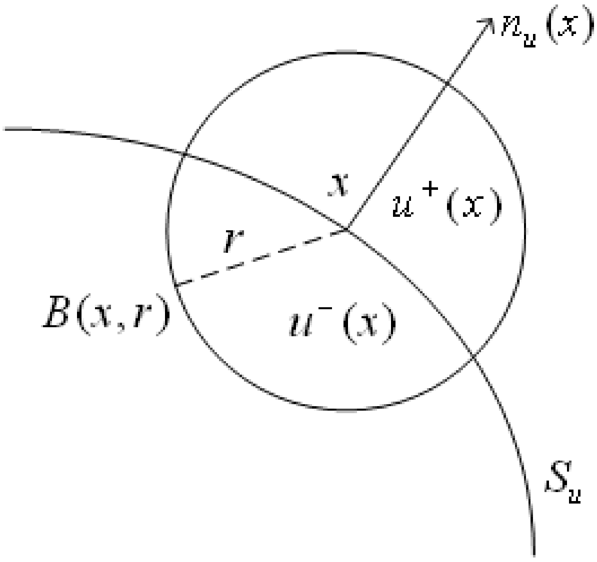
za svaki Borelov skup $A \subset \mathbb{R}^n$.

Pri tome se ν_{ac} naziva apsolutno neprekidni dio, a ν_s singularni dio mjere ν u odnosu na μ.

Teorema Calderon-Zygmunda kaže da je svaka funkcija $u \in BV(\Omega)^m$ približno diferencijabilna skoro svuda u Ω u odnosu na mjeru $\mathcal{L}^n$. Takođe, približni izvod ∇u predstavlja gustinu apsolutno neprekidnog dijela Du u odnosu na mjeru $\mathcal{L}^n$. Teorema, njen dokaz i definicija približnog izvoda se mogu pogledati u [4]. Kao direktna posljedica teoreme 2.1.28 i teoreme Calderon-Zygmunda, uz oznake $\mu = dx$ i $\nu = Du$, slijedi relacija

$$Du = \nabla u \, dx + D_s u.$$

Kao što je već rečeno, u matematičkoj analizi za funkcije koje se razlikuju samo na skupu Lebesgueove mjere nula kaže se da su jednake. Ako funkcija $u(x,y)$ predstavlja sliku, njeno ponašanje na bilo kojem skupu dvodimenzionalne mjere nula je zanemarljivo. Međutim, ako se uzme u obzir da su ivice objekata na slici u stvari linije čija je dvodimenzionalna mjera (površina) nula, jasno je da se moraju uvesti novi pojmovi kojima se prevazilazi taj problem. U [4] je pokazano da se singularni dio $D_s u$ mjere Du može razložiti na „skokoviti” dio J_u i na „Cantorov” dio C_u. Prije nego se pokaže šta J_u u stvari predstavlja, mora se definisati približna granica funkcije. Neka je $B(x,r)$ lopta sa



Slika 2.2: *Definicija* u^+, u^- *i skok skupa* S_u.

centrom u tački x i radijusa r i neka je $u \in BV(\Omega)$. Približna gornja granica $u^+(x)$ i približna donja granica $u^-(x)$ se definišu kao (pogledati sliku 2.2)

$$u^+(x) = \inf\left\{t \in [-\infty, +\infty] : \lim_{r\to 0} \frac{dx(\{u > t\} \cap B(x,r))}{r^n} = 0\right\},$$
$$u^-(x) = \sup\left\{t \in [-\infty, +\infty] : \lim_{r\to 0} \frac{dx(\{u < t\} \cap B(x,r))}{r^n} = 0\right\}.$$

Ako je $u \in L^1(\Omega)$, tada je skoro svuda

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |u(x) - u(y)|\, dy = 0. \tag{2.1.3}$$

Tačka x za koju važi jednačina (2.1.3) naziva se Lebesgueova tačka od u. Iz (2.1.3) slijedi da je

$$u(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y)\, dy,$$

i $u(x) = u^+(x) = u^-(x)$. Sa S_u se označava skup skokova, odnosno, komplement (do skupa $\mathcal{H}^{n-1}$ mjere nula) skupa Lebesgueovih tačaka

$$S_u = \{x \in \Omega : u^-(x) < u^+(x)\}.$$

Skup skokova S_u je prebrojivo rektifabilan[7] i na njemu se može definisati normala $n_u(x)$. Sa svim navedenim, rezultat dobijen u [4] može se pisati kao

$$Du = \nabla u\, dx + (u^+ - u^-) n_u \mathcal{H}^{n-1}_{|S_u} + C_u, \tag{2.1.4}$$

[7]Skup je rektifabilan ako postoji prebrojiva familija $\{\Gamma_i\}$ grafova Lipschitzovih funkcija sa $(n-1)$ varijablom tako da je $\mathcal{H}^{n-1}(S_u \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i) = 0$.

gdje je $J_u = (u^+ - u^-)n_u \mathcal{H}^{n-1}_{|S_u}$ skokoviti dio, a C_u Cantorov dio mjere $D_s u$. Iz jednačine (2.1.4) se može izvesti totalna varijacija mjere Du kao

$$|Du|(\Omega) = \int_\Omega |Du| = \int_\Omega |\nabla u|(x)\, dx + \int_{S_u} |u^+ - u^-|\, d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\Omega - S_u} |C_u|. \tag{2.1.5}$$

Funkcija iz $BV(\Omega)$ za koje je Cantorov dio jednak nuli naziva se specijalna funkcija ograničene varijacije i skup svih takvih funkcija označava se sa $SBV(\Omega)$.

U sljedećoj glavi će biti predstavljen tzv. Mumford-Shahov funkcional, na kojem se bazira i metoda segmentacije slike predstavljen u ovom radu. Rješenje problema segmentacije slike se ogleda u minimizaciji tog funkcionala. Postupak rješavanja se sastoji prvo od pronalaženja slabog rješenja, a zatim se koriste određene teoreme da bi se pokazalo da je to rješenje eventualno klasično rješenje. U ovom radu pretpostavlja se da je slika funkcija iz $SBV(\Omega)$ prostora funkcija, a sljedeća teorema je od fundamentalnog značaja za direktnu metodu varijacionog računa i pokazuje da Mumford-Shahov funkcional ima slabo rješenje u $SBV(\Omega)$ prostoru funkcija.

Teorema 2.1.29 (Kompaktnost u SBV). *Neka je (u_n) niz funkcija iz $SBV(\Omega)$ takav da je*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left[\|u_n\|_{L^\infty} + \int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\, dx + \mathcal{H}^{n-1}(S_{u_n}) \right] < \infty,$$

pri čemu je $\phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ funkcija za koju važi $\lim_{t\to\infty} \frac{\phi(t)}{t} = \infty$. Tada postoji podniz $(u_{h(n)})$ i funkcija $u \in L^\infty(\Omega) \cap SBV(\Omega)$ takva da važi

(a) $u_{h(n)} \to u$ *skoro svuda u* Ω,

(b) $\nabla u_{h(n)}$ *slabo konverigra ka* ∇u *iz* $L^1(\Omega)$,

(c) $\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \phi(|\nabla u_{h(n)}|)\, dx$,

(d) $\mathcal{H}^{n-1}(S_u) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{H}^{n-1}(S_{u_{h(n)}})$.

2.2 Osnove varijacionog računa

2.2.0.7 Opšti model problema

Opšti model koji se razmatra u teoriji varijacionog računa je sljedeći: naći $\overline{u} \in X$ tako da je

$$I(\overline{u}) = \inf_{u\in X} I(u), \tag{2.2.1}$$

gdje je

- $I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$,
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ je ograničen otvoren skup, $x = (x_1, \ldots, x_n)$,

- $u : \Omega \to \mathbb{R}^N, \quad N \geq 1, \quad u = (u^1, \ldots, u^N)$ i zbog toga

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{R}^{N \times n},$$

- $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N \times n} \to \mathbb{R}$ je neprekidna i
- X je odgovarajući prostor funkcija (na primjer $X = \{u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}),\ u = u_0 \text{ na } \partial\Omega)$.

Funkcija $\overline{u} \in X$ je rješenje problema (2.2.1) ako važi

$$I(\overline{u}) \leq I(u), \quad \forall u \in X.$$

Postoje dva načina za rješavanje ovog problema, a jednostavno ih je prikazati na primjeru minimizacionog problema u konačno-dimenzionalnom prostoru X ($X \subset \mathbb{R}^N$). Neka je $F : X \to \mathbb{R}$, potrebno je naći $\overline{x} \in X$ tako da je

$$F(\overline{x}) = \inf_{x \in X} F(x). \tag{2.2.2}$$

Prvi pristup se ogleda u pronalaženja rješenja $\overline{x} \in X$ jednačine

$$F'(x) = 0, \quad x \in X.$$

Zatim se, analizirajući ponašanje viših izvoda F, određuje da li je $\overline{x}$ minimum (globalni ili lokalni), maksimum (globalni ili lokalni) ili samo stacionarna tačka.
Drugi pristup se sastoji od analize ponašanja minimizujućeg niza $(x_\nu) \subset X$ za koji važi

$$F(x_\nu) \to \inf\{F(x) : x \in X\}.$$

Zatim se, sa odgovarajućim hipotezama o F, dokazuje da je niz kompaktan u X, odnosno da je

$$x_\nu \to \overline{x} \in X, \quad \text{kada} \quad \nu \to \infty.$$

Konačno, ako se pokaže da je F poluneprekidna odozdo, odnosno ako je

$$\liminf_{\nu \to \infty} F(x_\nu) \geq F(\overline{x})$$

slijedi da je $\overline{x}$ stvarno minimum za (2.2.2).

Slično se pristupa i problemima u varijacionom računu, ali zadatak je sada mnogo teži jer se radi u beskonačno dimenzionalnim prostorima. Prva i druga metoda se tada nazivaju, respektivno, klasična i direktna metoda varijacionog računa.

2.2.0.8 Direktna metoda varijacionog računa

Klasične metode imaju dva glavna nedostatka. Prvo, pretpostavlja se da su rješenja (2.2.1) regularna ($\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$ ili ponekad dio po dio $\mathcal{C}^1$), a to je u opštem slučaju teško ili nemoguće dokazati. Drugi i osnovni nedostatak je što se ove metode oslanjaju na postojanje rješenja određenih jednačina (Euler-Lagrangeove, Hamiltonove ili Hamilton-Jakobijeve) [7], a ta rješenja obično nije moguće naći. Glavni interes za klasične metode leži u činjenici da kada se minimizacioni proces može sprovesti do kraja, dobija se eksplicitno rješenje.

Problem koji se izučava u ovoj sekciji je sljedeći: naći $\overline{u} \in u_0 + H_0^{1,p}(\Omega)$ tako da je

$$I(\overline{u}) = \inf_u I(u), \tag{2.2.3}$$

gdje je

- $I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$,
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničen otvoren skup,
- $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f = f(x, u, \xi)$ i
- $u \in u_0 + H_0^{1,p}(\Omega)$ znači da su $u, u_0 \in H^{1,p}(\Omega)$ i $u - u_0 \in H_0^{1,p}(\Omega)$ (što otprilike znači da je $u = u_0$ na $\partial\Omega$).

Može se pokazati da problem (2.2.3) ima rješenje $\overline{u} \in u_0 + H_0^{1,p}(\Omega)$ ako su zadovoljene sljedeće dvije hipoteze:

(a) (*konveksnost*) $\xi \to f(x, u, \xi)$ je konveksna za svako $(x, u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$,

(b) (*koercitivnost*) postoje $p > q \geq 1$ i $\alpha_1 > 0, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$f(x, u, \xi) \geq \alpha_1 |\xi|^p + \alpha_2 |u|^q + \alpha_3, \quad \forall (x, u, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Osnovni nedostatak ove metode je što se postojanje minimuma dokazuje samo u Soboljevljevim prostorima[8]. Međutim uz dodatne hipoteze može se pokazati da je rješenje regularnije ($\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$ ili ponekad dio po dio $\mathcal{C}^1$) [7]. Dokaz da rješenje postoji izvodi se u dva koraka.

1. Koristeći hipotezu o koercitivnosti može se pokazati da ako je $u_\nu \in u_0 + H_0^{1,p}(\Omega)$ minimizirajući niz zadatka (2.2.3), onda je

$$I(u_\nu) \to \inf\{I(u)\} = m, \quad \text{kada } \nu \to \infty.$$

2. Hipoteza o konveksnosti implicira slabu poluneprekidnost odozdo funkcije I, odnosno

$$u_v \rightharpoonup \overline{u} \quad \text{u} \quad H^{1,p} \quad \Rightarrow \quad \liminf_{\nu \to \infty} I(u_\nu) \geq I(\overline{u}).$$

Pošto je (u_ν) minimizirajući niz, zaključuje se da je $I(\overline{u})$ minimum od (2.2.3).

Sljedeća važna teorema varijacionog računa će se često koristiti u nastavku rada. Ovdje je navedena bez dokaza (dokaz pogledati npr. u [7]).

[8]Veliki broj problema u fizici, mehanici i obradi slike zahtijeva korišćenje prostora funkcija koji dozvoljavaju da rješenje može biti i funkcija sa prekidima [5]. Njihov prvi distribucioni gradijent bi bio mjera i rješenja ovih problema ne mogu biti nađena u klasičnim Soboljevljevim prostorima. Upravo zbog toga se Soboljevljevi prostori nadopunjuju BV i SBV prostorima.

Teorema 2.2.1 (Euler-Lagrangeova jednačina)**.** *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničen otvoren skup. Neka je $p \geq 1$ i $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, i neka $f = f(x, u, \xi)$ zadovoljava za neko $\beta \geq 0$ i za svako $(x, u, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*

$$|f_u(x, u, \xi)|,\ |f_\xi(x, u, \xi)| \leq \beta \left(1 + |u|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\right),$$

gdje $f_\xi = (f_{\xi_1}, \ldots, f_{\xi_n})$, $f_{\xi_i} = \partial f / \partial \xi_i$ i $f_u = \partial f / \partial u$. Ako je $\overline{u} \in u_0 + H_0^{1,p}(\Omega)$ rješenje zadatka (2.2.3)*, gdje je $u_0 \in H^{1,p}(\Omega)$, tada $\overline{u}$ zadovoljava slabu formu Euler-Lagrangeove jednačine*

$$\int_\Omega [f_u(x, \overline{u}, \nabla \overline{u})\phi + \langle f_\xi(x, \overline{u}, \nabla \overline{u}); \nabla \phi \rangle]\ dx = 0, \quad \forall \phi \in H_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.2.4}$$

Dodatno, ako je $f \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ i $\overline{u} \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tada $\overline{u}$ zadovoljava Euler-Lagrangeovu jednačinu

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}[f_{\xi_i}(x, \overline{u}, \nabla \overline{u})] = f_u(x, \overline{u}, \nabla \overline{u}), \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{2.2.5}$$

Drugim riječima, ako je $(u, \xi) \to f(x, u, \xi)$ konveksna za svako $x \in \overline{\Omega}$ i ako je $\overline{u}$ rješenje jednačine (2.2.4) *ili* (2.2.5) *tada je $\overline{u}$ minimum* (2.2.3)*.*

Jednačina (2.2.5) može se takođe pisati i kao

$$\operatorname{div} f_\xi(x, \overline{u}, \nabla \overline{u}) = f_u(x, \overline{u}, \nabla \overline{u}), \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

3. Varijacioni račun u obradi slike

U prvom dijelu ove glave dat je matematički model degradacije slike. Uvedene oznake će se koristiti u nastavku glave prilikom davanja veze između stohastičkih i varijacionih metoda obrade slike, kao i prilikom detaljne analize Mumford-Shahovog funkcionala.

3.1 Matematički model degradacije slike

Definisanje odgovarajućeg matematičkog modela degradacije je prvi korak u procesu obrade slike. Degradacija slike može se posmatrati kao rezultat dva fenomena. Prvi je determinističke prirode i odnosi se na proces akvizicije slike i moguće efekte sistema za akviziciju, npr. zamućenje slike kao rezultat neprilagođenog sočiva ili zamućenje usljed kretanja (*eng.* motion blur). Drugi fenomen je slučajne prirode i odnosi se na šum. Neka je sa $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data idealna slika realne scene u i neka je u_0 slika te iste scene dobijena nakon akvizicije i prenosa (degradirana slika koju vidi posmatrač). Relacija između te dvije slike može se pisati kao

$$u_0(x, y) = \mathcal{H}[u(x, y)] + \eta(x, y), \tag{3.1.1}$$

gdje je $\mathcal{H}$ u opštem slučaju nelinearan operator, a $\eta(x, y)$ superponirani slučajni šum. Uz pretpostavku da je operator $\mathcal{H}$ linearan i da je impulsni odziv sistema $h(x, y)$ prostorno invarijantan, prethodna relacija može se predstaviti u integralnoj formi kao konvolucija ulaznog signala i impulsnog odziva sistema $h(x, y)$

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \iint_{\Omega'} u(x', y') h(x - x', y - y')\, dx'dy' + \eta(x, y) \\ &= u(x, y) * h(x, y) + \eta(x, y). \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Diskretni oblik jednačine (3.1.2) je dat sa

$$u_0[m, n] = u[m, n] * h[m, n] + \eta[m, n], \tag{3.1.3}$$

gdje su $m = 1 : M$ i $n = 1 : N$. Dakle, pretpostavlja se da je slika $u_0[m, n]$ matrica dimenzija $M \times N$. U matričnoj formi se posljednja jednačina može pisati kao

$$\mathbf{u_0} = \mathbf{H}\mathbf{u} + \boldsymbol{\eta}. \tag{3.1.4}$$

Prvih N elemenata vektora $\mathbf{u_0}$ čine elementi iz prve vrste matrice u_0, sljedećih N elemenata čine elementi iz druge vrste matrice u_0 itd. Vektor $\mathbf{u_0}$ ima dimenzije $MN \times 1$. Dimenzija $MN \times 1$ su i vektori $\mathbf{u}$ i $\boldsymbol{\eta}$ jer se oni dobijaju na isti način kao i vektor $\mathbf{u_0}$. Matrica $\mathbf{H}$ ima dimenzije $MN \times MN$.

3.2 Stohastičko modelovanje

Sliku u_0 kao stohastički proces moguće je posmatrati na dva načina.

1. Slika u_0 se posmatra kao kompozicija idealne slike u i nekog slučajnog procesa $\mathcal{X}$:

$$u_0 = F(u, \mathcal{X}),$$

   gdje funkcija F može biti determinističke ili stohastičke prirode. Na primjer, slika sa šumom može se opisati jednačinom $F(u, \mathcal{X}) = u + \mathcal{X}$, gdje $\mathcal{X} = n$ predstavlja Gaussov bijeli šum.

2. Slika se posmatra kao realizacija nekog statističkog ansambla. Primjer takvog pristupa je poznati rad Gemana i Gemana [8], gdje se stohastički model originalne slike zasniva na Gibsovoj distribuciji [9], a računanje maksimalne aposteriorne vjerovatnoće (*eng.* Maximum A Posteriori) originalne slike za datu ulaznu sliku zasniva se na stohastičkoj relaksaciji i kaljenju (*eng.* stochastic relaxation and annealing). Više o ovom pristupu će biti dato u nastavku.

Rekonstrukcija vektora $\mathbf{u}$ na osnovu poznatog vektora $\mathbf{u_0}$ je tipičan primjer inverznog zadatka. Jednačina (3.1.4) može se tretirati kao deterministički problem. Međutim, kako je šum $\boldsymbol{\eta}$ stohastičke prirode, pravilniji način interpretacije jednačine (3.1.4) bi bio onaj dobijen korišćenjem teorije vjerovatnoće. Potrebno je posebno izdvojiti Bayesov kriterijum odlučivanja zbog njegovog fundamentalnog značaja u daljem izlaganju.

Neka je prostor vjerovatnoća ([10]) uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ koju čine prostor elementarnih događaja Ω, skup $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ koji je σ-polje i vjerovatnoća P na $\mathcal{F}$. Svakom ishodu $\omega \in \Omega$ može se pridružiti realan broj ili numerička karakteristika $X(\omega)$, a tako dobijena funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$, za koju je poznat skup slika $X(\Omega)$, naziva se slučajna promjenljiva. Ako se jednom događaju može pridružiti više $(n, n \geq 2)$ numeričkih karakteristika, dobija se funkcija $\mathbf{X}$ koja Ω preslikava u $\mathbb{R}^n$. Funkcija $\mathbf{X} = [X_1, \ldots, X_n]^T$ sa Ω u $\mathbb{R}^n$ je n-dimenzionalna slučajna promjenljiva ili slučajan vektor ako je za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ X_i slučajna promjenljiva. Kaže se da je neki slučajni vektor $[X, Y]^T$ neprekidnog tipa ako postoji funkcija $p(x, y) \geq 0$ takva da za svaki skup $S \in \mathbb{R}^2$, koji ima površinu, važi

$$P\left\{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \in S\right\} = \iint_S p(x, y)\, dxdy. \tag{3.2.1}$$

Funkcija $p(x, y)$ je gustina raspodjele vjerovatnoća datog slučajnog vektora. Ako je poznata gustina slučajnog vektora (zajednička gustina) onda se gustine koordinata (marginalne gustine) mogu odrediti korišćenjem formula

$$p_X(x) = p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\, dy \quad \text{i} \quad p_Y(y) = p(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\, dx. \tag{3.2.2}$$

Koristeći formulu uslovne vjerovatnoće

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B) > 0,$$

lako se dobija uslovna gustina slučajne promjenljive X pri uslovu $Y = y$ kao

$$p_X(x|Y = y) = p(x|Y = y) = \frac{p(x, y)}{p(y)}. \tag{3.2.3}$$

Analogno se dobija uslovna gustina za Y pri uslovu $X = x$

$$p_Y(y|X = x) = p(y|X = x) = \frac{p(x, y)}{p(x)}. \tag{3.2.4}$$

U nastavku izlaganja će se koristiti samo slučajne promjenljive neprekidnog tipa jer će se i vrijednosti intenziteta piksela posmatrati kao neprekidne slučajne promjenljive. Neka slučajna promjenljiva x predstavlja skrivene osobine podataka koji se posmatraju (koordinate vektora $\mathbf{u}$ iz jednačine (3.1.4)) u toku mjerenja neke slučajne veličine (u procesu restauracije slike), a neka y predstavlja podatke koji se detektuju nakon završetka mjerenja (koordinate vektora $\mathbf{u_0}$ iz jednačine (3.1.4)). U trenutku prije izvođenja mjerenja neizvjesnost o ishodu mjerenja je sadržana u gustini vjerovatnoće $p(x)$, a nakon završetka mjerenja želi se unaprijediti znanje o parametru x na osnovu detektovanih karakteristika dobijenog skupa podataka $y = d$. Kombinovanjem jednačina (3.2.3) i (3.2.4) i zamjenom y sa d dolazi se do Bayesovog zakona

$$p(x|Y = d) = p(x|d) = \frac{p(d|x)p(x)}{p(d)}, \tag{3.2.5}$$

koji daje mogućnost osvježavanja znanja o mjerenim podacima[1], a u svjetlu pojave novih informacija. Funkcija $p(x|d)$ naziva se aposteriorna gustina vjerovatnoće jer se logički i vremenski dobija nakon mjerenja. Funkcija $p(x)$ naziva se apriorna gustina vjerovatnoće jer predstavlja mjeru znanja prije izvođenja mjerenja i njen izbor zavisi od domena problema, a funkcija vjerodostojnosti ili izglednosti (*eng.* likelihood) $p(d|x)$ izražava vjerovatnoću pojave podataka d za bilo koji dati x. Uz pretpostavku da su slučajne promjenljive koje reprezentuju vrijednosti piksela slike nezavisne i koristeći (3.1.4) Bayesov zakon u matričnom obliku može se pisati kao

$$p(\mathbf{u}|\mathbf{u_0}) = \frac{p(\mathbf{u_0}|\mathbf{u})p(\mathbf{u})}{p(\mathbf{u_0})}. \tag{3.2.6}$$

Postavlja se pitanje kako iskoristiti dobijenu aposteriornu vjerovatnoću $p(\mathbf{u}|\mathbf{u_0})$ u određivanju optimalne procjene ili estimacije $\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{0}$ slučajne promjenljive $\mathbf{u_0}$. Gustina $p(\mathbf{u}|\mathbf{u_0})$ može u opštem slučaju sadržavati i više informacija o $\mathbf{u_0}$ nego što je potrebno, a u procesu njene preciznije interpretacije generišu se greške koje se prilikom određivanja optimalne procjene $\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{0}$ ogledaju kao cijene (ili rizik) donošenja odgovarajućih odluka. Analizom cijena donošenja pojedinih odluka Bayesov kriterijum odlučivanja nudi optimalan način interpretacije aposteriorne vjerovatnoće $p(\mathbf{u}|\mathbf{u_0})$. Bayesov kriterijum odlučivanja kombinuje znanje o problemu koje se ima prije izvođenja mjerenja i podatke dobijene mjerenjem i dat je sa

$$\hat{\mathbf{u}} = \underset{\mathbf{u}}{\operatorname{argmax}}\, p(\mathbf{u}|\mathbf{u_0}) = \underset{\mathbf{u}}{\operatorname{argmax}} \left\{p(\mathbf{u_0}|\mathbf{u})p(\mathbf{u})\right\}. \tag{3.2.7}$$

[1]Sve što se zna o mjerenim podacima je sadržano u funkciji gustine vjerovatnoće.

Ako se prilikom određivanja procjene $\hat{\mathbf{u}}$ cijene pojedinih odluka ne uzimaju u obzir (ili se ne znaju), onda se (3.2.7) naziva kriterijum maksimalne aposteriorne vjerovatnoće ili MAP kriterijum. Ako ne postoji bilo kakvo prethodno znanje o problemu, za optimalnu procjenu slučajnog vektora $\mathbf{u}$ bi se mogao koristiti kriterijum maksimalne vjerodostojnosti ili ML kriterijum (*eng.* Maximum Likelihood)

$$\hat{\mathbf{u}} = \underset{\mathbf{u}}{\operatorname{argmax}}\, p(\mathbf{u_0}|\mathbf{u}). \tag{3.2.8}$$

Zbog tehničkih i teoretskih razloga jednostavnije je raditi sa logaritmom gustine vjerovatnoće, odnosno

$$\ln p(\mathbf{u}|\mathbf{u_0}) = \ln p(\mathbf{u_0}|\mathbf{u}) + \ln p(\mathbf{u}) - \ln p(\mathbf{u_0}). \tag{3.2.9}$$

Zadnji član ne zavisi od $\mathbf{u}$ i može se zanemariti prilikom traženja maksimuma. MAP kriterijum odlučivanja je sada dat sa

$$\left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{u_0}|\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \ln p(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right]\Bigg|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{MAP}}} = \mathbf{0}, \tag{3.2.10}$$

gdje je $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{MAP}}$ rješenje.

Uz pretpostavke da je apriorna gustina vjerovatnoće $p(\mathbf{u})$ Gaussova funkcija srednje vrijednosti $\mathbf{m}$ i varijanse $\sigma_{\mathbf{u}}^2$

$$\ln p(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2\sigma_{\mathbf{u}}^2}|\mathbf{u} - \mathbf{m}|^2 \tag{3.2.11}$$

i da je slučajni šum $\boldsymbol{\eta}$ Gaussova slučajna promjenljiva nulte srednje vrijednosti i varijanse $\sigma_{\boldsymbol{\eta}}^2$, za dato $\mathbf{u}$ varijacija vrijednosti $\mathbf{u_0}$ se javlja zbog šuma $\boldsymbol{\eta}$, odnosno, logaritam funkcije vjerodostojnosti je dat sa

$$\ln p(\mathbf{u_0}|\mathbf{u}) = -\frac{1}{2\sigma_{\boldsymbol{\eta}}^2}(\mathbf{u_0} - \mathbf{Hu})^T(\mathbf{u_0} - \mathbf{Hu}) = -\frac{1}{2\sigma_{\boldsymbol{\eta}}^2}|\mathbf{u_0} - \mathbf{Hu}|^2. \tag{3.2.12}$$

Sada se prema (3.2.10) MAP procjena dobija rješavanjem skupa linearnih jednačina

$$\frac{1}{\sigma_{\boldsymbol{\eta}}^2}\mathbf{H}^T(\mathbf{u_0} - \mathbf{Hu}) - \frac{1}{\sigma_{\mathbf{u}}^2}(\mathbf{u} - \mathbf{m}) = \mathbf{0}. \tag{3.2.13}$$

ML procjena se dobija minimizacijom (3.2.12). Nakon sređivanja se pokazuje, ako postoji $\mathbf{u}$ koje minimizuje (3.2.12), tada $\mathbf{u}$ ujedno predstavlja i rješenje jednačine

$$\mathbf{H}^T\mathbf{u_0} - \mathbf{H}^T\mathbf{Hu} = 0. \tag{3.2.14}$$

Poznato je da jednačina (3.2.14) daje i rješenje problema najmanjih kvadrata

$$\inf_u \int_\Omega |u_0 - Hu|^2\, dx. \tag{3.2.15}$$

To znači da je u slučaju Gaussovog šuma ML procjena u stvari i rješenje problema najmanjih kvadrata.

3.3 Varijacione metode

Navedeni stohastički pristup obradi slike se, gledajući sa aspekta statističke mehanike i Gibbsove formule, može smatrati i determinističkim. Da bi se opravdao takav stav korisno je dati fizičku interpretaciju jednačine (3.2.13). Svaki od dva člana jednačine (3.2.13) je linearan i svojim djelovanjem utiče na odstupanje $\mathbf{u}$ od neke vrijednosti. Logaritam apriorne gustine vjerovatnoće učestvuje u tom djelovanju tako što privlači rješenje prema srednjoj vrijednosti $\mathbf{m}$ proporcionalno razlici $\mathbf{u} - \mathbf{m}$, dok logaritam funkcije vjerodostojnosti učestvuje u ukupnom djelovanju kao sila koja privlači rješenje prema ML rješenju. U tom svjetlu, MAP procjena se može posmatrati kao problem određivanja statičke ravnoteže. Tražeći fizičku analogiju jasno je da negativni logaritam aposteriorne vjerovatnoće odgovara potencijalnoj energiji $E[\mathbf{u}|\mathbf{u_0}] = -\ln p(\mathbf{u}|\mathbf{u_0})$, a MAP estimator je ekvivalentan minimizaciji aposteriorne energije

$$E[\mathbf{u}|\mathbf{u_0}] = E[\mathbf{u}] + E[\mathbf{u_0}|\mathbf{u}].$$

Ako $\mathbf{u}$ i $\mathbf{u_0}$ pripadaju određenim prostorima funkcija, kao što su na primjer Soboljevljevi prostori ili BV prostori, minimizacija aposteriorne energije prirodno vodi varijacionim metodama obrade slike [11].

3.3.1 Statistička mehanika i veza sa digitalnom obradom slike - Gibbsov model slike

Da bi se ukazalo na analogiju koja postoji između makroskopskog sistema sa mnogo čestica i digitalne slike sa mnogo piksela potrebno je navesti neke osnovne pojmove iz statističke mehanike.

Sistem koji je u termodinamičkoj ravnoteži prolazi kroz neprestane mikroskopske promjene i rekonfiguracije. Njegovo makroskopsko stanje dakle odgovara skupu mikroskopskih stanja, a taj skup se naziva ansambl. Statistička mehanika razmatra statističke osobine tog ansambla i u tom svjetlu interpretira makroskopska mjerenja i ponašanje sistema.

Mikrokanonski ansambl se odnosi na skup svih mogućih mikroskopskih stanja potpuno izolovanog, uravnoteženog makroskopskog sistema. Pojam ,,potpuno izolovan" implicira da su sve makroskopske osobine sistema kao što su E (Energija), V (zapremina) i n (broj čestica) konstantne. Osnovni postulat statističke mehanike kaže da su sva mikroskopska stanja takvog sistema jednako vjerovatna.

Kanonski ansambl se odnosi na sva moguća mikroskopska stanja sistema S koji je u ravnoteži sa nekim znatno većim sistemom S'. Sistem S ima mogućnost razmjene toplote sa S', ali je mehanički i hemijski izolovan. Drugim rječima sistem ima konstantnu zapreminu V, broj čestica n i temperaturu T koja je određena vanjskim sistemom S', ali energija E može da se mijenja (zbog razmjene toplote sa okolinom). Zbog toga je energija E slučajna veličina i u kvantnoj mehanici E se kvantizuje u diskretne nivoe $E_0, E_1, \ldots$ gdje svaki nivo E_m odgovara jednom mikrokanonskom ansamblu. Gibbs je u [9] dao poznati izraz za vjerovatnoću da se sistem nazlazi u stanju m (tzv. Gibbsova distribucija)

$$p_m \propto e^{-\beta E_m} \quad \text{i} \quad p_m = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_m},$$

gdje je $\beta = 1/\kappa T$ recipročna vrijednost temperature T normalizovana Boltzmannovom konstantom κ, a Z je tzv. particiona funkcija za normalizaciju vjerovatnoće

$$Z = Z_\beta = \sum_m e^{-\beta E_m}.$$

Analogno navedenom pristupu iz statističke mehanike, kada se posmatra digitalna slika sa mnogo piksela uzima se u obzir da intenzitet piksela na digitalnoj slici varira, tako da algoritam koji se zasniva na varijacionom računu uzima u obzir da te varijacije moraju spasti na minimum. Krajnjim rezultatom obrade slike smatra se slika u stanju ravnoteže, a stanje ravnoteže je i kvantitativni kriterijum za zaustavljanje algoritma. S tim u vezi neka $\mathcal{I}$ označava sve digitalne slike na Ω

$$\mathcal{I} = \{u : \Omega \to \mathbb{R}\}.$$

Formalno, sa već uvedenim oznakama na početku ove glave, to su sve $M \times N$ matrice sa realnim članovima, odnosno, $\mathcal{I} = \mathbb{R}^{M\times N}$. Kao što je već rečeno u statističkoj mehanici u označava mikroskopsko stanje ansambla čestica, a $E[u]$ označava energetski nivo tog određenog stanja.

Definicija 3.3.1 (Gibbsov model slike)**.** *Gibbsov model slike odnosi se na raspodjelu gustine vjerovatnoće $p(u)$ u prostoru slika $\mathcal{I}$ koja je data sa*

$$p(u) = p_\beta(u) = \frac{1}{Z} e^{-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E}[u]},$$

gdje su za neko konačno m,

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) \quad i \quad \mathbf{E} = (E_1[u], E_2[u], \ldots, E_m[u])$$

odgovarajući parametarski i energetski vektor, a particiona funkcija je data sa

$$Z = Z(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{u\in\mathcal{I}} e^{-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E}[u]}.$$

Svaki od $E_k[u]$ naziva se generalizovana energija, a β_k generalizovani potencijal. Primarni cilj u Gibbsovom modelovanju slike je da se na odgovarajući način odrede generalizovane energije i generalizovani potencijali. Na primjer, u radu Gemana i Gemana [8] ivice Γ objekata sa slike posmatraju se kao Markovljeva slučajna polja [12], a prema Gibbsovom modelu slike tom polju se pridružuje energija $E[\Gamma]$. Polje intenziteta piksela u modeluje se uslovnim Markovljevim slučajnim poljem $p(u|\Gamma)$, odnosno energijom $E[u|\Gamma]$. Kombinacijom prethodne dvije energije i energije koja predstavlja funkciju vjerodostojnosti $E[u_0|u]$ dobija se Gibbsova aposteriorna energija

$$E[u, \Gamma|u_0] = E[u_0|u, \Gamma] + E[u|\Gamma] + E[\Gamma]. \tag{3.3.1}$$

Dati model rješava se korišćenjem algoritama kao što su stohastička relaksacija i simulirano kaljenje [8].

3.3.2 Mumford-Shahov funkcional

Mumford-Shahov model za segmentaciju slike [13] može se posmatrati kao deterministička interpretacija, u prethodnom odjeljku ukratko opisanog, Gemanovog i Gemanovog modela. U determinističkom okruženju skup ivica Γ ima konačnu jednodimenzionalnu Hausdorffovu mjeru i u tom slučaju Gibbsova enerija $E[\Gamma]$ može se predstaviti kao

$$E[\Gamma] = \mu\mathcal{H}^1(\Gamma).$$

Sa druge strane, polje intenziteta piksela može se predstaviti kao

$$E[u|\Gamma] = \iint_{\Omega\setminus\Gamma} \phi(|\nabla u|)\, dxdy,$$

jer se pretpostavlja da slike sadrže veće regione u kojima su vrijednosti piksela približno jednake (funkcija je u tim regionima dovoljno glatka). Problem sa ovakvim izborom funkcije je što se zamućuju ivice, pa se integracija vrši na regionima koji ne obuhvataju ivice $\Omega \setminus \Gamma$. Uzimajući u obzir posljednje dvije jednačine i (3.2.15), jednačina (3.3.1) se sada može pisati kao

$$E[u,\Gamma|u_0] = \mu\mathcal{H}^1(\Gamma) + \iint_{\Omega\setminus\Gamma} \phi(|\nabla u|)\, dxdy + \lambda \iint_{\Omega} (u_0 - \mathcal{H}[u])^2\, dxdy.$$

Ako se prethodna jednačina ograniči na najuobičajeniji izbor

$$\phi(p) = p^2 \quad \text{i} \quad \mathcal{H}[p] = p,$$

dobija se poznati model za segmentaciju slike, tzv. Mumford-Shahov model

$$E_{ms}[u,\Gamma|u_0] = \mu\mathcal{H}^1(\Gamma) + \iint_{\Omega\setminus\Gamma} |\nabla u|^2\, dxdy + \lambda \iint_{\Omega} (u - u_0)^2\, dxdy. \tag{3.3.2}$$

3.3.2.1 Mumford-Shahova definicija segmentacije

Mumford i Shah u [13] sugerišu da se slika u_0 može dobro modelovati funkcijom $u(x,y)$ čije su restrikcije $u_i(x,y)$ diferencijabilne funkcije na disjunktnim regionima Ω_i koji prekrivaju Ω, pri čemu je $i \in \{1,\ldots,N\}$ ($N \in \mathbb{N}$ je broj disjunktnih regiona). Prema tome, autori u [13] definišu segmentaciju slike kao problem dekompozicije domena $\Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_N$ tako da:

1. funkcija u bude glatka unutar svakog od regiona Ω_i,
2. i da funkcija u ima prekide na ivicama $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \ldots$ između različitih regiona Ω_i.

Dio po dio glatka funkcija $u = u(x,y)$ dobija se minimizacijom Mumford-Shahovog funkcionala (3.3.2)

$$\inf_u E_{ms}(u,\Gamma) = \inf_u \left\{ \mu\mathcal{H}^1(\Gamma) + \iint_{\Omega\setminus\Gamma} |\nabla u|^2\, dxdy + \lambda \iint_{\Omega} (u - u_0)^2\, dxdy \right\}.$$

Članovi u prethodnoj jednačini imaju sljedeći smisao:

(a) prvi član zahtijeva da ivice Γ kojima se postiže optimalna segmentacija budu što je moguće kraće,

(b) drugi član zahtijeva da u ne varira previše na svakom od regiona Ω_i,

(c) treći član zahtijeva da u što bolje aproksimira u_0.

Par (u, Γ) ima interesantnu geometrijsku interpretaciju jer predstavlja tzv. crtani (*eng.* cartoon) model stvarne slike u_0. Dobijena slika u ima oštre i precizne ivice, a objekti ograničeni ivicama su glatki i bez teksture. Drugim riječima, u predstavlja idealizaciju komplikovane slike slikom koja izgleda kao da je nacrtana rukom umjetnika.

Restrikcijom $E_{ms}(u, \Gamma)$ na funkcije koje su dio po dio konstantne ($u(x, y) = c_i$ na svakom otvorenom skupu Ω_i) dobija se pojednostavljeni slučaj koji se naziva problem minimalnih particija (*eng.* minimal partition problem)

$$E_{mp}(c_1, \dots, c_N, \Gamma) = \mu \mathcal{H}^1(\Gamma) + \lambda \sum_{i=1}^{N} \iint_{\Omega_i} (u_0(x, y) - c_i)^2 \, dxdy, \qquad (3.3.3)$$

gdje su

$$c_i = \underset{\Omega_i}{\text{mean}}(u_0) = \frac{\iint_{\Omega_i} u_0(x, y) dxdy}{\text{area}(\Omega_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

srednje vrijednosti intenziteta piksela unutar svakog od regiona Ω_i.

4. Nivo-skup metode za segmentaciju slike

U mnogim fizičkim pojavama postoji potreba za praćenjem propagacije frontova (interfejsa u dvodimenzionalnom polju ili površi u trodimenzionalnom polju). Na primjer, propagacija plamena i rast kristala predstavljaju propagaciju fronta duž normalnog vektorskog polja sa funkcijom brzine koja zavisi od lokalne zakrivljenosti fronta. Nivo-skup metoda (*eng.* level-set method) je numerička tehnika za praćenje propagacije interfejsa ili površi. Ova metoda prvi put je predstavljena u radu Oshera i Sethiana [14] i od tada je našla primjenu u mnogim naučnim disciplinama, pa i u digitalnoj obradi slike.

4.1 Nivo-skup metoda

4.1.1 Implicitne funkcije i krive

Interfejs u n-dimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^n$ ima dimenziju $n-1$. Tačke koje pripadaju interfejsu mogu se predstaviti funkcijom eksplicitno (npr. parametarska reprezentacija krive u $\mathbb{R}^2$) ili implicitno gdje su tačke interfejsa u stvari nivo-linija neke funkcije. Na Slici 4.1 je prikazana nulta nivo-linija funkcije $\phi(x, y) = y - x^2 + 1$.

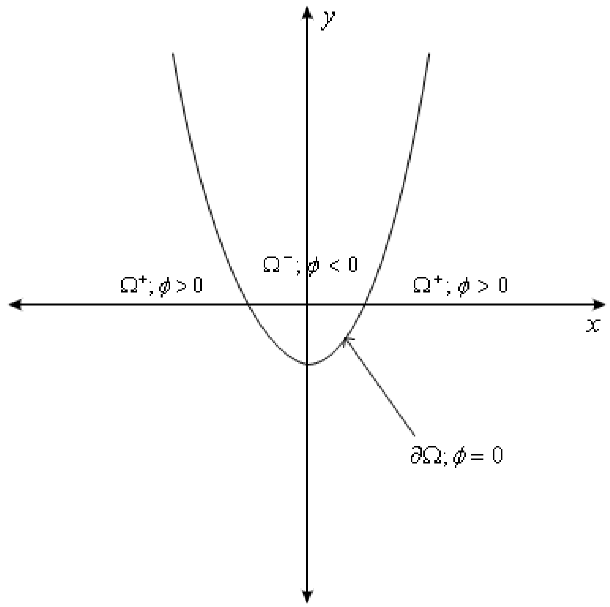
U ovom radu od interesa su krive definisane nultom nivo-linijom funkcije $\phi(\mathbf{x}) = \phi(x, y)$ koje dijele oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ na više podoblasti. Takođe, od interesa su samo zatvorene krive ili konture koje imaju jasno definisane unutrašnje i vanjske regione Ω^- i Ω^+, respektivno. Kako je interfejs definisan nultom nivo-linijom funkcije $\phi(\mathbf{x})$, određivanje da li se neka tačka nalazi unutar ili van konture svodi se na određivanje znaka funkcije $\phi(\mathbf{x})$ u toj tački. Ako je $\mathbf{x_0}$ tačka unutar interfejsa onda je $\phi(\mathbf{x_0}) < 0$, ako je van interfejsa $\phi(\mathbf{x_0}) > 0$, a ako je $\mathbf{x_0}$ tačka na samom interfejsu onda je $\phi(\mathbf{x_0}) = 0$.

Gradijent funkcije $\phi(x, y)$ je definisan sa

$$\nabla\phi(x, y) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right). \tag{4.1.1}$$

Gradijent $\nabla\phi$ je ortogonalan na nivo-linije od ϕ i ima smjer rasta ϕ. Ako je $\mathbf{x_0}$ tačka na nultoj nivo-liniji od ϕ, tada je $\nabla\phi(\mathbf{x_0})$ vektor normale na interfejs. To znači da se jedinični vektor normale na interfejs $\mathbf{N}$ može definisati sa

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}. \tag{4.1.2}$$



Slika 4.1: *Funkcija $\phi(x, y) = y - x^2 + 1$ definiše regione Ω^+, Ω^- i granicu $\partial\Omega$ svojom nultom nivo-linijom.*

Srednja krivina interfejsa definiše se kao divergencija normale $\mathbf{N} = (n_1, n_2)$, odnosno

$$\kappa = \nabla \cdot \mathbf{N} = \frac{\partial n_1}{\partial x} + \frac{\partial n_2}{\partial y}. \tag{4.1.3}$$

Krivinu je lakše računati direktno korišćenjem vrijednosti funkcije ϕ. Zamjenom (4.1.2) u (4.1.3) dobije se

$$\kappa = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right), \tag{4.1.4}$$

odnosno nakon sređivanja

$$\kappa = \frac{\phi_x^2 \phi_{yy} - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + \phi_y^2\phi_{xx}}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}}, \tag{4.1.5}$$

gdje su sa $\phi_x = \partial\phi/\partial x$, $\phi_y = \partial\phi/\partial y$, $\phi_{xx} = \partial^2\phi/\partial x^2$, $\phi_{yy} = \partial^2\phi/\partial y^2$ i $\phi_{xy} = \partial^2\phi/\partial x\partial y$ označeni parcijalni izvodi prvog i drugog reda.

4.1.2 Pomoćne funkcije

Sljedeće funkcije će se često koristiti u nastavku rada.

Karakteristična funkcija χ^- unutrašnjeg regiona Ω^- konture definisana je sa

$$\chi^-(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & : \text{ ako je } \phi(\mathbf{x}) \leq 0 \\ 0 & : \text{ ako je } \phi(\mathbf{x}) > 0 \end{cases}. \tag{4.1.6}$$

Analogno, karakteristična funkcija χ^+ vanjskog regiona Ω^+ konture definisana je sa

$$\chi^+(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & : \text{ ako je } \phi(\mathbf{x}) \leq 0 \\ 1 & : \text{ ako je } \phi(\mathbf{x}) > 0 \end{cases}. \tag{4.1.7}$$

Funkcije χ^- i χ^+ su funkcije višedimenzionalne varijable $\mathbf{x}$. Često je potrebno raditi sa funkcijama jednodimenzionalne varijable ϕ. Jednodimenzionalna Heavisideova funkcija definisana je sa

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & : \text{ ako je } \quad \phi \leq 0 \\ 1 & : \text{ ako je } \quad \phi > 0 \end{cases}. \tag{4.1.8}$$

Površinski integral funkcije f na unutrašnjem regionu Ω^- konture sada se može definisati kao

$$\int_{\Omega^-} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})(1 - H(\phi(\mathbf{x})))\, d\mathbf{x}. \tag{4.1.9}$$

Analogno, površinski integral funkcije f na vanjskom regionu Ω^+ konture definiše se kao

$$\int_{\Omega^+} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) H(\phi(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}. \tag{4.1.10}$$

Prema definiciji, izvod Heavisideove funkcije H u smjeru normale $\mathbf{N}$ predstavlja Diracovu delta funkciju

$$\hat{\delta}(\mathbf{x}) = \nabla H(\phi(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{N} = H'(\phi(\mathbf{x}))|\nabla\phi(\mathbf{x})|, \tag{4.1.11}$$

koja je funkcija višedimenzionalne varijable $\mathbf{x}$. U jednoj dimenziji delta funkcija je definisana kao izvod Heavisideove funkcije $\delta(\phi) = H'(\phi)$, pa se posljednja jednačina može pisati kao

$$\hat{\delta}(\mathbf{x}) = \delta(\phi(\mathbf{x}))|\nabla\phi(\mathbf{x})|. \tag{4.1.12}$$

Površinski integral funkcije f na granici $\partial\Omega$ definisan je sa

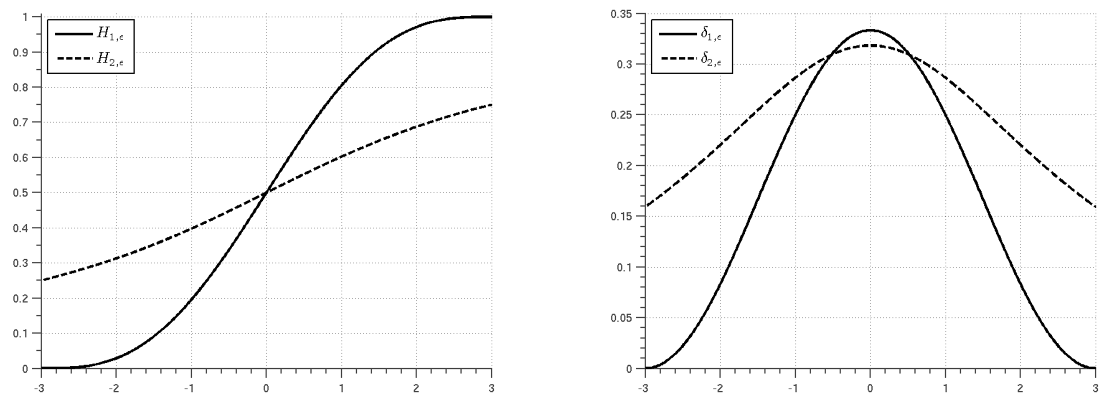
$$\int_{\partial\Omega} f(\mathbf{x})\hat{\delta}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{4.1.13}$$

ili korišćenjem jednodimenzionalne delta funkcije

$$\int_{\partial\Omega} f(\mathbf{x})\delta(\phi(\mathbf{x}))|\nabla\phi(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}. \tag{4.1.14}$$

Pošto je $\delta(\phi) = 0$ skoro svugdje, osim možda na niže-dimenzionalnom interfejsu mjere nula, malo je vjerovatno da će bilo koja standardna numerička aproksimaciona šema dati zadovoljavajuću aproksimaciju integrala (4.1.14). Zbog toga se koriste generalizovane verzije Heavisideove i Diracove delta funkcije, koje omogućavaju da se površinski integrali (4.1.9), (4.1.10) i (4.1.14) računaju koristeći standardne numeričke metode. Najčešće korišćene regularizovane verzije Heavisideove i Diracove funkcije su

$$H_{1,\epsilon}(\phi) = \begin{cases} 0 & : \quad \phi < -\epsilon \\ \frac{1}{2} + \frac{\phi}{2\epsilon} + \frac{1}{2\pi}\sin\left(\frac{\pi\phi}{\epsilon}\right) & : \quad -\epsilon \leq \phi \leq \epsilon \\ 1 & : \quad \epsilon < \phi \end{cases} \tag{4.1.15}$$



(a) (b)

Slika 4.2: *Regularizovana Heavisideova i Diracova funkcija. Na slici su prikazane dvije različite verzije regularizovane Heavisideove i Diracove funkcije sa* $\epsilon = 3$.

i

$$\delta_{1,\epsilon}(\phi) = \begin{cases} 0 & : \quad \phi < -\epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon} + \frac{1}{2\epsilon}\cos\left(\frac{\pi\phi}{\epsilon}\right) & : \quad -\epsilon \leq \phi \leq \epsilon \\ 0 & : \quad \epsilon < \phi \end{cases} \tag{4.1.16}$$

ili

$$H_{2,\epsilon}(\phi) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\phi}{\epsilon}\right)\right) \tag{4.1.17}$$

i

$$\delta_{2,\epsilon}(\phi) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\epsilon^2}{\phi^2 + \epsilon^2}. \tag{4.1.18}$$

Grafici funkcija (4.1.15), (4.1.16), odnosno (4.1.17) i (4.1.18), za $\epsilon = 3$, prikazani su na Slici 4.2. Iako $H_{1,\epsilon}(\phi)$ i $\delta_{1,\epsilon}(\phi)$ bolje aproksimiraju Heavisideovu i Diracovu funkciju, u ovom radu će se zbog boljih numeričkih rezultata koristiti verzije $H_{2,\epsilon}(\phi)$ i $\delta_{2,\epsilon}(\phi)$.

4.1.3 Funkcija rastojanja sa predznakom

U dosadašnjem izlaganju o funkciji $\phi(\mathbf{x})$, osim što je rečeno da je $\phi(\mathbf{x}) < 0$ u Ω^-, $\phi(\mathbf{x}) > 0$ u Ω^+ i $\phi(\mathbf{x}) = 0$ na granici $\partial\Omega$, nije rečeno ništa o osobinama funkcije ϕ. Naravno, da bi numeričke aproksimacije bile tačnije, poželjno je da ϕ bude glatka. Funkcija $\phi(\mathbf{x})$ koja ima navedene osobine je funkcija rastojanja sa predznakom (*eng.* signed distance function) definisana sa

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} d(\mathbf{x}) & : \quad \mathbf{x} \in \Omega^+ \\ 0 & : \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ -d(\mathbf{x}) & : \quad \mathbf{x} \in \Omega^- \end{cases}, \tag{4.1.19}$$

gdje je $d(\mathbf{x})$ funkcija rastojanja definisana sa

$$d(\mathbf{x}) = \inf_{x_I \in \partial\Omega}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I|). \tag{4.1.20}$$

Funkcija rastojanja sa predznakom ima još neke korisne osobine. Ona je diferencijabilna skoro svuda i zadovoljava tzv. jednačinu ikone (*eng.* eikonal equation) [15]

$$|\nabla\phi| = 1. \tag{4.1.21}$$

Uzimajući u obzir osobinu (4.1.21) funkcije ϕ jedinični vektor normale (4.1.2) postaje

$$\mathbf{N} = \nabla\phi, \tag{4.1.22}$$

a krivina (4.1.4) je sada

$$\kappa = \nabla \cdot (\nabla\phi) = \Delta\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy}. \tag{4.1.23}$$

Prilikom numeričke aproksimacije potrebno je obratiti pažnju na činjenicu da osobina (4.1.21) funkcije rastojanja sa predznakom nije zadovoljena za tačke koje su ekvidistantne najmanje dvjema tačkama na interfejsu. To znači da jednačine (4.1.22) i (4.1.23) važe svuda osim u tim tačkama, pa je u zavisnosti od problema koji se rješava potrebno o tome voditi računa.

4.1.4 Reinicijalizacija funkcije rastojanja sa predznakom

Prethodno su navedene prednosti korišćenja funkcije rastojanja sa predznakom kao implicitne nivo-skup funkcije ϕ. Nakon nekog vremena, kako interfejs evoluira, ϕ će dobiti otklon od inicijalizovane funkcije rastojanja sa predznakom. Da bi se obezbijedila stabilnost numeričkog iteracionog postupka, u sam postupak se, nakon određenog broja iteracionih koraka, uvodi ponovna reinicijalizacija funkcije ϕ u funkciju rastojanja sa predznakom.

U praksi ([16]) se reinicijalizacija nivo-skup funkcije ϕ vrši rješavanjem sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial t} + \mathrm{sign}(\phi_0)(|\nabla\phi| - 1) = 0, \\ \\ \phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0 = \phi(\mathbf{x}, t_0), \end{cases} \tag{4.1.24}$$

gdje je $\phi_0(\mathbf{x}, t_0)$ funkcija koja se reinicijalizuje u trenutku t_0. Kada se dobije stacionarno rješenje jednačine (4.1.24), funkcija ϕ se dalje koristi u originalnom iteracionom postupku kao nova nivo-skup funkcija.

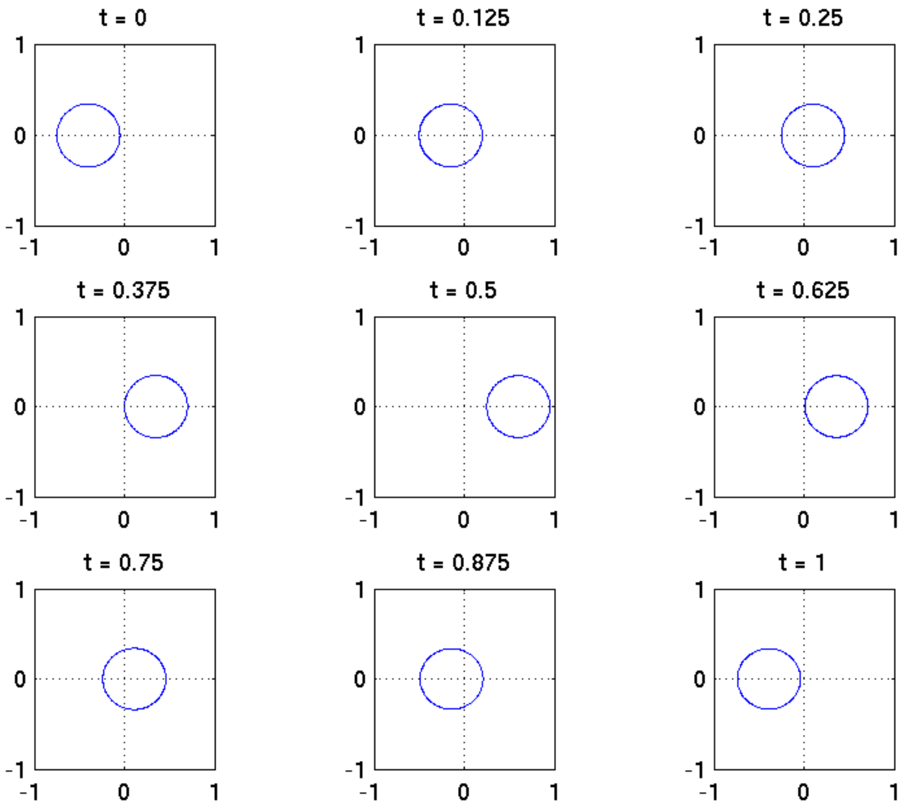
4.1.5 Jednačine propagacije interfejsa

U ovom dijelu će biti izvedene parcijalne diferencijalne jednačine koje opisuju propagaciju interfejsa. Za grafičku interpretaciju jednačina korišćene su slike iz [16].

4.1.5.1 Kretanje pod uticajem eksternog vektorskog polja

Neka je poznata brzina $\mathbf{V}$ svake tačke $\mathbf{x}$. Interfejs se pomjera pod dejstvom datog vektorskog polja $\mathbf{V}$, a to pomjeranje može se opisati običnom diferencijalnom jednačinom

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{x}). \tag{4.1.25}$$



Slika 4.3: *Kretanje interfejsa pod uticajem eksternog vektorskog polja. Kružnica se pod uticajem vektorskog polja* $\mathbf{V}$ *kreće lijevo-desno.*

Problem sa gornjom jednačinom je što se interfejs u opštem slučaju sastoji od beskonačnog broja tačaka. Da bi se problem riješio numerički, potrebno je interfejs diskretizovati sa konačnim brojem tačaka. Međutim, usljed deformacije interfejsa pod uticajem vektorskog polja brzine numeričke metode već nakon nekoliko iteracionih koraka gube tačnost. Da bi se problem riješio, potrebno je povremeno mijenjati diskretizaciju, a to onda dovodi do smanjenja numeričke efikasnosti metode.

Da bi se izvela jednačina propagacije interfejsa pod uticajem vanjskog vektorskog polja korišćenjem nivo-skup metode, interfejs se predstavlja kao nulti nivo-skup funkcije $\phi(\mathbf{x}(t), t)$, odnosno

$$\phi(\mathbf{x}(t), t) = 0. \tag{4.1.26}$$

Diferenciranjem (4.1.26) po t dobija se

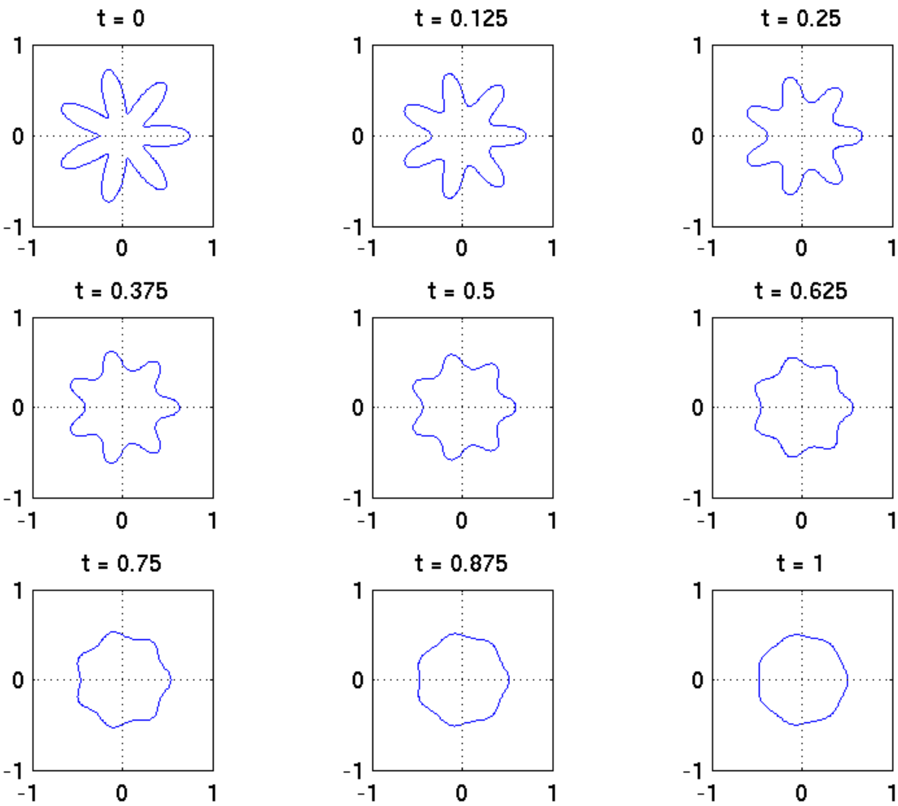
$$\phi_t + \nabla\phi(\mathbf{x}(t), t) \cdot \mathbf{x}'(t) = 0, \tag{4.1.27}$$

odnosno, kombinacijom sa (4.1.25)

$$\phi_t + \mathbf{V} \cdot \nabla\phi = 0. \tag{4.1.28}$$

Jednačina (4.1.28) se naziva nivo-skup jednačina i opisuje evoluciju implicitne funkcije ϕ u vremenu, a nulti nivo-skup funkcije ϕ predstavlja propagirajući interfejs. Ova jednačina je prvi put predstavljena u radu [14]. Grafička ilustracija je data na Slici 4.3.

4.1.5.2 Kretanje pod uticajem krivine interfejsa



Slika 4.4: *Kretanje interfejsa pod uticajem krivine interfejsa. Interfejs u obliku zvijezde mijenja oblik dok ne dostigne oblik kružnice. Vrhovi zvijezde se kreću prema centru, dok se procjepi između vrhova kreću od centra ka periferiji.*

Ovdje se pretpostavlja da vektorsko polje $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ zavisi samo od nivo-skup funkcije $\phi(\mathbf{x}, t)$, odnosno brzina kretanja interfejsa je proporcionalna zakrivljenosti interfejsa, a smjer kretanja je u smjeru jedinične normale. Tada se može pisati da je $\mathbf{V} = -b\kappa\mathbf{N}$, gdje je $b > 0$ neka konstanta, a κ krivina interfejsa. U tom slučaju tangencijalna komponenta vektora $\mathbf{V} = V_n\mathbf{N} + V_t\mathbf{T}$ je jednaka nuli, pa je nivo-skup jednačina

$$\phi_t + (V_n\mathbf{N} + V_t\mathbf{T}) \cdot \nabla\phi = \phi_t + V_n\mathbf{N} \cdot \nabla\phi = 0. \tag{4.1.29}$$

Uzimajući u obzir da je $\mathbf{N} \cdot \nabla\phi = |\nabla\phi|$ i da je $V_n = -b\kappa$, prethodna jednačina može se pisati kao

$$\phi_t = b\kappa|\nabla\phi|. \tag{4.1.30}$$

Član $b\kappa|\nabla\phi|$ u parcijalnoj diferencijalnoj jednačini (4.1.30) je parabolički, pa se mora obratiti pažnja na numeričku diskretizaciju. Jednačine tog tipa moraju se diskretizovati korišćenjem šeme centralnih razlika jer domen od kojih jednačina zavisi uključuje informacije iz svih prostornih smjerova, za razliku od hiperboličkih jednačina gdje su te informacije samo u smjeru kretanja. Grafička interpretacija kretanja pod uticajem krivine interfejsa je data na Slici 4.4.

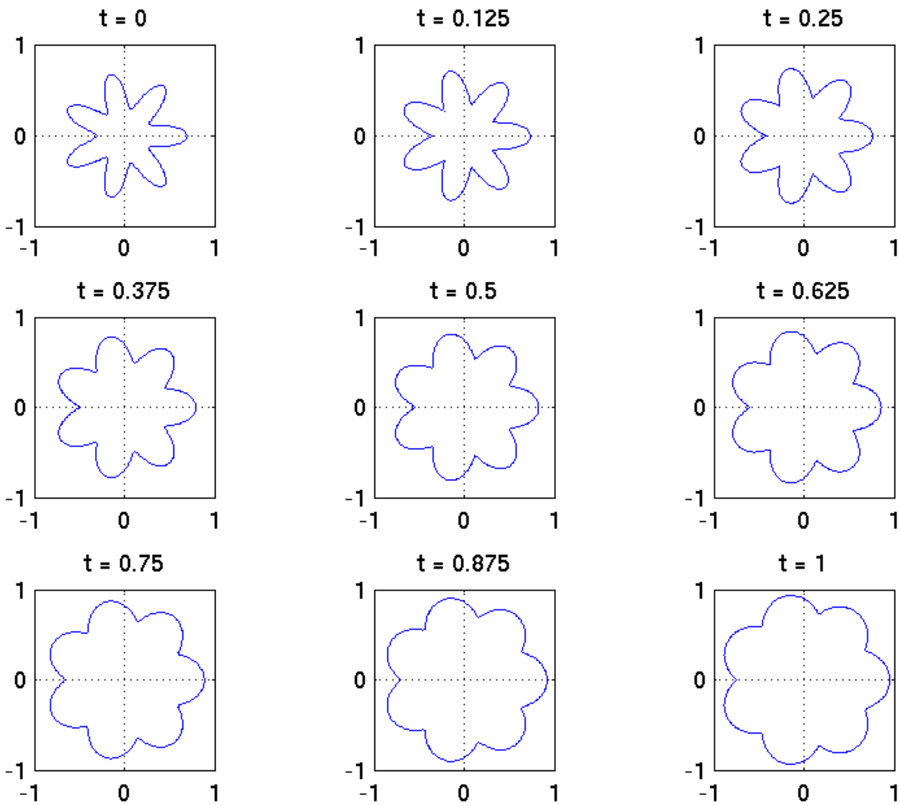
4.1.5.3 Kretanje interfejsa u smjeru jedinične normale

Polje brzine je sada definisano sa $\mathbf{V} = a\mathbf{N}$, gdje je a proizvoljna konstanta. Odgovarajuća nivo-skup jednačina je data sa

$$\phi_t + a|\nabla\phi| = 0. \tag{4.1.31}$$

Kada je $a > 0$, interfejs se kreće u smjeru jedinične normale na interfejs, a kada je $a < 0$, interfejs se kreće u smjeru suprotnom od smjera jedinične normale.

Grafička interpretacija jednačine (4.1.31) je data na Slici 4.5.



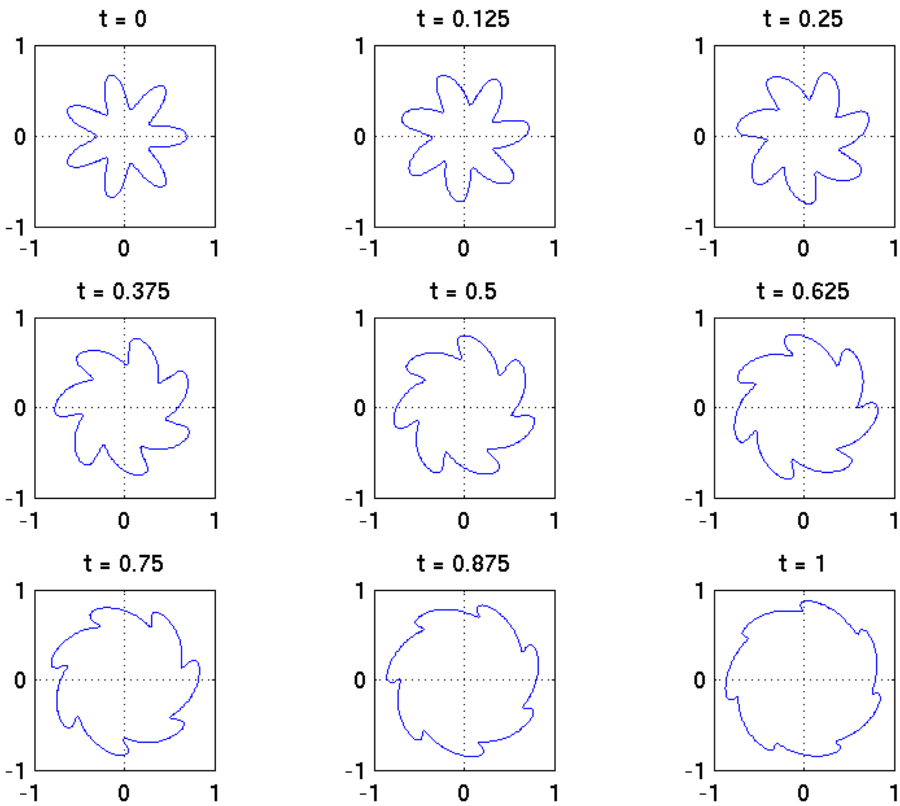
Slika 4.5: *Kretanje interfejsa u smjeru jedinične normale.*

4.1.5.4 Kombinovano kretanje

Jednačina

$$\phi_t + \mathbf{V} \cdot \nabla\phi + a|\nabla\phi| = b\kappa|\nabla\phi| \tag{4.1.32}$$

kombinuje kretanje pod uticajem eksternog vektorskog polja sa kretanjem u smjeru normale i kretanjem pod uticajem zakrivljenosti konture. Slika 4.6 prikazuje grafičku interpretaciju gornje jednačine.



Slika 4.6: *Kombinovano kretanje interfejsa kao rezultat kretanja pod uticajem eksternog vektorskog polja, kretanja u smjeru normale i kretanja pod uticajem zakrivljenosti konture.*

4.2 Segmentacija slike korišćenjem aktivnih kontura

Osnovna ideja aktivnih kontura (*eng.* active contours) zasniva se na evoluciji krive pod uticajem informacija izvedenih iz slike u_0, a sa ciljem detekcije objekata na toj slici. Ova metoda je prvi put predstavljena u radu [17] i od tada se uspješno koristi. Metoda je postavljena na sljedeći način. Slika je predstavljena funkcijom $u_0 : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gdje je Ω otvoren i ograničen skup. Skup ivica na slici (koji je konačan ili prebrojiv) se označava sa $\Gamma = \bigcup_{j \in J} C_j$. Svaka od C_j je dio po dio diferencijabilna zatvorena kriva iz $\mathbb{R}^2$. Da bi se ivice okarakterisale nultim vrijednostima funkcije (umjesto beskonačnim vrijednostima koje daje gradijent) definiše se funkcija $g : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ koja zadovoljava sljedeće uslove:

(a) g je monotono opadajuća i

(b) $g(0) = 1,\ \lim_{s \to +\infty} g(s) = 0.$

Funkcija $x \to g(|\nabla u_0(x)|)$ zove se indikator ili detektor ivica. Uobičajen izbor funkcije g je

$$g(s) = \frac{1}{1 + s^2}. \tag{4.2.1}$$

Model aktivnih kontura sastoji se od minimizacije funkcionala ([17])

$$E_1(c) = \int_a^b |c'(q)|^2 \, dq + \beta \int_a^b |c''(q)| \, dq + \lambda \int_a^b g^2(|\nabla u_0(c(q))|) \, dq, \tag{4.2.2}$$

gdje je $c \in C = \{c : [a, b] \to \Omega \ : \ c$ dio po dio $\mathcal{C}^1$, $c(a) = c(b)\}$, a β i λ su realne konstante. Prva dva člana funkcionala (4.2.2) kontrolišu glatkost konture, dok treći član privlači konturu prema ivicama objekta. Dakle, minimizacijom gornjeg funkcionala, želi se odrediti kontura u tačkama gdje je $g(|\nabla u_0|)$ minimalna, dok se istovremeno kontura želi zadržati što je moguće više glatkom. Zbog načina na koji se konture kreću prilikom minimizacije funkcionala, u literaturi se aktivne konture često nazivaju i zmije (*eng.* snakes).

Euler-Lagrangeova jednačina funkcionala (4.2.2) je sistem četvrtog reda

$$\begin{cases} -c'' + \beta c^{iv} + \lambda \nabla F(c) = 0, \\ c(a) = c(b), \end{cases} \tag{4.2.3}$$

gdje je $F(c) = g^2(|\nabla u_0(c)|)$. Može se pokazati ([11]) da ne postoji jedinstveno rješenje sistema (4.2.3). Pored toga, ovaj model ima još neke nedostatke.

- Funkcional $E_1(c)$ zavisi od parametarske reprezentacije krive c. To znači da se sa istom inicijalnom konturom mogu dobiti različiti rezultati segmentacije.
- Model nije u mogućnosti da prati promjenu topologije krive. Uz to, moguće je detektovati samo jedan objekat, pri čemu taj objekat mora biti konveksan.
- Numeričko rješavanje jednačina (4.2.3) je izuzetno teško.

4.3 Geodezijske aktivne konture

U modelu (4.2.2) član $\beta \int_a^b |c''(q)|^2 dq$ predstavlja komponentu koja umanjuje kvadrat krivine konture. Eliminacijom tog člana iz funkcionala, $\beta = 0$, dozvoljava se da kontura ima prekide druge vrste (uglove). Novi funkcional $E_2(c)$ bi tada bio definisan sa

$$E_2(c) = \int_a^b |c'(q)|^2 \, dq + \lambda \int_a^b g^2(|\nabla u_0(c(q))|) \, dq. \tag{4.3.1}$$

Funkcional E_2 još uvijek zavisi od parametrizacije krive c pa su autori u [18] predstavili kompaktniju verziju funkcionala koja ne zavisi od parametrizacije. Ovaj model se naziva geodezijske aktivne konture i kod njega je energetski funkcional definisan sa

$$E_3(c) = 2\sqrt{\lambda}\int_a^b g(|\nabla u_0(c(q))|)|c'(q)|\,dq. \tag{4.3.2}$$

U [18] su autori takođe pokazali da je minimizacija (4.3.1) ekvivalentna minimizaciji (4.3.2). Uvođenjem dodatne varijable $t \geq 0$, takve da je $c(0,q) = c(q)$, dobija se familija kontura $c(t,q)$. Može se pokazati ([11]) da je smjer u kojem $E_3(t) = E_3(c(t,q))$ najbrže opada dat sa

$$\frac{\partial c}{\partial t} = (\kappa g - \nabla g \cdot \mathbf{N})\,\mathbf{N}. \tag{4.3.3}$$

Model predstavljen u [18] može se unaprijediti dodavanjem novog člana na desnu stranu jednačine (4.3.3)

$$\frac{\partial c}{\partial t} = (\kappa g - \nabla g \cdot \mathbf{N} + \alpha g)\,\mathbf{N}. \tag{4.3.4}$$

Dodavanje novog člana se opravdava činjenicom da on olakšava detekciju objekata koji nisu konveksni i ubrzava proces konvergencije. Parametar $\alpha \geq 0$ mora biti dovoljno velik da bi koeficijent $(\kappa + \alpha)$ imao konstantan predznak u toku evolucije jednačine. Zbog toga, krivina κ može da mijenja znak, a to znači da se mogu detektovati i objekti koji nisu konveksni.

4.3.1 Nivo-skup formulacija

Ako se familija kontura $c(t,q)$ predstavi kao nulti nivo-skup funkcije $\phi(c(t,q),t)$, kombinovanjem jednačina (4.1.25) i (4.3.3) dobija se nivo-skup reprezentacija jednačine (4.3.4), odnosno

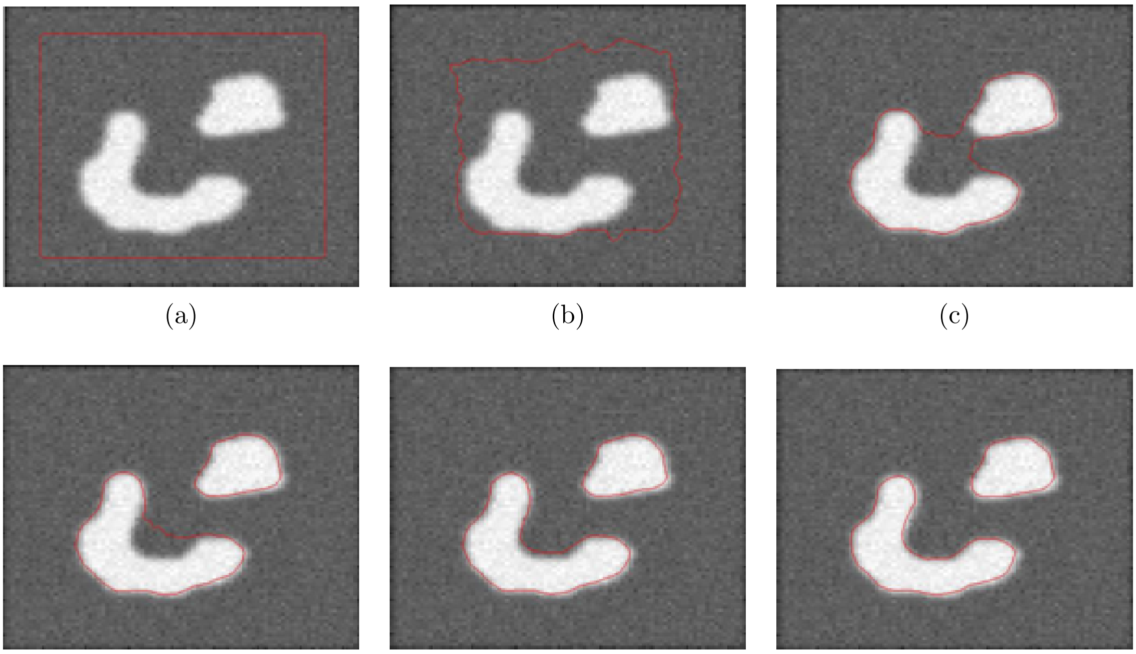
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = |\nabla\phi|(\kappa + \alpha)g(|\nabla u_0|) + \nabla g(|\nabla u_0|)\cdot\nabla\phi. \tag{4.3.5}$$

Sa prethodnom jednačinom je u stvari predstavljena propagacija konture kao rezultat kretanja pod uticajem brzine koja je proporcionalna proizvodu krivine i indikatora ivica i brzine pod dejstvom vanjskog vektorskog polja koje je određeno gradijentom indikatora ivica. Očigledno je da u ovom slučaju gradijent slike određuje položaj kontura.

4.4 Aktivne konture bez reinicijalizacije

Kao što je rečeno u prethodnom izlaganju, zbog stabilnosti numeričkog postupka potrebno je povremeno vršiti reinicijalizaciju funkcije ϕ na funkciju rastojanja sa predznakom. U radu [19] je predstavljena metoda aktivnih kontura koja ne koristi reinicijalizacioni postupak. Predložena evoluciona nivo-skup jednačina je data sa

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \mu\left[\Delta\phi - \operatorname{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)\right] - \lambda\delta(\phi)\operatorname{div}\left(g\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right) - \nu g\delta(\phi), \tag{4.4.1}$$



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

Slika 4.7: *Primjer evolucije aktivne konture. (a) Inicijalna kontura oko dva objekta. (b) Kontura nakon 50 iteracija. (c) Kontura nakon 200 iteracija. (d) Konture nakon 320 iteracija. (e) Konture nakon 380 iteracija se već nalaze na ivicama objekata i moguće je izdvojiti objekte sa slike. (f) Konture nakon 2000 iteracija - nema dalje evolucije kontura.*

gdje je $\mu > 0$ parametar koji penalizuje odsupanje ϕ od funkcije rastojanja sa predznakom, a $\lambda > 0$ i ν su realne konstante.

Na Slici 4.7 prikazan je primjer evolucije konture prema jednačini (4.4.1). Korišćeni parametri su $\mu = 0.04$, $\lambda = 5$ i $\nu = 4$. Vidi se da u slučaju kada se objekti jasno izdvajaju od pozadine funkcija za detekciju ivica već nakon 380 iteracija zauzima krajnji položaj na granicama objekata.

4.5 Chan-Veseova nivo-skup metoda

Chan-Vesova nivo-skup metoda [20] je u stvari specijalan slučaj problema minimalnih particija (3.3.3). Ovdje je energetski funkcional definisan sa

$$\begin{aligned} E_{cv}(c_1, c_2, \Gamma) = {} & \mu \cdot \mathrm{length}(\Gamma) + \nu \cdot \mathrm{area}(\Omega^-) \\ & + \lambda_1 \iint_{\Omega^-} (u_0(x,y) - c_1)^2 \, dxdy \\ & + \lambda_2 \iint_{\Omega^+} (u_0(x,y) - c_2)^2 \, dxdy, \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

gdje su

$$c_1 = \underset{\Omega^-}{\mathrm{mean}}(u_0) = \frac{\iint_{\Omega^-} u_0(x,y)dxdy}{\mathrm{area}(\Omega^-)} \quad \text{i} \quad c_2 = \underset{\Omega^+}{\mathrm{mean}}(u_0) = \frac{\iint_{\Omega^+} u_0(x,y)dxdy}{\mathrm{area}(\Omega^+)}$$

srednje vrijednosti intenziteta piksela u oblasti Ω^- unutar konture i u oblasti Ω^+ van konture, respektivno. Pozitivnim realnim konstantama λ_1 i λ_2 može se favorizovati jedan od regiona, ali u praksi one obično imaju istu vrijednost.

Za $N = 2$ i izborom konstanata $\nu = 0$ i $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ gornji funkcional postaje jednak problemu minimalnih particija (3.3.3), odnosno

$$E_{mp}(c_1, \ldots, c_N, \Gamma) = \mu \mathcal{H}^1(\Gamma) + \lambda \sum_{i=1}^{N} \iint_{\Omega_i} (u_0(x,y) - c_i)^2 \, dxdy.$$

4.5.1 Nivo-skup reprezentacija

Predstavljanjem konture kao nultog nivo-skupa implicitne funkcije ϕ, te korišćenjem jednačina (4.1.9), (4.1.10) i (4.1.14), funkcional (4.5.1) se može pisati kao

$$\begin{aligned} E_{cvls}(c_1, c_2, \phi) = \mu & \iint_{\Omega} \delta(\phi(x,y)) |\nabla \phi(x,y)| \, dxdy \\ + \nu & \iint_{\Omega} (1 - H(\phi(x,y))) \, dxdy \\ + \lambda_1 & \iint_{\Omega} (u_0(x,y) - c_1)^2 (1 - H(\phi(x,y))) \, dxdy \\ + \lambda_2 & \iint_{\Omega} (u_0(x,y) - c_2)^2 H(\phi(x,y)) \, dxdy. \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

Konstante c_1 i c_2 se takođe mogu izraziti preko implicitne funkcije ϕ kao

$$c_1(\phi) = \frac{\iint_{\Omega} u_0(x,y)(1 - H(\phi(x,y))) \, dxdy}{\iint_{\Omega} (1 - H(\phi(x,y))) \, dxdy} \tag{4.5.3}$$

i

$$c_2(\phi) = \frac{\iint_{\Omega} u_0(x,y) H(\phi(x,y)) \, dxdy}{\iint_{\Omega} H(\phi(x,y)) \, dxdy}. \tag{4.5.4}$$

4.5.2 Dokaz postojanja minimuma nivo-skup reprezentacije

Postojanje minimuma funkcionala E_{cv} je dokazano u radu Mumford-Shaha [13], ali je potrebno pokazati i da njegova nivo-skup reprezentacija ima minimum.
Prema (4.5.3) i (4.5.4), konstante c_1 i c_2 imaju eksplicitnu reprezentaciju preko nivo-skup funkcije ϕ, odnosno preko $H(\phi)$. Slijedi da se funkcional (4.5.2) može izraziti kao energija koja zavisi samo od $H(\phi)$, a koja je definisana kao

$$\mathcal{E}(H(\phi)) = E_{cvls}(c_1(\phi), c_2(\phi), \phi), \tag{4.5.5}$$

odnosno, korišćenjem funkcije (4.1.6) i uzimajući u obzir da je $\chi^- = 1 - H(\phi)$ funkcional (4.5.5) se može pisati na sljedeći način

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\chi^-) = \mu & \int_\Omega |\nabla \chi^-| \\ & + \nu \int_\Omega \chi^- \, d\mathbf{x} \\ & + \lambda_1 \int_\Omega (u_0 - c_1)^2 \chi^- \, d\mathbf{x} \\ & + \lambda_2 \int_\Omega (u_0 - c_2)^2 (1 - \chi^-) \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

Funkcional $\mathcal{E}(\chi^-)$ je dobro definisan u prostoru funkcija ograničene varijacije $BV(\Omega)$, jer je karakteristična funkcija χ^- funkcija ograničene varijacije.

Teorema 4.5.1. *Ako je $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, onda miminizacioni problem*

$$\inf_{\chi^-} \mathcal{E}(\chi^-), \quad \chi^- \in BV(\Omega), \quad \chi^- \in \{0,1\} \quad \textit{skoro svuda Lebesgue mjerljiva},$$

ima rješenje.

Dokaz. Neka je (χ_n^-) minimizujući niz od $\mathcal{E}$, odnosno neka je

$$\inf_{\chi^-} \mathcal{E}(\chi^-) = \lim_{n \to \infty} \mathcal{E}(\chi_n^-).$$

Tada za sve $n \geq 1$ postoji konstanta $M > 0$ takva da važi $|\nabla \chi_n^-|(\Omega) \leq M$[1]. Takođe važi da je $0 \leq \chi_n^- \leq 1$ u Ω, pa je $\|\chi_n^-\|_{L^1(\Omega)} \leq |\Omega|$, za sve $n \geq 1$, odnosno niz (χ_n^-) je ograničen u $BV(\Omega)$. Slično kao prema teoremi o kompaktnosti u $SBV(\Omega)$ prostoru funkcija 2.1.29 i u $BV(\Omega)$ prostoru funkcija postoji podniz $(\chi_{h(n)}^-)$ od (χ_n^-) i funkcija $u \in BV(\Omega)$ takva da $\chi_{h(n)}^- \to u$ skoro svuda u Ω. Iz toga se zaključuje da je $u = \chi^-$ svuda gdje Ω^- ima konačan perimetar u Ω i važi

$$\int_\Omega |\nabla \chi^-| \leq \liminf_{h(n) \to \infty} \int_\Omega |\nabla \chi_{h(n)}^-|.$$

Za ostale članove funkcionala se takođe dokazuje neprekidnost ili donja poluneprekidnost u $L^1(\Omega)$. Na primjer, ako je $\int_\Omega \chi^- \, d\mathbf{x} > 0$, pod uobičajenom pretpostavkom za slike da je $u_0 \in L^\infty$, svi integrali koji zavise od $\chi_{h(n)}^-$ kovergiraju odgovarajućim integralima koji zavise od χ^-. Isto važi i za podintegralnu funkciju oblika $1 - \chi^-$.
Na kraju se ima da je zbog gore pokazane osobine donje poluneprekidnosti totalne varijacije i stroge konvergencije u $L^1(\Omega)$ drugih članova zaista

$$\mathcal{E}(\chi^-) \leq \lim_{h(n) \to \infty} \mathcal{E}(\chi_{h(n)}^-),$$

odnosno, od svih karakterističnih funkcija skupova sa konačnim perimetrom u Ω, χ^- je minimum funkcionala $\mathcal{E}$.
Za više detalja o navedenom dokazu pogledati [20]. □

[1] Važna osobina $BV(\Omega)$ prostora funkcija je poluneprekidnost odozdo. Odnosno ako je $u_j \in BV(\Omega)$ i $u_j \xrightarrow[L^1(\Omega)]{} u$ slijedi da je $\int_\Omega |Du| \leq \liminf_{j \to +\infty} \int_\Omega |Du_j|$.

4.5.3 Euler-Lagrangeova jednačina

Da bi se izračunala Euler-Lagrangeova jednačina potrebno je koristiti regularizovane Heavisideovu i Diracovu delta funkciju. Regularizovane funkcije će biti označene sa H_ϵ i δ_ϵ, a njihove definicije su date jednačinama (4.1.17) i (4.1.18), respektivno. Sada je regularizovana verzija funkcionala E_{cvls} data sa

$$\begin{aligned} E_{\epsilon,cvls}(c_1,c_2,\phi) = \mu &\iint_\Omega \delta_\epsilon(\phi(x,y))|\nabla\phi(x,y)|\, dxdy \\ + \nu &\iint_\Omega (1 - H_\epsilon(\phi(x,y)))\, dxdy \\ + \lambda_1 &\iint_\Omega (u_0(x,y)-c_1)^2(1-H_\epsilon(\phi(x,y)))\, dxdy \\ + \lambda_2 &\iint_\Omega (u_0(x,y)-c_2)^2 H_\epsilon(\phi(x,y))\, dxdy, \end{aligned} \tag{4.5.7}$$

dok je minimizacioni problem dat sa

$$\inf_{c_1,c_2,\phi} E_{\epsilon,cvls}(c_1,c_2,\phi). \tag{4.5.8}$$

Za fiksno c_1 i c_2, Euler-Lagrangeova jednačina u Ω za ϕ je

$$\delta_\epsilon \left[\mu\, \mathrm{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right) + \nu + \lambda_1(u_0-c_1)^2 - \lambda_2(u_0-c_2)^2\right] = 0. \tag{4.5.9}$$

4.5.4 Numerička aproksimacija modela

Uvođenjem vještačke varijable $t > 0$, metodom najstrmijeg spuštanja traži se stacionarno rješenje parcijalne diferencijalne jednačine (4.5.9), odnosno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial t} = \delta_\epsilon \left[\mu\, \mathrm{div}\left(\dfrac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right) + \nu + \lambda_1(u_0-c_1)^2 - \lambda_2(u_0-c_2)^2\right] \text{ na } \Omega, \\ \phi(0,x,y) = \phi_0(x,y) \text{ na } \Omega, \\ \dfrac{\delta_\epsilon(\phi)}{|\nabla\phi|}\dfrac{\partial\phi}{\partial \mathbf{N}} = 0 \text{ na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.5.10}$$

gdje je $\mathbf{N}$ normala na granicu $\partial\Omega$.

Prvi korak u numeričkoj aproksimaciji modela je zamjena funkcije ϕ njenom diskretnom verzijom definisanom na diskretnom skupu tačaka, odnosno mreži (*eng.* grid). Postoji više različitih mogućnosti definisanja mreže za diskretizaciju, ali će u ovom radu biti korišćena tzv. uniformna Decartesova rešetka definisana sa $\{(x_i, y_j) : 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$, što u osnovi odgovara i reprezentaciji digitalne slike. Na uniformnoj Decartesovoj rešetki, svi podintervali $[x_i, x_{i+1}]$ su iste veličine, odnosno $\Delta x = x_{i+1} - x_i$. Isto tako $[y_j, y_{j+1}]$ su iste veličine, odnosno $\Delta y = y_{j+1} - y_j$. Naravno, zamjenom funkcije ϕ njenom diskretnom verzijom uvodi se i određena greška aproksimacije, pa da bi se osiguralo da je greška aproksimacije jednaka u x i y smjeru uzima se da je $\Delta x = \Delta y$ (jer ne postoji razlog za favorizaciju nekog od smjerova diskretizacije).

Sa tako definisanom funkcijom, sistem (4.5.10) je potrebno riješiti primjenom nekog od numeričkih metoda. U analizi slike se koristi numerička metoda konačnih razlika. Početni korak za definisanje bilo koje šeme konačnih razlika je razvoj funkcije u Taylorov red. Za dovoljno malo Δx i Δt, gdje je Δt vremenski korak, ima se (slično je i u y smjeru)

$$\phi((n+1)\Delta t, i\Delta x) = \phi_i^{n+1} = \phi_i^n + \Delta t \frac{\partial \phi_i^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \phi_i^n}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^3), \tag{4.5.11}$$

$$\phi(n\Delta t, (i+1)\Delta x) = \phi_{i+1}^{n} = \phi_i^n + \Delta x \frac{\partial \phi_i^n}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \phi_i^n}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^3), \tag{4.5.12}$$

$$\phi(n\Delta t, (i-1)\Delta x) = \phi_{i-1}^{n} = \phi_i^n - \Delta x \frac{\partial \phi_i^n}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \phi_i^n}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^3). \tag{4.5.13}$$

Iz jednačine (4.5.11) dobije se

$$\frac{\partial \phi(n\Delta t, i\Delta x)}{\partial t} = \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t). \tag{4.5.14}$$

Slično, sabiranjem jednačina (4.5.12) i (4.5.13) dobije se parcijalna derivacija drugog reda kao

$$\frac{\partial^2 \phi(n\Delta t, i\Delta x)}{\partial x^2} = \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \tag{4.5.15}$$

Jednačine (4.5.14) i (4.5.15) motivišu sljedeće numeričke šeme

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i,j}^n}{\Delta x}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_{i,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{\Delta x} \tag{4.5.16}$$

ili formulu drugog reda tačnosti

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{2\Delta x}. \tag{4.5.17}$$

Za numeričku aproksimaciju ϕ_{xx}, ϕ_{yy} i ϕ_{xy} koristi se formula konačnih razlika drugog reda tačnosti koja je za drugi izvod ϕ u smjeru x definisana sa

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \approx \frac{\phi_{i+1,j}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}. \tag{4.5.18}$$

Izbor numeričke šeme zavisi i od tipa parcijalne diferencijalne jednačine. Parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda se mogu svrstati u tri grupe: paraboličke, hiperboličke i eliptičke. Paraboličke jednačine u većini slučajeva opisuju evolucioni proces koji vodi do stacionarnog stanja opisanog eliptičkom jednačinom. Eliptičke jednačine opisuju specijalno stanje fizičkog sistema okarakterisano minimumom neke veličine (obično je to energija). Hiperboličke jednačine opisuju transport fizičkih veličina ili informacija, kao što su na primjer talasi. Svrstavanje u ove tri grupe se vrši na osnovu odnosa između koeficijenata koji stoje uz parcijalne izvode. Da bi se to pokazalo potrebno je posmatrati opšti oblik linearne parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda sa dve nezavisne varijable x i y dat sa

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \tag{4.5.19}$$

gdje su koeficijenti A, B, C, D, E, F i G funkcije od x i y ili konstante (pogledati [21]). Klasifikacija jednačina drugog reda se zasniva na mogućnosti redukcije jednačine (4.5.19) u kanonski oblik transformacijom koordinata. Posmatra se transformacija iz x, y u ξ, η definisana sa

$$\xi = \phi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \tag{4.5.20}$$

gdje ϕ i ψ imaju neprekidne izvode drugog reda i Jacobian $J(x, y) = \phi_x\psi_y - \psi_x\phi_y$ je različit od nule u domenu od interesa tako da se x i y mogu jednoznačno odrediti iz sistema (4.5.20). Tada se ima

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x,\\
u_y &= u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y,\\
u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx},\\
u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy},\\
u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi xy + u_\eta\eta_{xy}.
\end{aligned} \tag{4.5.21}$$

Zamjenom (4.5.21) u (4.5.19) dobija se

$$A^*u_{\xi\xi} + B^*u_{\xi\eta} + C^*u_{\eta\eta} + D^*u_\xi + E^*u_\eta + F^*u = G^*, \tag{4.5.22}$$

gdje su

$$\begin{aligned}
A^* &= A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2,\\
B^* &= 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y,\\
C^* &= A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2,\\
D^* &= A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y,\\
E^* &= A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y,\\
F^* &= F \quad \text{i} \quad G^* = G.
\end{aligned} \tag{4.5.23}$$

Zadatak je da se odredi ξ i η tako da jednačina (4.5.22) dobije najjednostavniji mogući oblik. Izabiru se ξ i η tako da je $A^* = C^* = 0$ i $B^* \neq 0$, odnosno

$$A^* = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0, \tag{4.5.24}$$

$$C^* = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0. \tag{4.5.25}$$

Posljednje dvije jednačine se mogu kombinovati u jednu kvadratnu jednačinu gdje ζ označava ξ ili η, odnosno

$$A\left(\frac{\zeta_x}{\zeta_y}\right)^2 + B\left(\frac{\zeta_x}{\zeta_y}\right) + C = 0. \tag{4.5.26}$$

Uzimajući da su nivo krive $\xi = \phi(x, y) = C_1$ i $\eta = \psi(x, y) = C_2$ konstantne, slijedi

$$d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy = 0, \quad d\eta = \eta_x dx + \eta_y dy = 0, \tag{4.5.27}$$

odnosno, kosina ili nagib (*eng.* slope) ovih krivih je dat sa

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x}{\xi_y}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\eta_x}{\eta_y}. \tag{4.5.28}$$

To znači da su nagibi obje nivo krive korijeni iste kvadratne jednačine dobijene iz (4.5.26) kao

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0. \tag{4.5.29}$$

Korijeni prethodne jednačine su dati sa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2A}\left(B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}\right). \tag{4.5.30}$$

Ove jednačine su poznate kao karakteristične jednačine za (4.5.19) i njihova rješenja se zovu karakteristične krive ili samo karakteristike jednačine (4.5.19). Rješenje dvije obične diferencijalne jednačine (4.5.30) definiše dvije različite familije karakteristika $\phi(x, y) = C_1$ i $\psi(x, y) = C_2$, a razlikuju se tri slučaja.

1. $B^2 - 4AC > 0$ – Za jednačine koje zadovoljavaju ovaj uslov kaže se da su hiperboličke. Integracija (4.5.30) u ovom slučaju daje dvije realne i različite familije karakteristika $\phi(x, y) = C_1$ i $\psi(x, y) = C_2$, gdje su C_1 i C_2 konstante integracije.

2. $B^2 - 4AC = 0$ – Za jednačine koje zadovoljavaju ovaj uslov kaže se da su paraboličke. Postoji samo jedna famililja realnih karakteristika čiji je nagib dat sa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A}. \tag{4.5.31}$$

3. $B^2 - 4AC < 0$ – Za jednačine koje zadovoljavaju ovaj uslov kaže se da su eliptičke. U ovom slučaju jednačine (4.5.30) nemaju realna rješenja, tako da postoje dvije familije kompleksnih karakteristika.

Korišćenjem dobijenih jednakosti početna jednačina se svodi na kanonski oblik. Tada je rješavanje (4.5.19) ekvivalentno rješavanju jednačine u kanonskom obliku duž karakteristika datih sa (4.5.30). Na primjer, za parabolički tip jednačina važi $B^2 = 4AC$ i $A^* = 0$. Slijedi da je

$$0 = A^* = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = \left(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y\right)^2. \tag{4.5.32}$$

Iz toga dalje slijedi da je i $B^* = 0$ za proizvoljno η nezavisno od ξ. Dijeljenjem (4.5.22) sa $C^* \neq 0$ dobije se kanonski oblik paraboličke jednačine kao

$$u_{\eta\eta} = H(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{4.5.33}$$

Navedena metoda za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina se naziva metoda karakteristika. Kao što je već pomenuto paraboličke jednačine su difuzionog tipa, talasne jednačine su tipičan primjer hiperboličkih jednačina, dok npr. Laplaceova jednačina pripada kategoriji eliptičkih jednačina. Na primjer,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad &: \quad \text{parabolički tip} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad &: \quad \text{hiperbolički tip} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad &: \quad \text{eliptički tip} \end{aligned} \tag{4.5.34}$$

Lako se uočava da je jednačina (4.5.10) paraboličkog tipa zbog člana krivine konture koji stoji uz μ. Paraboličke jednačine se moraju diskretizovati korišćenjem centralne šeme konačnih razlika (4.5.17) jer domen zavisnosti uključuje informacije iz svih prostornih smjerova. Može se pokazati da centralna šema konačnih razlika zahtijeva strogo ograničenje vremenskog koraka diskretizacije i u slučaju jednačine (4.5.10) to ograničenje je dato sa

$$\Delta t\left(\frac{2\mu}{(\Delta x)^2} + \frac{2\mu}{(\Delta y)^2}\right) < 1. \tag{4.5.35}$$

Ovdje je Δt reda $\mathcal{O}((\Delta x)^2)^2$.Algoritam se dakle sastoji od sljedećih koraka.

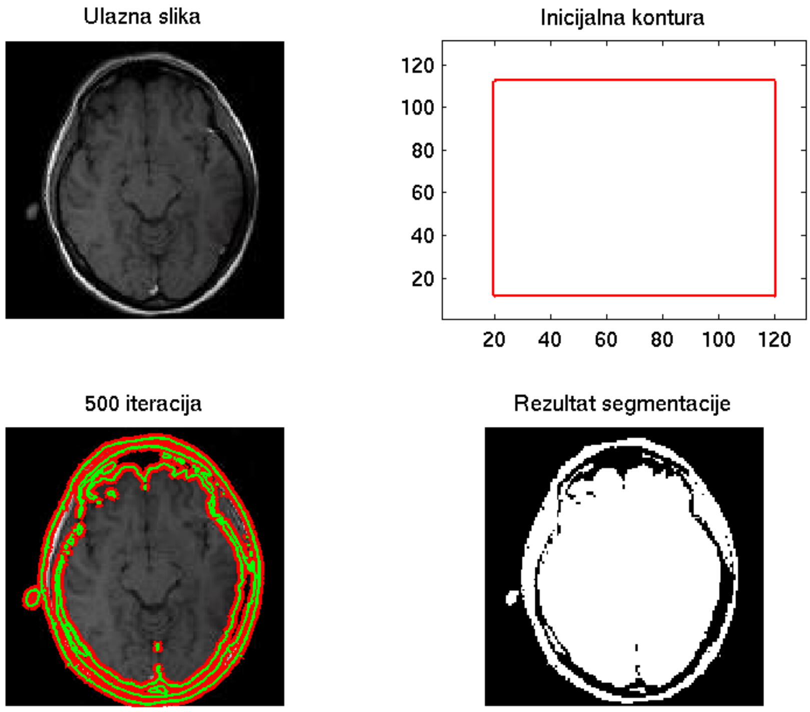
1. Prvo se za poznatu ϕ^n izračunavaju $c_1(\phi^n)$ i $c_2(\phi^n)$ korišćenjem (4.5.3) i (4.5.4).

2. Nova vrijednost ϕ^{n+1} se računa korišćenjem sljedeće diskretizovane verzije jednačine (4.5.10)

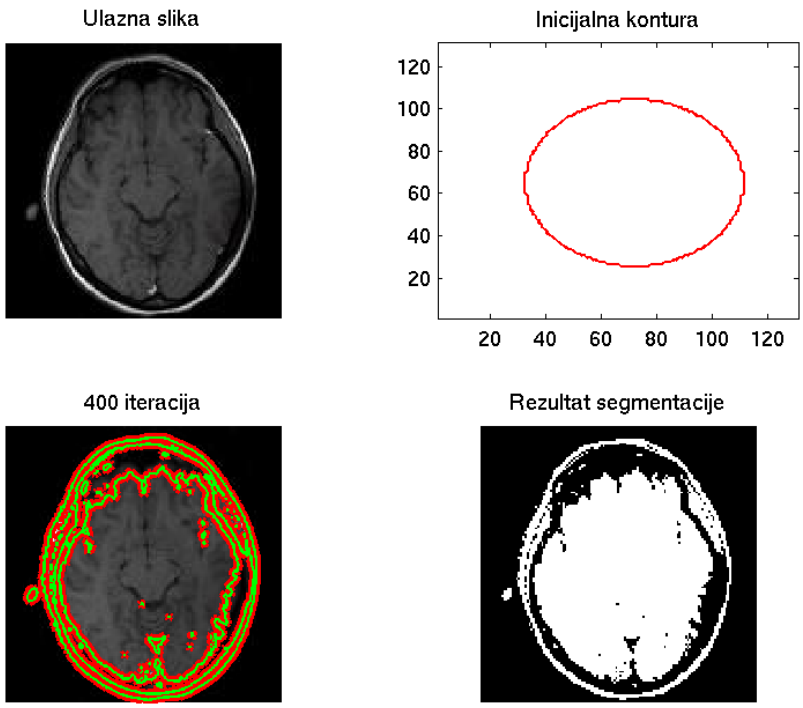
$$\begin{aligned} \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\Delta t} = \delta_h(\phi_{i,j}^n) \Bigg[& \frac{\mu}{h^2} \cdot \Delta_-^x \left(\frac{\Delta_+^x \phi_{i,j}^n}{\sqrt{(\Delta_+^x \phi_{i,j}^n)^2/(h^2) + (\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n)^2/(2h)^2}} \right) \\ & + \frac{\mu}{h^2} \cdot \Delta_-^y \left(\frac{\Delta_+^y \phi_{i,j}^n}{\sqrt{(\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n)^2/(2h)^2 + (\Delta_+^y \phi_{i,j}^n)^2/(h^2)}} \right) \\ & + \nu + \lambda_1(u_{0,i,j} - c_1(\phi^n))^2 - \lambda_2(u_{0,i,j} - c_s(\phi^n))^2 \Bigg]. \end{aligned} \tag{4.5.36}$$

3. Prema potrebi ϕ se reinicijalizuje na funkciju rastojanja sa predznakom prema jednačini (4.1.24).

4. Provjerava se da li je rješenje stacionarno. Ako nije, stavlja se da je $n = n + 1$ i proces se ponavlja.



Slika 4.8: *Chan-Veseova metoda za segmentaciju sa inicijalnom konturom pravougaonog oblika.*



Slika 4.9: *Chan-Veseova metoda za segmentaciju sa inicijalnom konturom eliptičnog oblika.*

Na slikama 4.8 i 4.9 prikazani su rezultati segmentacije dobijeni korišćenjem Chan-Veseove metode za segmentaciju medicinske slike mozga i to za dvije različite inicijalne konture. Vidi se da je metod osjetljiv na izbor inicijalne konture i da se stacionarno stanje dostiže nakon relativno velikog broja iteracionih koraka. Takođe, metod je primjenljiv samo na sive slike.

4.6 Vektorska Chan-Veseova nivo-skup metoda

Prirodno proširenje prethodno date skalarne Chan-Veseove nivo-skup metode za segmentaciju sivih slika, dato od istih autora, je vektorska Chan-Veseova metoda za segmentaciju [22]. Sada se sa $u_{0,i} \in \Omega$ označava i-ti kanal slike sa $i = 1, \dots, N$ kanala.
Prošireni Chan-Veseov funkcional za vektorske slike, za konstantne vektore $\mathbf{c}_1 = (c_{11}, \dots, c_{1N})$ i $\mathbf{c}_2 = (c_{21}, \dots, c_{2N})$, je dat sa

$$\begin{aligned} E_{cv}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \Gamma) = \mu \cdot \mathrm{length}(\Gamma) & \\ + \iint_{\Omega^-} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \lambda_{1i} (u_{0,i}(x,y) - c_{1i})^2 \, dxdy & \\ + \iint_{\Omega^+} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \lambda_{2i} (u_{0,i}(x,y) - c_{2i})^2 \, dxdy, & \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

gdje su $\lambda_{1i} > 0$ i $\lambda_{2i} > 0$ parameteri svakog od N kanala. Prethodna jednačina se u nivo-skup obliku može pisati na sljedeći način

$$\begin{aligned} E_{cvls}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \Gamma) = \mu \iint_{\Omega} \delta(\phi(x,y)) |\nabla \phi(x,y)| \, dxdy & \\ + \iint_{\Omega} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \lambda_{1i} (u_{0,i}(x,y) - c_{1i})^2 \, (1 - H(\phi(x,y))) \, dxdy & \\ + + \iint_{\Omega} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \lambda_{2i} (u_{0,i}(x,y) - c_{2i})^2 \, H(\phi(x,y)) \, dxdy, & \end{aligned} \tag{4.6.2}$$

gdje su konstante c_{1i} i c_{2i} date sa

$$c_{1i}(\phi) = \frac{\iint_{\Omega} u_{0,i}(x,y)(1 - H(\phi(x,y))) \, dxdy}{\iint_{\Omega} (1 - H(\phi(x,y))) \, dxdy} \tag{4.6.3}$$

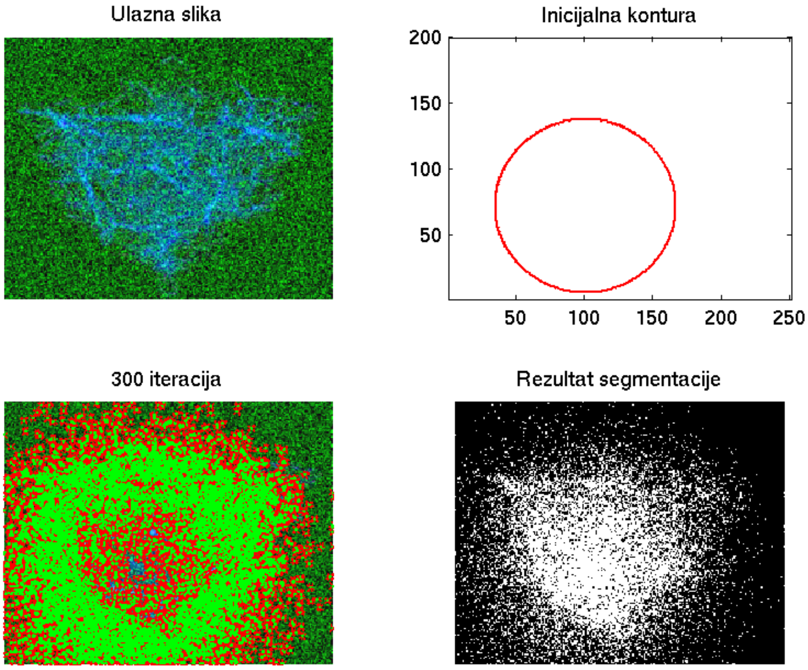
i

$$c_{2i}(\phi) = \frac{\iint_{\Omega} u_{0,i}(x,y) H(\phi(x,y)) \, dxdy}{\iint_{\Omega} H(\phi(x,y)) \, dxdy}, \tag{4.6.4}$$

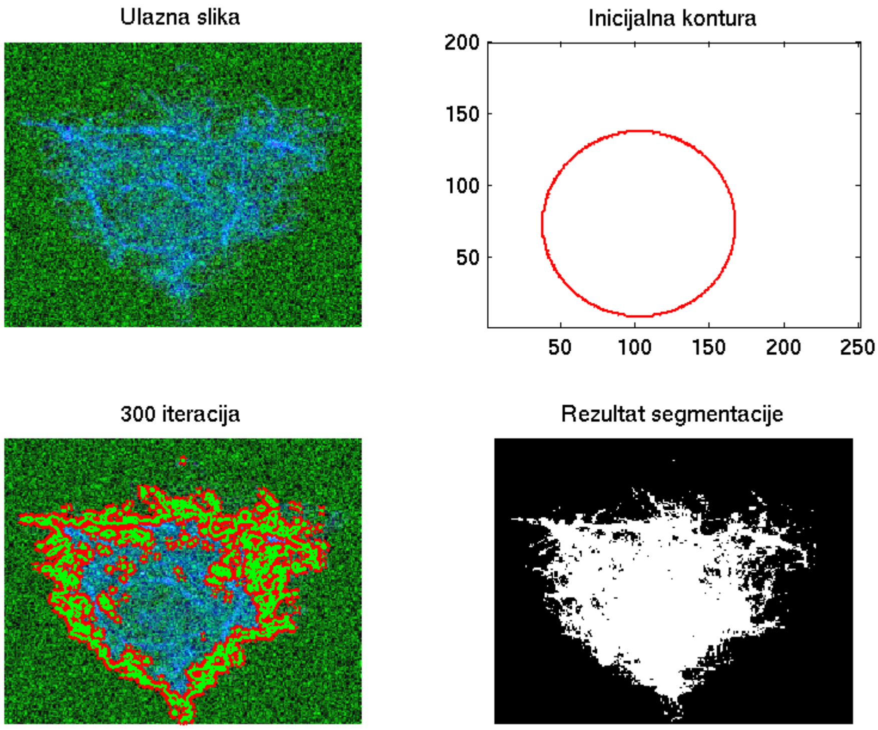
za $i = 1, \dots, N$.

Numerička aproksimacija modela je slična kao i za skalarni Chan-Veseov model i neće biti navedena ovdje.

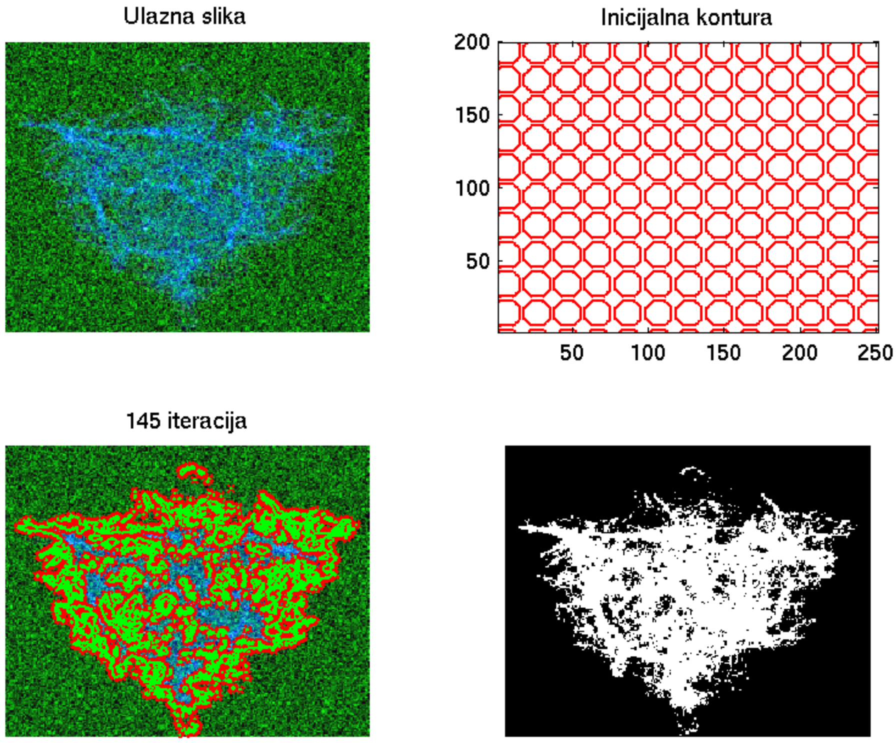
[2] $g = \mathcal{O}(\phi(s))$ za $s \in S$ ako postoji konstanta C takva da je $|f(s)| \le C|\phi(s)|$ za svako $s \in S$. Kaže se da je $g(s)$ „veliko $\mathcal{O}$" od $\phi(s)$ ili da je $g(s)$ reda $\phi(s)$.



Slika 4.10: *Klasična Chan-Veseova metoda ne daje dobre rezultate prilikom segmentacije slike u boji.*



Slika 4.11: *Vektorska Chan-Veseova metoda za segmentaciju slika u boji. U donjem desnom uglu je prikazan rezultat segmentacija dobijen nakon 300 iteracija.*



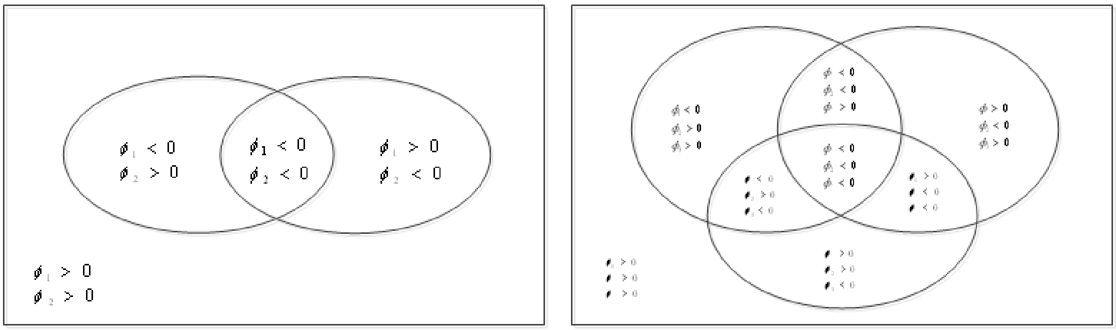
Slika 4.12: *Vektorska Chan-Veseova metoda za segmentaciju slika u boji. U donjem desnom uglu je prikazan rezultat segmentacija dobijen nakon 145 iteracija.*

Primjeri segmentacije su prikazani na slikama 4.10, 4.11 i 4.12. Na slici 4.10 je korišćena klasična, skalarna, Chan-Veseova metoda i vidi se da ona ne daje dobre rezultate pri segmentaciji slike u boji, jer se konverzijom slike u boji u sivu sliku gube određene informacije o slici. Na Slici 4.11 prikazan je rezultat korišćenja vektorske Chan-Veseove metode i stacionarno stanje sa izabranom inicijalnom konturom dostiže se nakon 300 iteracija. Da je i ova metoda osjetljiva na izbor inicijalne konture prikazuje Slika 4.12, gdje je stacionarno stanje dostignuto nakon 145 iteracija uz nešto bolji rezultat segmentacije.

4.7 Multifazna Chan-Veseova nivo-skup metoda

Kod do sada navedenih Chan-Veseovih metoda za segmentaciju, osnovna ideja je particionisanje slike na dva regiona. Jedan region predstavlja objekte koje se želi izdvojiti, a drugi predstavlja pozadinu. Multifazna Chan-Veseova nivo-skup metoda [23] generalizuje ovu ideju i omogućava segmentaciju slika na više od dva regiona.

Problem je postavljen na sljedeći način. Neka je $m = \operatorname{ld} n$ broj nivo-skup funkcija $\phi_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$. Unija nultih nivo-skupova funkcija ϕ_i predstavlja ivice segmentirane slike. Neka je $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_m)$ vektorska nivo-skup funkcija i neka je $\mathbf{H}(\boldsymbol{\phi}) = (H(\phi_1), \dots, H(\phi_m))$ vektorska Heavisideova funkcija. Kaže se da dva piksela (x_1, y_1) i (x_2, y_2) iz Ω pripadaju istoj fazi ili klasi ako i samo ako $\mathbf{H}(\boldsymbol{\phi}(x_1, y_1)) = \mathbf{H}(\boldsymbol{\phi}(x_2, y_2))$. Drugim riječima jedna faza sadrži sve piksele $(x, y) \in \Omega$ koji imaju istu vrijednost vektora $\mathbf{H}(\boldsymbol{\phi}(x, y))$. Vektor $\mathbf{H}(\boldsymbol{\phi})$ može imati $n = 2^m$ različitih vrijednosti, odnosno, sa m nivo-skup funkcija moguće je sliku particionisati na $n = 2^m$ disjunktnih regiona. Ilustracija



(a) (b)

Slika 4.13: *Multifazna Chan-Veseova nivo-skup metoda. (a) Primjer particionisanja slike u 4 regiona sa dvije nivo-skup funkcije. (b) Primjer particionisanja slike u 8 regiona sa 3 nivo-skup funkcije.*

metode za 4 i 8 faza je data na slici 4.13. Ako se uvedu oznake:

- I — predstavlja svaku od faza uz $1 \leq I \leq 2^m = n$,
- $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ — vektor srednjih vrijednosti slike u_0, gdje je $c_I = \mathrm{mean}(u_0)$ u fazi I i
- χ_I — karakteristična funkcija svake od faza I,

Mumford-Shahov problem minimalnih particija (3.3.3) može se sada pisati na sljedeći način

$$E_{mp,n}(\mathbf{c}, \boldsymbol{\phi}) = \frac{\mu}{2} \sum_{I=1}^{n} \iint_{\Omega} |\nabla \chi_I| + \sum_{I=1}^{n} \iint_{\Omega_i} (u_0(x,y) - c_I)^2 \chi_I \, dxdy. \tag{4.7.1}$$

Ako se prvi član zamijeni sumom dužina nultih nivo-skupova funkcija ϕ_i, odnosno sa $\sum_i \iint_{\Omega} |\nabla H(\phi_i)|$, dobija se pojednostavljeni model kod koga će se neki dijelovi kontura računati više puta u ukupnom članu dužine[3]. Energija koja se minimizuje je tada data sa

$$E_{cvmf,n}(\mathbf{c}, \boldsymbol{\phi}) = \mu \sum_{I=1}^{n} \iint_{\Omega} |\nabla H(\phi_i)| + \sum_{I=1}^{n} \iint_{\Omega_i} (u_0(x,y) - c_I)^2 \chi_I \, dxdy. \tag{4.7.2}$$

[3]Ovo pojednostavljenje unosi grešku u sam model, međutim pokazalo se da i sa ovom greškom metoda daje dobre rezultate. U radu [24] su predstavljene alternativne metode regularizacije funkcionala kojima se ta greška koriguje.

Na primjer, za $n = 4$ (Slika 4.13a) funkcional $E_{cv,n}$ postaje

$$\begin{aligned} E_{cvmf,4}(\mathbf{c}, \boldsymbol{\phi}) = {} & \mu \iint_\Omega |\nabla H(\phi_1)| + \mu \iint_\Omega |\nabla H(\phi_2)| \\ & + \iint_\Omega (u_0 - c_{00})^2 H(\phi_1) H(\phi_2)\, dxdy \\ & + \iint_\Omega (u_0 - c_{01})^2 H(\phi_1)(1 - H(\phi_2))\, dxdy \\ & + \iint_\Omega (u_0 - c_{10})^2 (1 - H(\phi_1)) H(\phi_2)\, dxdy \\ & + \iint_\Omega (u_0 - c_{11})^2 (1 - H(\phi_1))(1 - H(\phi_2))\, dxdy, \end{aligned} \tag{4.7.3}$$

gdje je $\mathbf{c} = (c_{00}, c_{01}, c_{10}, c_{11})$ i $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2)$. Komponenete vektora $\mathbf{c}$ su date sa

$$\begin{aligned} c_{00}(\boldsymbol{\phi}) &= \mathrm{mean}(u_0) \quad \text{u} \quad \{(x,y) : \phi_1(t,x,y) > 0, \phi_2(t,x,y) > 0\}, \\ c_{01}(\boldsymbol{\phi}) &= \mathrm{mean}(u_0) \quad \text{u} \quad \{(x,y) : \phi_1(t,x,y) > 0, \phi_2(t,x,y) < 0\}, \\ c_{10}(\boldsymbol{\phi}) &= \mathrm{mean}(u_0) \quad \text{u} \quad \{(x,y) : \phi_1(t,x,y) < 0, \phi_2(t,x,y) > 0\}, \\ c_{11}(\boldsymbol{\phi}) &= \mathrm{mean}(u_0) \quad \text{u} \quad \{(x,y) : \phi_1(t,x,y) < 0, \phi_2(t,x,y) < 0\}. \end{aligned} \tag{4.7.4}$$

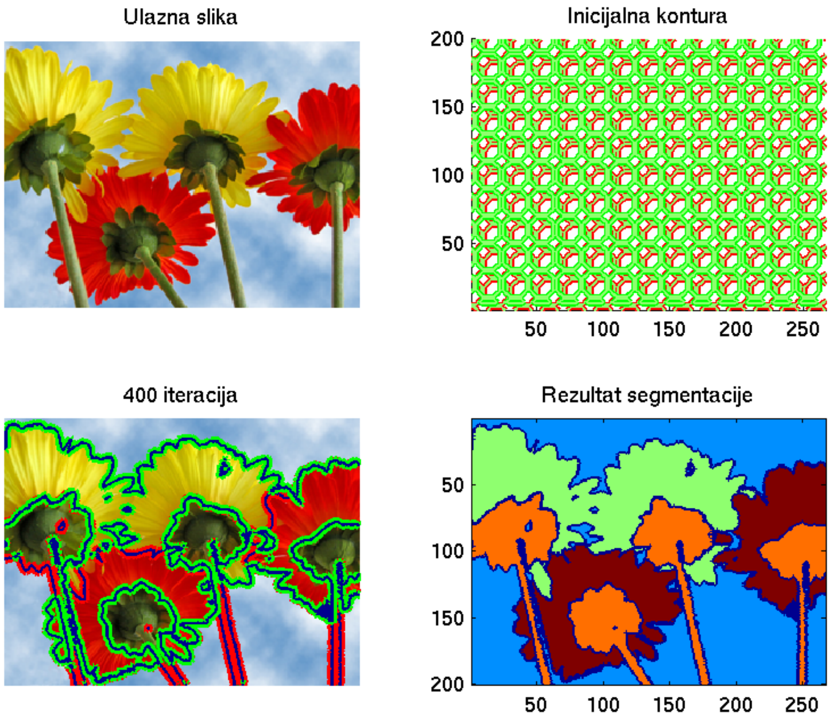
Euler-Lagrangeove jednačine koje su dobijene minimizacijom funkcionala (4.7.3) u odnosu na $\mathbf{c}$ i $\boldsymbol{\phi}$ date su sa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = \delta_\epsilon(\phi_1) \Bigg\{ & \mu\, \mathrm{div}\left(\frac{\nabla \phi_1}{|\nabla \phi_1|}\right) \\ & - \big[((u_0 - c_{00})^2 - (u_0 - c_{10})^2) H(\phi_2) \\ & + ((u_0 - c_{01})^2 - (u_0 - c_{11})^2)(1 - H(\phi_2))\big] \Bigg\} \end{aligned} \tag{4.7.5}$$

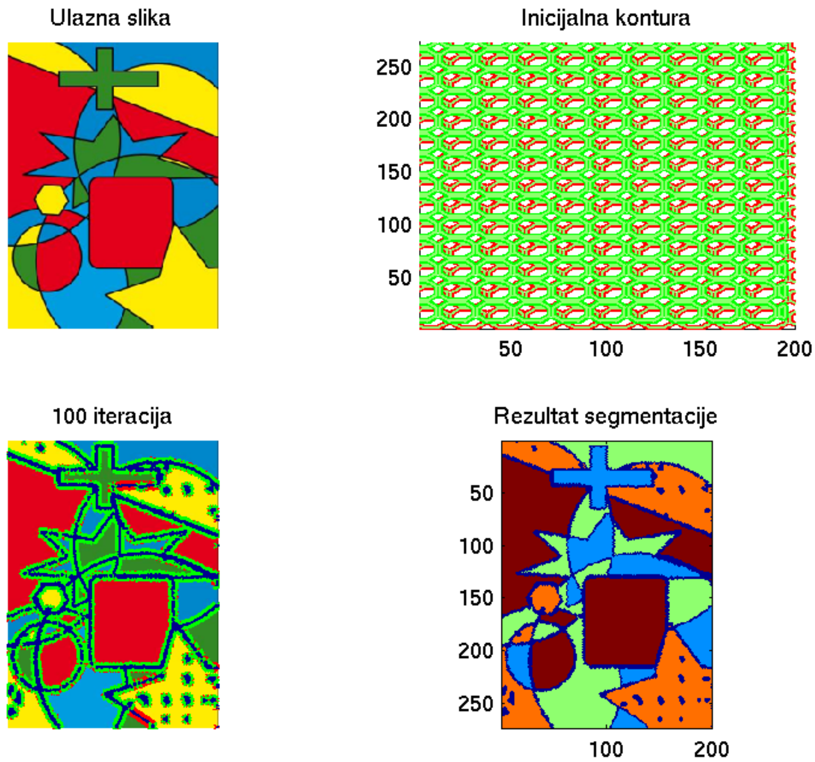
i

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \delta_\epsilon(\phi_2) \Bigg\{ & \mu\, \mathrm{div}\left(\frac{\nabla \phi_2}{|\nabla \phi_2|}\right) \\ & - \big[((u_0 - c_{00})^2 - (u_0 - c_{01})^2) H(\phi_1) \\ & + ((u_0 - c_{10})^2 - (u_0 - c_{11})^2)(1 - H(\phi_1))\big] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.7.6}$$

Na slikama 4.14 i 4.15 prikazani su primjeri segmentacije dvije različite ulazne slike. Ulazne slike imaju jednostavnu teksturu i vidi se da ova metoda u tom slučaju daje dobre rezultate segmentacije.



Slika 4.14: *Multifazna Chan-Veseova metoda za segmentaciju slika u boji. Nakon 400 iteracija metoda omogućava segmentaciju stabljike, cvijeta i pozadine ulazne slike.*



Slika 4.15: *Multifazna Chan-Veseova metoda za segmentaciju slika u boji. Nakon 100 iteracija metoda uspješno segmentira objekte sa kompleksnim ivicama.*

5. Tenzorske nivo-skup metode za segmentaciju slike

5.1 Tenzori

Skalari i vektori su specijalni slučajevi šireg pojma trodimenzionalnog tenzora reda n za čiju je definiciju u bilo kojem koordinatnom sistemu potrebno 3^n brojeva koji se nazivaju komponentama tenzora. U opštem slučaju m-dimenzionalni tenzor reda n ima m^n komponenata. Skalari su tenzori reda 0 sa $3^0 = 1$ komponentom, a vektori su tenzori reda 1 sa $3^1 = 3$ komponente. Drugim riječima, red tenzora jednak je dimenziji niza koji predstavlja tenzor, ili što je isto broju indeksa potrebnih da se označi svaka komponenta toga niza.

Pojam tenzora se slično kao i kod skalara i vektora može proširiti na tenzorsko polje. Tenzorsko polje svakoj tački posmatranog prostora dodjeljuje tenzor, kao što se u slučaju skalarnog ili vektorskog polja svakoj tački prostora dodjeljuje skalar ili vektor.

Osnovna osobina tenzora je zakon o transformaciji njegovih komponenata koji daje vezu između komponenata tenzora u različitim koordinatnim sistemima. Pa se tenzori obično i definišu preko svojih transformacionih osobina. U nastavku će biti date osnove tenzorske analize, a detaljnije izlaganje o tenzorima se može pronaći u [25] i [26].

5.1.1 Tenzori nultog reda (skalari)

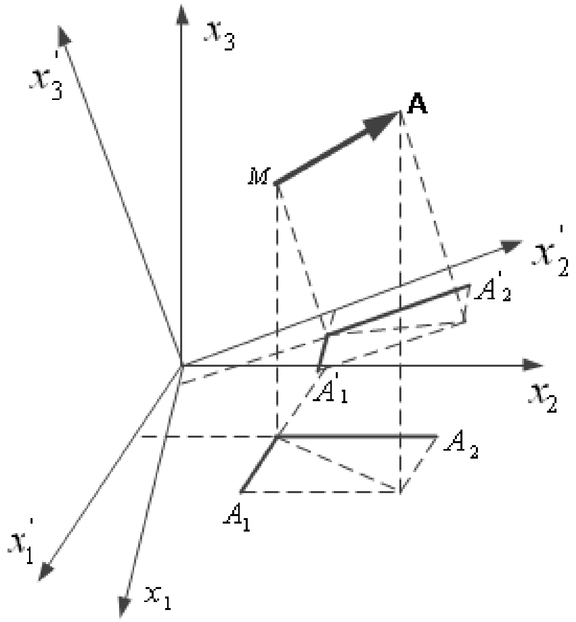
Skalar je veličina koja se jednoznačno može definisati u bilo kojem koordinatnom sistemu korišćenjem jednog realnog broja, uz dodatnu osobinu da je skalar invarijantan na promjene koordinatnog sistema. To znači da ako je ϕ vrijednost skalara u jednom koordinatnom sistemu, a ϕ' njegova vrijednost u nekom drugom koordinatnom sistemu, tada važi $\phi = \phi'$.

5.1.2 Tenzori prvog reda (vektori)

Za definiciju vektora potrebna su tri realna broja. Zakon o transformaciji komponenata vektora garantuje da će komponente vektora u novom koordinatnom prostoru označavati isti vektor. Neka vektor **A** ima komponente A_i u koordinatnom sistemu K, i komponente A_i' u koordinatnom sistemu K' (pogledati sliku 5.1). **A** je usmjereni linijski segment pa je u potpunosti određen svojim početnim i krajnjim tačkama. Njegove komponente A_i i A_i' se iz jednog u drugi koordinatni sistem transformišu prema zakonu

$$A_i' = \alpha_{i'k} A_k, \tag{5.1.1}$$

gdje je $\alpha_{i'k}$ kosinus ugla između i-te ose iz K' i k-te ose iz koordinatnog sistema K, a A_k i A'_i su komponente u starom i novom koordinatnom sistemu K i K', respektivno.



Slika 5.1: *Ilustracija promjene komponenti vektora usljed promjene koordinatnog sistema.*

5.1.3 Tenzori drugog reda

Pod pojmom tenzora drugog reda podrazumjevaju se veličine jednoznačno određene sa devet realnih brojeva (komponente tenzora) koje se usljed promjena koordinatnog sistema transformišu prema zakonu

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}A_{lm}, \tag{5.1.2}$$

gdje su A_{lm} i A'_{ik} komponente tenzora u starom i novom koordinatnom sistemu K i K', respektivno, a $\alpha_{i'l}$ kosinus ugla između i-te ose iz K' i l-te ose iz K (analogno vrijedi i za $\alpha_{k'm}$).

5.1.4 Tenzori višeg reda

Pod pojmom tenzora n-tog reda podrazumjeva se veličina jednoznačno određena sa 3^n realna broja koji se usljed promjena koordinatnog sistema transformišu prema zakonu

$$A'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \alpha_{i'_1 k_1}\alpha_{i'_2 k_2}\cdots\alpha_{i'_n k_n}A_{k_1 k_2 \ldots k_n}, \tag{5.1.3}$$

gdje su $A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ i $A'_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ komponente tenzora u starom i novom koordinatnom sistemu K i K', respektivno, a $\alpha_{i'_1 k_1}$ kosinus ugla između i_1-te ose iz K' i k_1-te ose iz K (analogno vrijedi i za ostale $\alpha_{i'_n k_n}$).

5.2 Unificirana tenzorska nivo-skup metoda za segmentaciju slika

Grupa autora je u [27] predstavila novu, unificiranu tenzorsku nivo-skup metodu. Ova metoda koristi tenzor trećeg reda za opisivanje lokalnih karakteristika piksela kao što su nivo sivila i lokalne geometrijske osobine. Takođe, jedna od komponenata tenzora je i slika filtrirana Gaussovim filterom, čime se ostvaruje otpornost metode na šum. Predstavljena metoda ima nekoliko prednosti u odnosu na do sada predstavljene nivo-skup metode.

- Veća otpornost na šum.
- Uzimajući u obzir lokalne geometrijske osobine metoda ima veću osjetljivost na ivice, što olakšava zaustavljanje evolucione konture na njihovim lokacijama.
- Tenzorska reprezentacija piksela omogućava tačniju i prirodniju segmentaciju slika.
- Definisanom funkcijom rastojanja metoda može da koristi skalarne i vektorske veličine, a izbor jednih ili drugih se odražava samo na smanjenje ili povećanje reda tenzora.

5.2.1 Gaborov filter

Segmentacija slike je veoma važan zadatak u analizi slike. Pri tome posebnu ulogu u interpretaciji i razumijevanju slika realnog svijeta zauzima segmentacija teksture. Postoji veliki broj tehnika za segmentaciju teksture, a svima je zajednički prvi korak u procesu segmentacije čiji je cilj da se nekom vrstom analize teksture generiše skup mjerenja. Dobijeni mjerni podaci se u nastavku procesa koriste za izdvajanje regiona sa različitom teksturom.

Jedna od metoda za analizu teksture zasniva se na korišćenju Gaborovih funkcija. Naime, Daugman je u [28] pokazao da se ćelije vizuelnog korteksa sisavaca mogu dobro modelovati Gaborovim funkcijama. U prostornom domenu dvodimenzionalni Gaborov filter je Gaussova funkcija modulisana sinusoidom. Pokazuje se da takva modulacija daje optimalan odnos odziva filtera u prostornom i frekvencijskom domenu. Centralna frekvencija filtera određena je frekvencijom sinusoide, dok je propusni opseg filtera definisan širinom Gaussove funkcije. Impulsni odziv dvodimenzionalnog Gaborovog filtera je dat sa

$$h(x,y,\lambda,\theta,\phi,\sigma_x,\sigma_y,\gamma)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x'}{\sigma_x}\right)^2+\left(\frac{\gamma y'}{\sigma_y}\right)^2\right]}e^{j\left(2\pi\frac{x'}{\lambda}+\phi\right)}, \tag{5.2.1}$$

gdje su

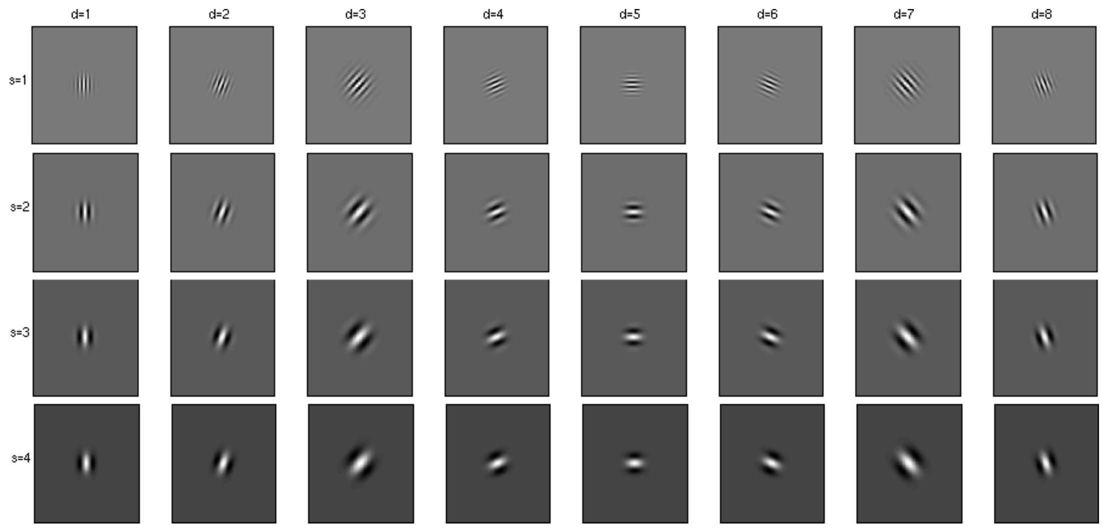
- λ – talasna dužina sinusoide,
- θ – orijentacija filtera,
- ϕ – fazni pomak,
- σ_x^2 i σ_y^2 – varijanse dvodimenzionalne Gaussove funkcije,

- γ – reguliše prostorni odnos x i y koordinata omogućavajući promjenu oblika Gaborove funkcije od kružnice ($\gamma = 1$) do izdužene elipse ($\gamma > 1$) i
- x' i y' – su za ugao θ rotirane x i y koordinate koje se računaju korišćenjem sljedećih jednačina

$$x' = x \cos\theta + y \sin\theta \tag{5.2.2}$$

i

$$y' = -x \sin\theta + y \cos\theta. \tag{5.2.3}$$



Slika 5.2: *Impulsni odziv Gaborovog filtera za 4 skale i 8 smjerova.*

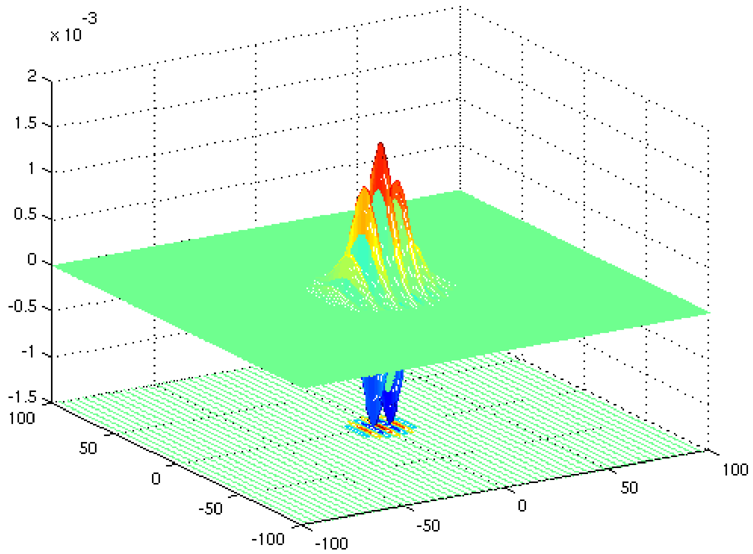
Filtriranje ulazne slike vrši se korišćenjem familije Gaborovih filtera sa različitim orijentacijama i skalama (frekvencijama). Osnovni zadatak svakog filtera je da transformiše različitosti tekstura u informaciju koja će se u slučaju pojave granice između tekstura na izlazu filtera detektovati kao prekid. Na slici 5.2 je prikazan odziv Gaborovog filtera za 4 skale i 8 smjerova, dok je na slici 5.3 prikazan impulsni odziv filtera u tri dimenzije.

Kod tenzorske nivo-skup metode Gaborov filter se takođe koristi za ekstrakciju informacija o teksturama na slici, a izlazi filtera se koriste za konstrukciju tenzora.

5.2.2 Konstrukcija tenzora

Da bi se postigla veća tačnost segmentacije, u algoritam za segmentaciju je potrebno uključiti što je moguće više informacija o slici. Naravno, pri tome je potrebno voditi računa da su izvedene informacije predstavljene na odgovarajući način. Autori su u [27] iskoristili informacije o nivoima sivila, gradijentu i orijentaciji da bi formirali tenzorsko polje. Proces formiranja tenzorskog polja je prikazan na slici 5.4.

Konstrukcija tenzora T izvodi se u tri koraka.



Slika 5.3: *Impulsni odziv Gaborovog filtera u trodimenzionalnom koordinatnom sistemu.*

(a) Da bi metoda bila otpornija na šum, pogotovo na šum tipa ,,salt and pepper", slika se propušta kroz Gaussov filter. Vrijednosti sivila filtrirane slike uključena je u tenzor T kao matrica

$$\left[T_{x,y}^{s,d,k=1}\right]_{S\times D} = \frac{1}{\sqrt{SD}} \begin{bmatrix} G_{\sigma_1}(u_{x,y}^0) & \dots & G_{\sigma_1}(u_{x,y}^0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{\sigma_S}(u_{x,y}^0) & \dots & G_{\sigma_S}(u_{x,y}^0) \end{bmatrix}, \tag{5.2.4}$$

gdje je $u_{x,y}^0$ slika koja se procesira, a $G_{\sigma_i}(\cdot)$ izlaz Gaussovog filtera za različite standardne devijacije σ_i, $i = 1, \dots, S$.

(b) Nivoi sivila piksela originalne slike se u tenzor T unose kao matrica

$$\left[T_{x,y}^{s,d,k=2}\right] = \frac{1}{\sqrt{S \times D}} \left[u_{x,y}^0\right]_{S\times D}. \tag{5.2.5}$$

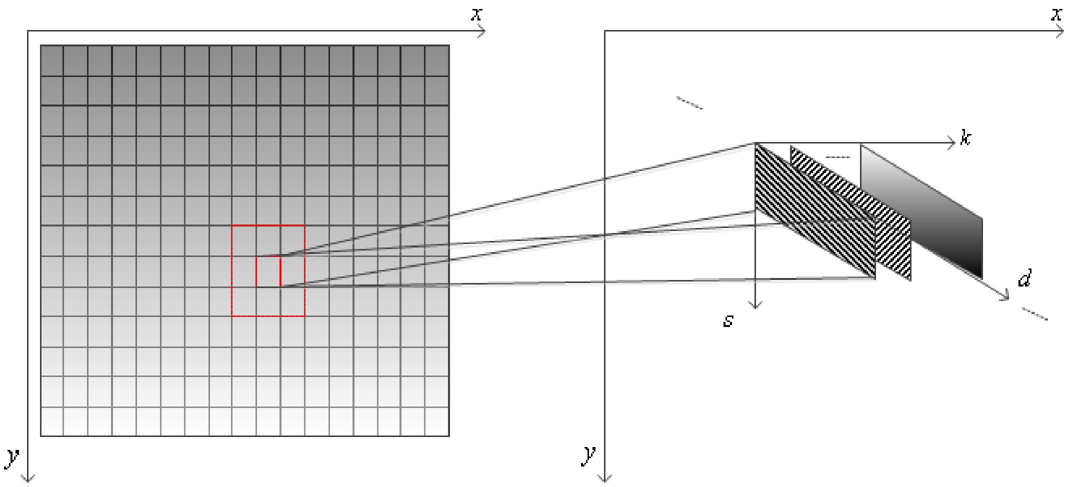
(c) Korišćenjem Gaborovih filtera sa S skala i D orijentacija u model se unose i informacije o teksturi. Izlazi niza od $S \cdot D$ Gaborovih filtera u tenzor T unijeti su matricom

$$\left[T_{x,y}^{s,d,k=3}\right]_{S\times D} = \left[\text{Gabor}\left(u^0(x,y)\right)\right]_{S\times D}, \tag{5.2.6}$$

gdje je Gabor $(\cdot)$ izlaz dobijen konvolucijom impulsnog odziva Gaborovog filtera i slike.

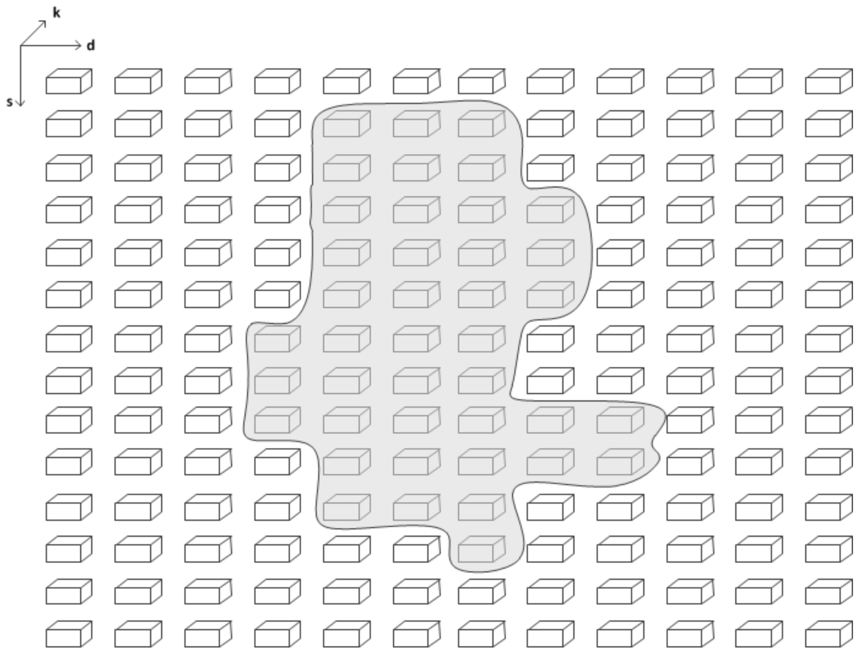
5.2.3 Unificirana tenzorska nivo-skup metoda

U prethodnom izlaganju navedeni su koraci metode kojima se slika projektuje u tenzor petog reda iz $\mathbb{R}^{M\times N\times S\times D\times K}$. Istovremenim razlaganjem tenzora po prvom i drugom



Slika 5.4: *Unificirana tenzorska reprezentacija svakog piksela slike. Na lijevom dijagramu svaki pravougaonik predstavlja piksel, a na dijagramu lijevo je odgovarajuće tenzorsko polje.*

modu, tenzor T postaje tenzorsko polje čiji su elementi tenzori iz $\mathbb{R}^{S\times D\times K}$ i svaki od njih odgovara pikselu slike koja se segmentira. Neka je Γ iz $\Omega \in \mathbb{R}^{M\times N}$ kontura koja dijeli polje T na dva regiona Ω^- i Ω^+ koji se nalaze unutar i van konture, respektivno (pogledati ilustraciju na slici 5.5).



Slika 5.5: *Kontura Γ u polju tenzora iz $\mathbb{R}^{S\times D\times K}$.*

Analogno Chan-Veseovoj metodi, kriva Γ se može predstaviti kao nulti nivo-skup implicitne funkcije $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$. Srednje vrijednosti piksela unutar i van evolucione konture su tada date respektivno sa

$$c_1^{s,d,k} = \frac{\iint_\Omega T_{x,y}^{s,d,k}(1 - H(\phi))\, dxdy}{\iint_\Omega (1 - H(\phi))\, dxdy} \tag{5.2.7}$$

i

$$c_2^{s,d,k} = \frac{\iint_\Omega T_{x,y}^{s,d,k} H(\phi)\, dxdy}{\iint_\Omega H(\phi)\, dxdy}. \tag{5.2.8}$$

Korišćenjem (5.2.7) i (5.2.8) i energetskog funkcionala (4.5.2), energetski funkcional tenzorske nivo-skup metode je definisan sa

$$\begin{aligned} E_{tls}(c_1^{s,d,k}, c_2^{s,d,k}, \phi) = \mu & \iint_\Omega \delta(\phi(x,y))|\nabla\phi(x,y)|\, dxdy \\ & + \lambda_1 \iint_\Omega \operatorname{dist}^2_{x,y}\left(T_{x,y}^{s,d,k}, c_1^{s,d,k}\right)(1 - H(\phi(x,y)))\, dxdy \\ & + \lambda_2 \iint_\Omega \operatorname{dist}^2_{x,y}\left(T_{x,y}^{s,d,k}, c_2^{s,d,k}\right) H(\phi(x,y))\, dxdy. \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Funkcija rastojanja je definisana sa

$$\operatorname{dist}_{x,y}\left(T_{x,y}^{s,d,k}, c_{1/2}^{s,d,k}\right) = \sqrt{\sum_{s=1}^{S} \alpha_s \sum_{d=1}^{D} \beta_d \sum_{k=1}^{K} \gamma_k \left(T_{x,y}^{s,d,k} - c_{1/2}^{s,d,k}\right)^2}, \tag{5.2.10}$$

gdje su konstante

$$\begin{aligned} \alpha_s \geq 0 \quad & \text{i} \quad \sum_{s=1}^{S} \alpha_s = 1, \\ \beta_d \geq 0 \quad & \text{i} \quad \sum_{d=1}^{D} \beta_d = 1, \\ \gamma_k \geq 0 \quad & \text{i} \quad \sum_{k=1}^{K} \gamma_k = 1. \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

Minimizacijom funkcionala (5.2.9) za fiksirane $c_1^{s,d,k}$ i $c_2^{s,d,k}$ u odnosu na ϕ, slično kao kod Chan-Veseove metode, dolazi se do Euler-Lagrangeove jednačine za nepoznatu funkciju ϕ. Uvođenjem varijable $t \geq 0$ i korišćenjem metode najstrmijeg spuštanja dobija se evoluciona jednačina

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial t} = \delta(\phi) \Bigg[& \mu \operatorname{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right) \\ & + \lambda_1 \sum_{s=1}^{S} \alpha_s \sum_{d=1}^{D} \beta_d \sum_{k=1}^{K} \gamma_k \left(T_{x,y}^{s,d,k} - c_1^{s,d,k}\right)^2 \\ & - \lambda_2 \sum_{s=1}^{S} \alpha_s \sum_{d=1}^{D} \beta_d \sum_{k=1}^{K} \gamma_k \left(T_{x,y}^{s,d,k} - c_2^{s,d,k}\right)^2 \Bigg]. \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Pokazuje se da za $S = D = K = 1$, za $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 1$ i $T_{x,y} = u^0_{x,y}$ predstavljena metoda u stvari postaje Chan-Veseova metoda za segmentaciju. Takođe, može se pokazati da se uz prethodne uslove, osim za $K > 1$ i $\gamma = [1/K, \ldots, 1/K]$ model redukuje na vektorsku Chan-Veseovu metodu.

5.2.4 Eksperimentalni rezultati

Na slici 5.6 su prikazane testne slike koje se koriste za evaluaciju razmatrane tenzorske nivo-skup metode. Originalne slike su u boji, međutim prvi korak algoritma je konverzija u sive slike čime se gube određene informacije potrebne za uspješnu segmentaciju.

(a)

(b)

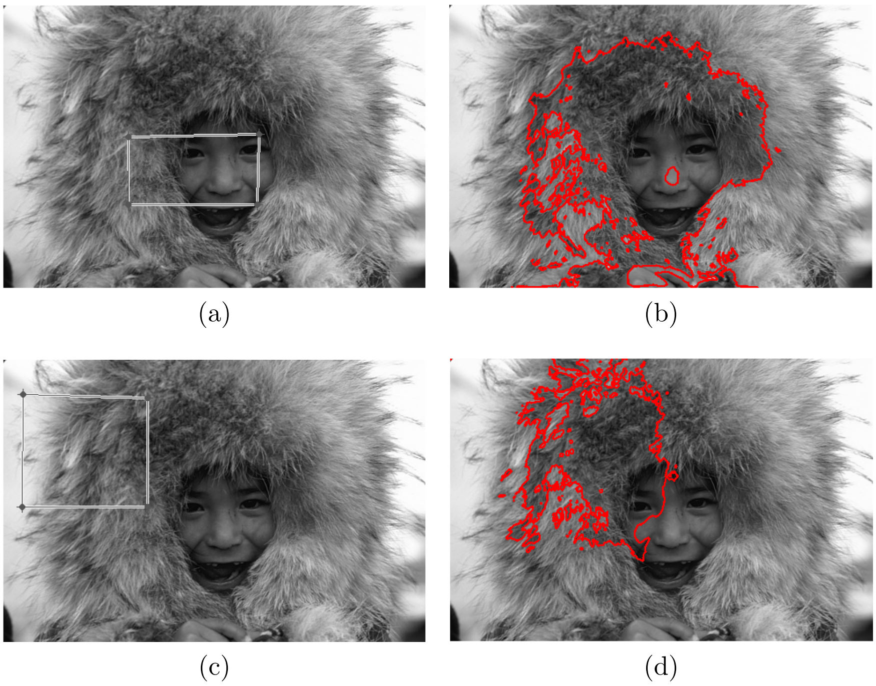
Slika 5.6: *Tenzorska nivo-skup metoda - testne slike.*

Na slikama 5.7 i 5.8 su prikazani rezultati segmentacije za dva položaja inicijalne konture. Nakon 115 iteracionih koraka jasno je da algoritam ne daje zadovoljavajuće rezultate.

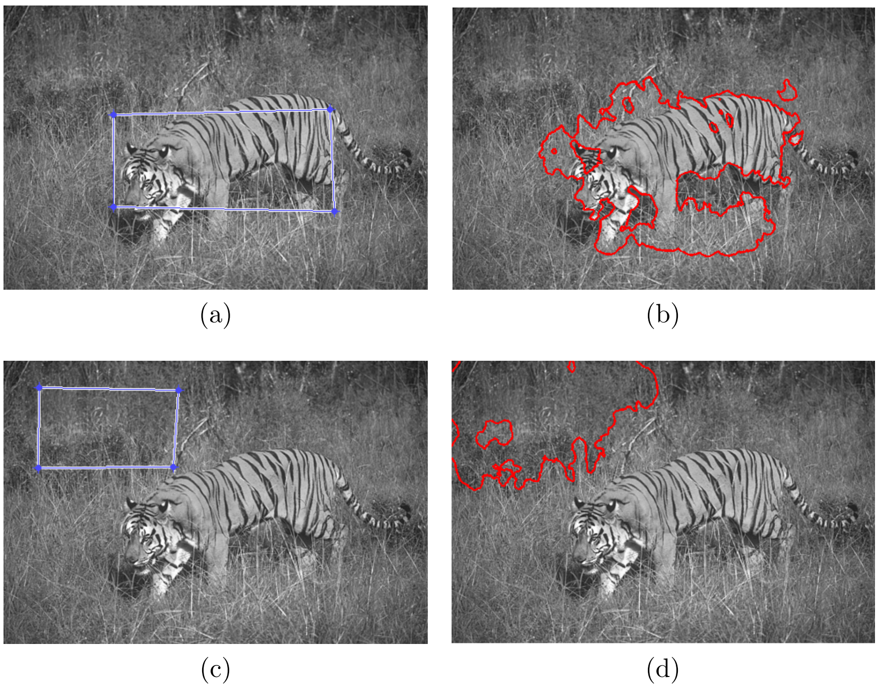
Algoritam posjeduje veliki broj slobodnih parametara koje je potrebno podešavati u zavisnosti od tipa slike i primjene algoritma. Takođe je potrebno primijetiti da algoritam zavisi od početnog položaja konture. U oba slučaja prvi položaj konture daje nešto bolje rezultate segmentacije. Gubitak informacija o boji znatno utiče na efikasnost metode i u nastavku rada su predložena određena rješenja koja prevazilaze navedene probleme.

5.3 Tenzorska nivo-skup metoda za segmentaciju slika u boji

Unificirana tenzorska metoda predstavljena u prethodnom tekstu je namijenjena prevenstveno za segmentaciju sivih slika. Klasično proširenje metode na slike u boji po ugledu na Chan-Veseovu vektorsku metodu je relativno jednostavno i zahtijeva samo povećanje reda tenzora (naravno na uštrb numeričke efikasnosti algoritma). Dalje, za specifičnu primjenu metode potrebno je podesiti veliki broj parametara tenzorske nivo-skup jednačine, a poseban problem predstavlja vrijednost parametra μ u jednačini (5.2.12), koji zajedno sa krivinom konture predstavlja regularizacioni član dužine konture, jer njegov izbor znatno utiče na krajnji rezultat segmentacije. Ovaj član je odgovoran i za paraboličku prirodu



Slika 5.7: *Rezultati segmentacije slike eskima za dva položaja inicijalne konture. Na slikama u lijevoj koloni su originalne slike sa izabranom početnom konturom, dok su u desnoj koloni rezultati segmentacije nakon 115 iteracija.*



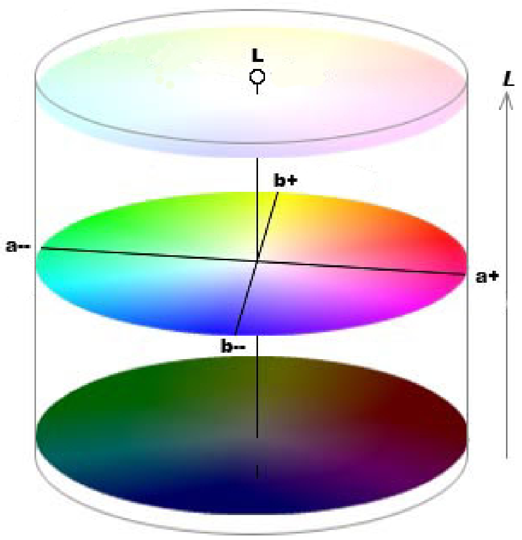
Slika 5.8: *Rezultati segmentacije slike tigra za dva položaja inicijalne konture. Na slikama u lijevoj koloni su originalne slike sa izabranom početnom konturom, dok su u desnoj koloni rezultati segmentacije nakon 115 iteracija.*

jednačine, što nameće stroge restrikcije za dužinu vremenskog koraka prilikom traženja stacionarnog rješenja.

U radu [29] smo predstavili tenzorsku nivo skup metodu prilagođenu za segmentaciju slika u boji. Prilikom formiranja tenzorskog polja, umjesto informacija o nivou sivila piksela slike u algoritam smo unijeli informacije o boji. U radu [30] smo dodatno unaprijedili algoritam tako što smo u algoritam unijeli superpikselsku transformaciju slike. Time smo eliminisali potrebu za regularizacionim članom ($\mu = 0$), smanjili broj slobodnih parametara i algoritam učinili pogodnim i za automatsku segmentaciju opštih slika. U nastavku ove glave biće dati rezulatati našeg istraživanja.

5.3.1 Matrice rastojanja u CIE $L^*a^*b^*$ prostoru boja

Tri koordinate u CIE $L^*a^*b^*$ prostoru predstavljaju svjetlinu boje L^*, njenu poziciju između crvene i zelene a^* i njenu poziciju između žute i plave b^*, pogledati sliku 5.9.



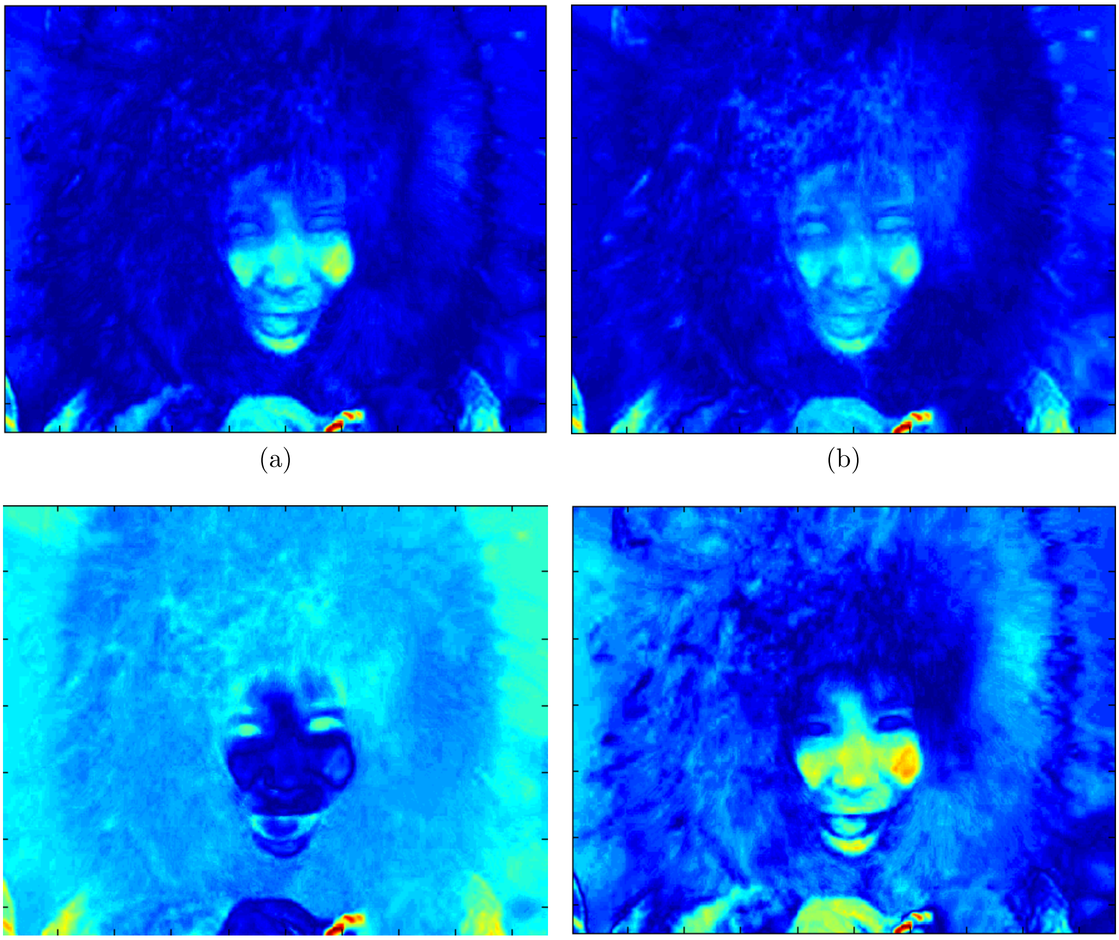
Slika 5.9: *CIE $L^*a^*b^*$ prostor boja.*

Komponente CIE $L^*a^*b^*$ (ili CIELAB) prostora boja dobijene transformacijom iz CIE XYZ prostora su date sljedećim jednačinama (pogledati [31] ili [32]):

$$\begin{aligned} L^* &= 116 \cdot h\left(\frac{Y}{Y_w}\right) - 16, \\ a^* &= 500\left[h\left(\frac{X}{X_w}\right) - h\left(\frac{Y}{Y_w}\right)\right] \quad \text{i} \\ b^* &= 200\left[h\left(\frac{Y}{Y_w}\right) - h\left(\frac{Z}{Z_w}\right)\right], \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

gdje je

$$h(q) = \begin{cases} \sqrt[3]{q} & : \quad q > 0,008856 \\ 7.787q + 16/116 & : \quad q \le 0,008856 \end{cases}, \tag{5.3.2}$$



(a) (b) (c) (d)

Slika 5.10: *Intezitetski prikaz matrica rastojanja određenih u CIE $L^*a^*b^*$ prostoru boja dobijenih korišćenjem k-means algoritma za određivanje kolor markera. Na slici je prikazan slučaj za $k = 4$.*

a X_w, Y_w i Z_w su koordinate referentne bjeline (obično je to bjelina savršeno reflektujućeg difuzera pod osvijetljenjem definisanim standardom CIE *D65*). CIE $L^*a^*b^*$ prostor boja je:

1. kolorimetričan – boje koje se detektuju kao identične su i kodovane identično,
2. perceptualno uniforman – svaka značajnija promjena nijanse boje se odražava i u ekvivalentnoj promjeni vrijednosti boje u $L^*a^*b^*$ prostoru,
3. nezavisan od uređaja za prezentaciju – (*eng.* device-independent) boja je izražena kao apsolutna vrijednost, nezavisna od uređaja za prezentaciju, pa se može koristiti i kao referentna tačka za poređenje karakteristika takvih uređaja.

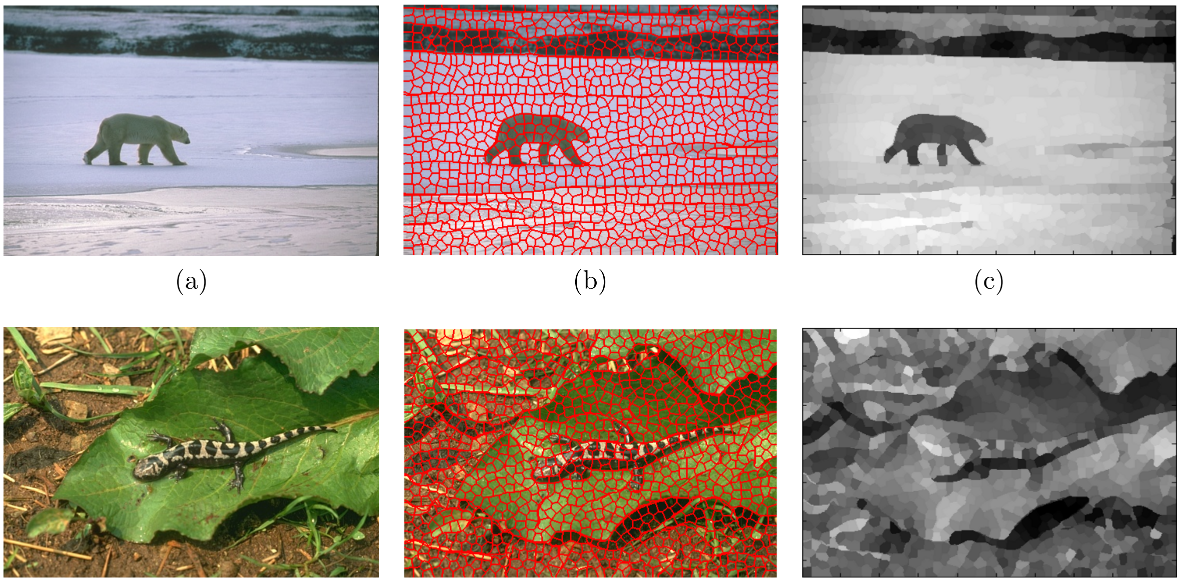
Navedene prva i druga osobina u suštini znače da se svaka perceptualna razlika između bilo koje dvije boje iz CIE $L^*a^*b^*$ prostora može dobro aproksimirati računanjem euklidskog rastojanja između njih. U predloženoj metodi za segmentaciju slika u boji upravo zbog toga i koristimo na taj način formiranu funkciju rastojanja da bismo odredili matricu rastojanja slike. Matrice rastojanja ćemo dalje koristiti prilikom formiranja tenzorskog polja. Matrice rastojanja se određuju u dva koraka:

1. na neki način se određuju kolor markeri u $a*$ i $b*$ ravnima CIE $L*a*b*$ prostora (manuelno ili automatski korišćenjem npr. k-means algoritma),

2. elementi matrica rastojanja se dobijaju računanjem euklidskog rastojanja između svakog piksela i srednje vrijednosti kolor markera.

U slučaju automatskog određivanja kolor markera korišćenjem k-means algoritma dobijene matrice rastojanja testne RGB slike prikazane su na slici 5.10.

5.3.2 Prekomjerna segmentacija korišćenjem superpiksela



(a) (b) (c)

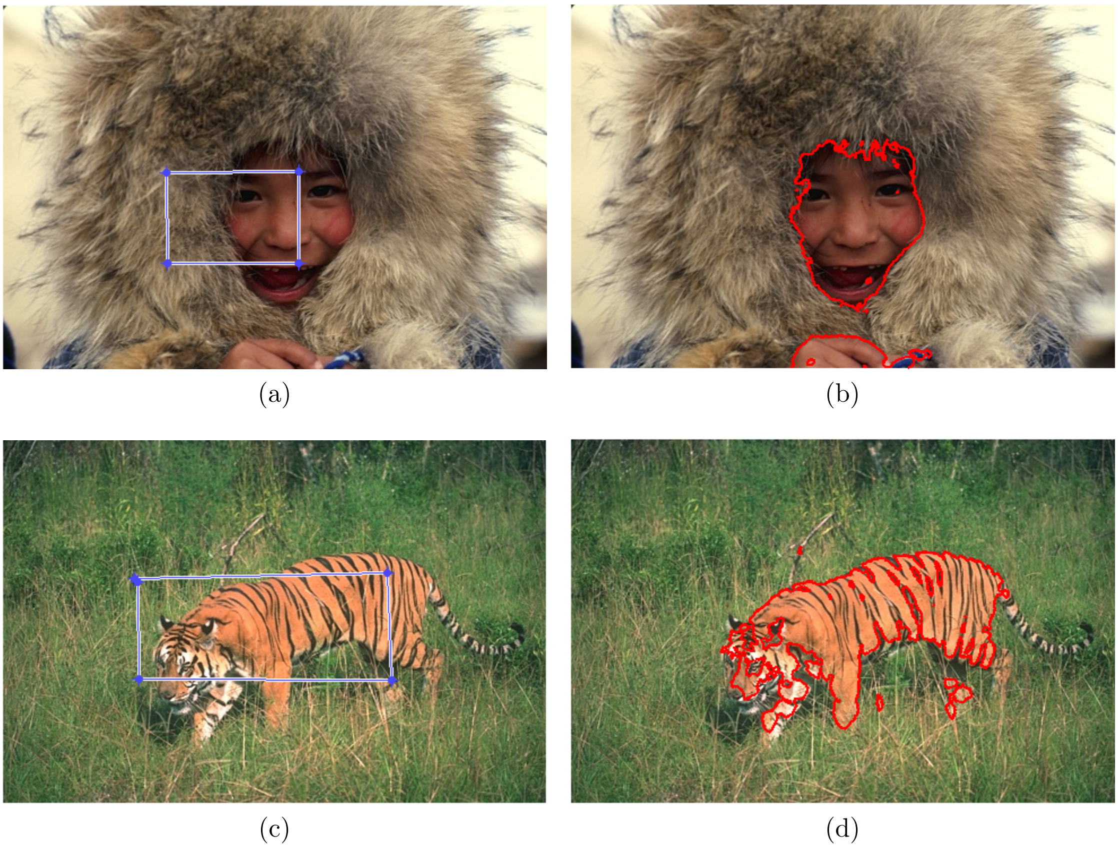
(d) (e) (f)

Slika 5.11: *Aproksimacija slike superpikselskom mapom. Prva kolona prikazuje originalne RGB slike. Druga kolona prikazuje superpikselsku mapu, dok treća kolona prikazuje srednju vrijednost sivila unutar svakog od superpiksela.*

Kao što je već pomenuto, značajan problem nivo-skup metoda predstavlja parabolička priroda nivo-skup evolucione jednačine koja nameće stroge restrikcije za izbor vremenskog koraka evolucije. Da bi izbjegli računanje regularizacionog člana, a samim tim i smanjili broj parametara koje je potrebno podešavati, u predloženoj metodi pratimo postupak sličan onom datom u radovima [33] i [34]. Regularizacionim članom u (5.2.12) u stvari se kontroliše elastičnost konture i onemogućava cijepanje konture na više manjih (zbog šuma, teksture objekata i slično). Eliminacijom objekata na slici koji mogu dovesti do cijepanja konture regularizacioni član postaje suvišan. Naravno, potrebno je ukloniti sve objekte koji nisu od interesa, a pri tome zadržati informaciju o ivicama objekata koje želimo izdvojiti u daljem procesu segmentacije. Da bi to postigli kao prvi korak u algoritmu izvršili smo transformaciju slike u mapu superpiksela [35]. Mapa superpiksela je u suštini aproksimacija ulazne slike, dok su sami superpikseli lokalne prirode, koherentni i zadržavaju većinu informacija o strukturi slike. Autori su u [35] kvantifikovali kvalitet aproksimacije slike superpikselskom mapom tako što su određivali procenat prekrivanja ivica segmenata slike određenih od strane ljudskih subjekata sa granicama superpiksela. Pokazano je da na slikama veličine 240×160 procenat prekrivanja raste sa brojem superpiksela k, a $k = 200$ za ovu veličinu slike se pokazao kao dovoljan broj superpiksela za kvalitetnu segmentaciju. Na slici 5.11 su prikazane dvije superpikselske mape testnih slika i srednja vrijednost sivila unutar piksela. Očigledno je da ivice superpiksela (za dovoljan broj superpiksela) dobro prate ivice objekata originalne slike.

5.3.3 Tenzorsko polje i evoluciona jednačina

Korišćenjem matrica ratojanja iz CIE $L^*a^*b^*$ prostora, umjesto vrijednosti sivila piksela konvertovane RGB slike, znatno smo unaprijedili efikasnost tenzorske nivo-skup metode u segmentaciji slika u boji [30]. Na slici 5.12 su prikazani rezultati segmentacije na testnim slikama. Ako se ovi rezultati porede sa onima dobijenim klasičnom tenzorskom nivo-skup metodom (slike 5.7 i 5.8) očigledno je da su ostvaruju mnogo bolji rezultati segmentacije.



(a) (b)

(c) (d)

Slika 5.12: *Rezultati segmentacije slike tigra i eskima za dva položaja inicijalne konture kada se kao za formiranje tenzorskog polja koriste matrice rastojanja iz CIE $L^*a^*b^*$ prostora boja.*

Problem kod ovakvog pristupa je i dalje postojanje regularizacionog člana koji znatno usložnjava algoritam. Eksperimentalni rezultati su pokazali da se korišćenjem superpikselske mape slike kao jednog od elemenata tenzorskog polja eliminiše potreba za regularizacionim članom, odnosno može se staviti da je $\mu = 0$.

Kombinujući matrice rastojanja iz CIE $L^*a^*b^*$ prostora boja i superpikselsku mapu slike u tenzorsko polje dobili smo novu tenzorsku nivo-skup metodu za segmentaciju slika u boji [29]. Tenzor T se dakle formira u dva koraka.

1. Da bi se naša metoda učinila otpornijom na šum i da bi se poboljšala računarska efikasnost algoritma u model smo unijeli superpikselsku mapu. Dobijena superpikselska mapa se označava sa $I^{sp}(x, y)$, a tenzor za $k = 1$ je dat sa

$$\left[T_{x,y}^{s,d,k=1}\right] = \left[I^{sp}(x, y)\right]_{S\times D}. \tag{5.3.3}$$

2. Kao u [30] u tenzorsko polje smo unijeli informaciju o boji preko matrica rastojanja iz CIE $L^*a^*b^*$ prostora boja. Matrice rastojanja su označene sa $I_i^{dist}(x, y)$, gdje je $i = 2, \ldots, m+1$, a m je jednako broju kolor markera dobijenih korišćenjem k-means algoritma. Za $k > 1$ tenzor je dat sa

$$\left[T_{x,y}^{s,d,k=i}\right] = \left[I_i^{dist}(x, y)\right]_{S\times D}. \tag{5.3.4}$$

Vrijednost parametara s i d uvijek je jedan, ali su oznake zadržane da bi se naglasila mogućnost korišćenja Gaborovih filtera.

Eliminacija regularizacionog člana smanjuje računarsku kompleksnost algoritma. Ta činjenica nam je omogućila da tenzorsku nivo-skup metodu proširimo na multifaznu tenzorsku metodu. Evolucione parcijalne diferencijalne jednačine za četiri faze (slično kao jednačine (4.7.5) i (4.7.6)) u ovom slučaju su date sa

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_1}{\partial t} &= \\ &\left\{\sum_{s=1}^{S}\alpha_s\sum_{d=1}^{D}\beta_d\sum_{d=1}^{K}\gamma_k\left[\left(T_{x,y}^{s,d,k}-c_{10}^{s,d,k}\right)^2-\left(T_{x,y}^{s,d,k}-c_{00}^{s,d,k}\right)^2\right]\right\}\cdot H(\phi_2)\\ &+\left\{\sum_{s=1}^{S}\alpha_s\sum_{d=1}^{D}\beta_d\sum_{d=1}^{K}\gamma_k\left[\left(T_{x,y}^{s,d,k}-c_{01}^{s,d,k}\right)^2-\left(T_{x,y}^{s,d,k}-c_{11}^{s,d,k}\right)^2\right]\right\}\cdot (1-H(\phi_2))\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

i

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_2}{\partial t} &= \\ &\left\{\sum_{s=1}^{S}\alpha_s\sum_{d=1}^{D}\beta_d\sum_{d=1}^{K}\gamma_k\left[\left(T_{x,y}^{s,d,k}-c_{01}^{s,d,k}\right)^2-\left(T_{x,y}^{s,d,k}-c_{00}^{s,d,k}\right)^2\right]\right\}\cdot H(\phi_1)\\ &+\left\{\sum_{s=1}^{S}\alpha_s\sum_{d=1}^{D}\beta_d\sum_{d=1}^{K}\gamma_k\left[\left(T_{x,y}^{s,d,k}-c_{10}^{s,d,k}\right)^2-\left(T_{x,y}^{s,d,k}-c_{11}^{s,d,k}\right)^2\right]\right\}\cdot (1-H(\phi_1)),\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

gdje su

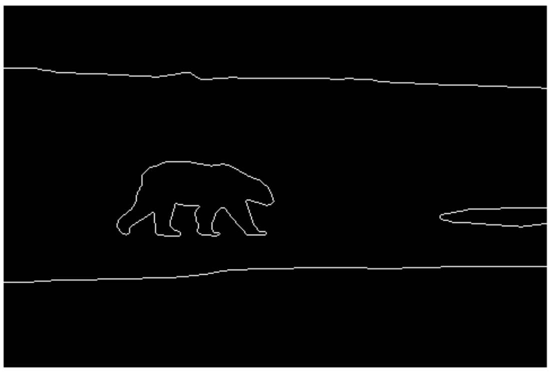
$$
\begin{aligned}
c_{00}^{s,d,k} &= \text{mean}(T_{x,y}^{s,d,k}) \text{ u } \{(x,y) : \phi_1 > 0, \phi_2 > 0\}, \\
c_{01}^{s,d,k} &= \text{mean}(T_{x,y}^{s,d,k}) \text{ u } \{(x,y) : \phi_1 > 0, \phi_2 < 0\}, \\
c_{10}^{s,d,k} &= \text{mean}(T_{x,y}^{s,d,k}) \text{ u } \{(x,y) : \phi_1 < 0, \phi_2 > 0\}, \\
c_{11}^{s,d,k} &= \text{mean}(T_{x,y}^{s,d,k}) \text{ u } \{(x,y) : \phi_1 < 0, \phi_2 < 0\}.
\end{aligned}
$$

5.3.4 Eksperimentalni rezultati

5.3.4.1 BS skup podataka

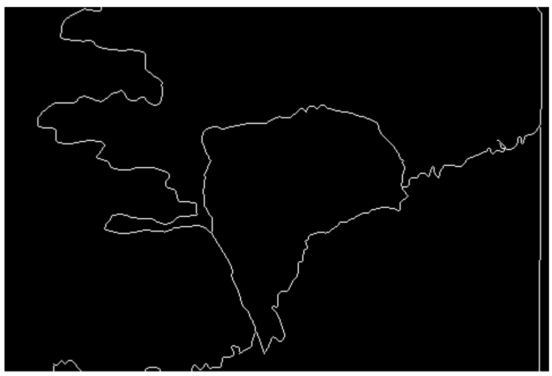
Evaluaciju predložene metode smo izvršili koristeći slike iz BS skupa podataka ili BSDS (*eng.* Berkeley Segmentation Dataset) [36]. BSDS se sastoji od 12000 ručno segmentiranih slika od strane 30 ljudskih subjekata. Polovina segmentacija je dobijena predstavljajući subjektima sliku u boji, a druga polovina predstavljajući sive slike. Javno dostupno je 300 slika, od čega je 200 slika izdvojeno kao trening skup, a ostatak od 100 slika se koristi za testiranje algoritma. Autori su koristili ove podatke za razvoj novih algoritama i benčmarka za segmentaciju [37]. Na slici 5.11 su izdvojene neke od slika iz BSDS. U lijevoj koloni su originalne slike u boji, a na desnoj su prikazane označene ivice.

(a)



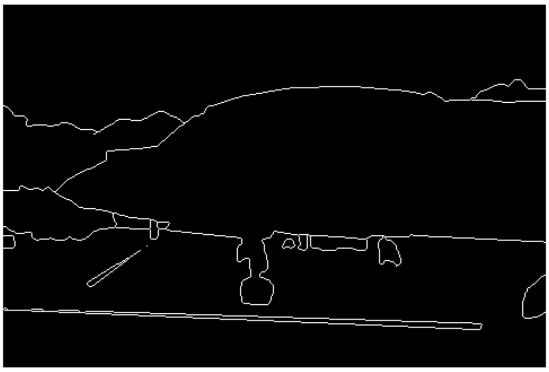
(b)

(c)



(d)

(e)

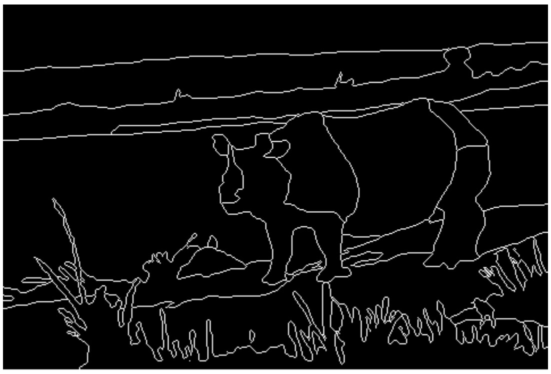


(f)

(g)

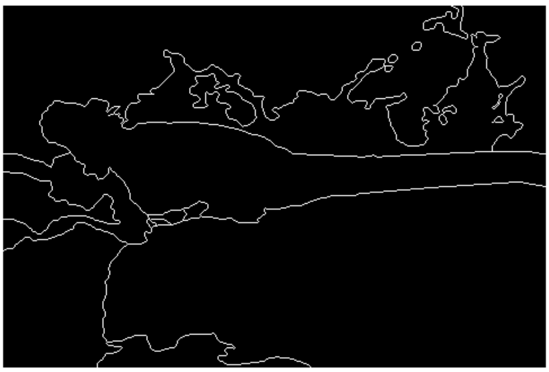
(h)

(i)

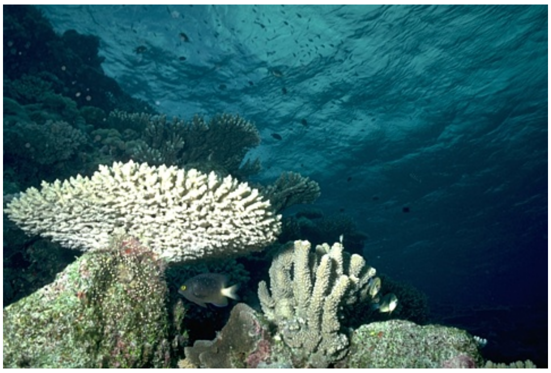


(j)

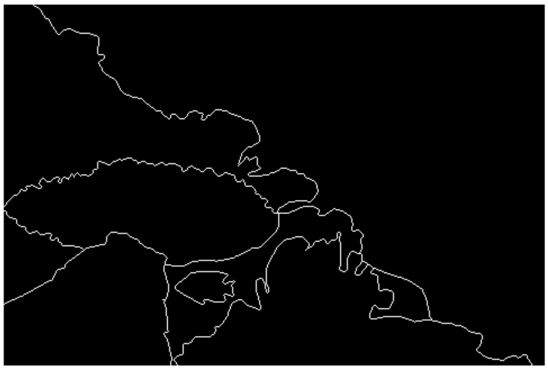
(k)



(l)

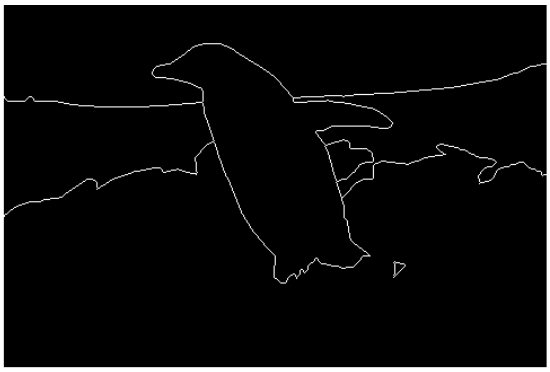


(m)



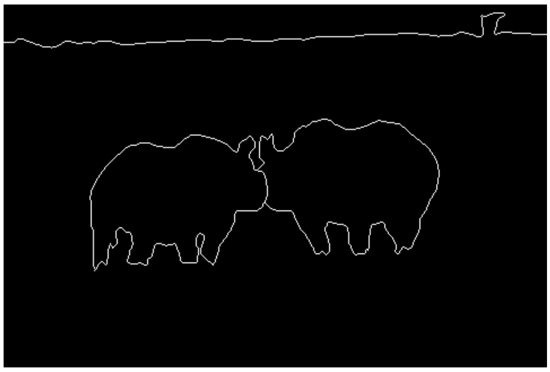
(n)

(o)



(p)

(q)



(r)

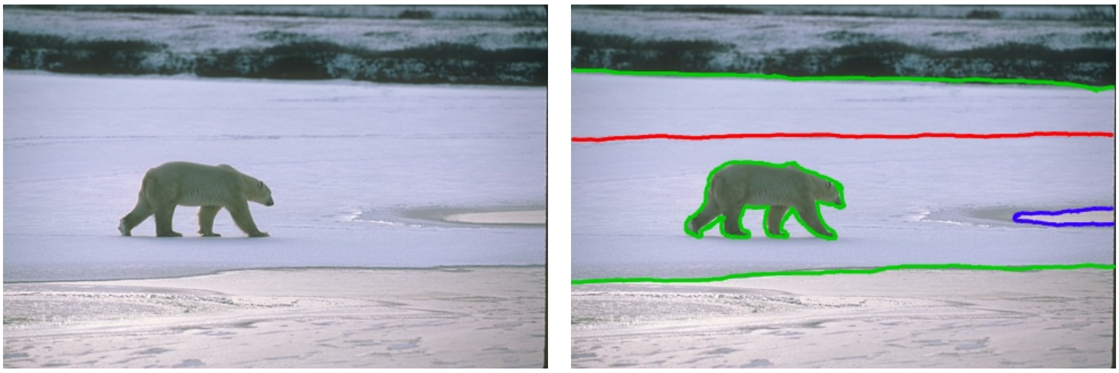
Slika 5.11: *Primjeri slika iz BS skupa podataka. U lijevoj koloni su originalne slike, a u desnoj su prikazane ivice označene od strane ljudskih subjekata.*

5.3.4.2 Dijagram preciznosti-odziva

Autori su u [36] razvili benčmark koji daje mogućnost ocjenjivanja efikasnosti algoritma za detekciju ivica, a kojeg smo i mi koristili za eksperimentalno testiranje predložene metode za segmentaciju. Benčmark omogućava sljedeće:

1. poređenje različitih algoritama za detekciju ivica i

2. poređenje performansi algoritma sa rezultatima dobijenim od strane ljudskih subjekata.



(a) (b)

Slika 5.12: *Primjer računanja preciznosti i odziva. Na slici (b) su crvenom (l_p) i zelenom (s_p) bojom označene ivice dobijene nekim detektorom ivica. Plavom bojom su označene ivice koje detektor ivica nije pronašao, a koje u stvarnosti postoje (l_n).*

Kao što je pomenuto, postoji više segmentacija za svaku sliku, koje su određene od strane različitih subjekata, pa zajedničko slaganje (*eng.* common agreement) subjekata oko postojanja ili ne postojanja označenih ivica u stvari predstavlja tačnu informaciju (*eng.* ground truth) o lokaciji ivica. Dalje, benčmark zahtijeva da algoritam za segmentaciju na izlazu daje mapu ivica, i to tako da je svaka ivica širine jednog piksela. Potrebno je da se vrijednosti piksela koji pripadaju ivici kreću od nula do jedan u slučaju mekog odlučivanja ili da imaju vrijednost jedan u slučaju tvrdog odlučivanja. Zadatak benčmarka je da odredi sa kolikom tačnošću izlaz datog algoritma za segmentaciju aproksimira tačne segmentacije. Pošto izlaz algoritma daje informaciju o postojanju ivica u određenom opsegu vrijednosti (između nula i jedan), potrebno je izvršiti poređenje na više nivoa. Za svaki nivo, računaju se dvije veličine preciznost (*eng.* precision) i odziv (*eng.* recall). Preciznost je vjerovatnoća da je detektovan stvarni granični piksel od svih piksela koji su detektovani kao granični pikseli (od kojih neki u stvarnosti i ne moraju pripadati ivicama), odnosno

$$\text{preciznost} = \frac{s_p}{s_p + l_p}, \tag{5.3.7}$$

dok je odziv vjerovatnoća da je detektovan stvarni granični piksel od svih stvarnih graničnih piksela, odnosno

$$\text{odziv} = \frac{s_p}{s_p + l_n}, \tag{5.3.8}$$

gdje su (pogledati sliku 5.12)

(a) s_p – broj piksela koje je algoritam detektovao kao ivice, a koji i u stvarnosti predstavljaju ivicu (stvarno pozitivni),

(b) l_p – broj piksela koje je algoritam detektovao kao ivice, a koji u stvarnost ne predstaljaju ivicu (lažno pozitivni),

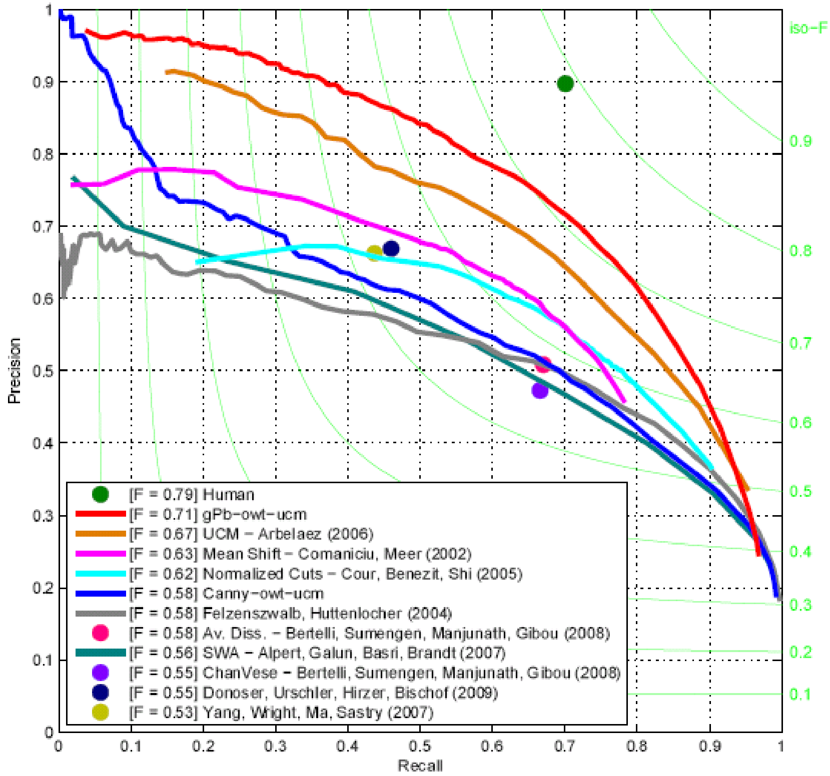
(c) l_n – broj piksela koje algoritam nije detektovao kao ivice, a koji u stvarnost predstavljaju ivicu (lažno negativni).

Sa te dvije informacije za svaki nivo formira se kriva preciznosti-odziva za dati algoritam.

Iako krive preciznosti-odziva algoritma daju veoma korisne informacije o njegovim performansama, i dalje je poželjno da se ocjena performansi algoritma svede na jedan broj. U tu svrhu se koristi F-mjera (*eng.* F-measure) koja predstavlja harmonijsku srednju vrijednost preciznosti i odziva, odnosno

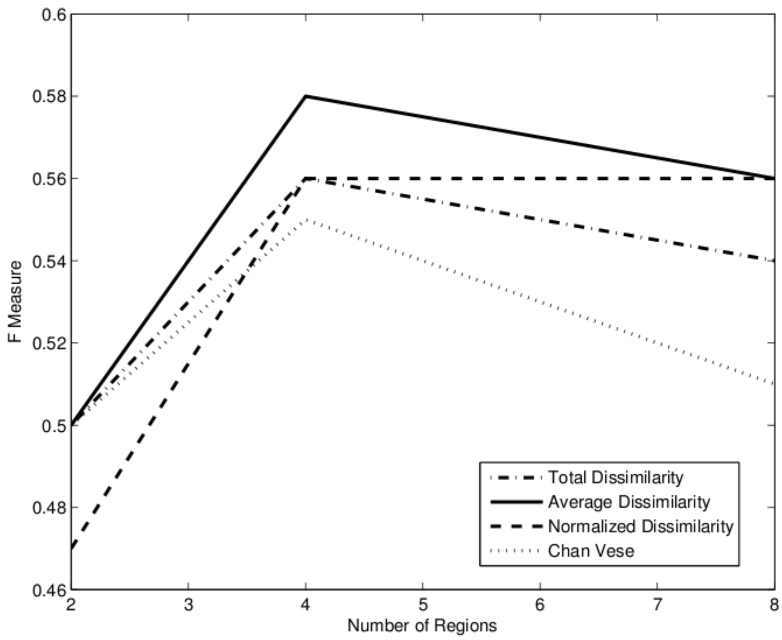
$$F = \frac{2 \cdot \text{preciznost} \cdot \text{odziv}}{\text{preciznost} + \text{odziv}}. \tag{5.3.9}$$

Autori su u [37] izvršili poređenje svih relevantnijih algoritama za segmentaciju koristeći isti testni skup slika. Rezultati istraživanja su predstavljeni dijagramom na slici 5.13. Najbolji rezultat ostvaren je algoritmom za segmentaciju predloženim od istih autora gdje F-mjera dostiže maksimalnu vrijednost 0.71. Rezultati dobijeni nivo-skup metodama su označeni crvenom i ljubičastom tačkom. Za nivo-skup algoritme nije moguće proizvesti krivu precniznosti-odziva jer su izlazi algoritma za segmentaciju binarne slike, odnosno nije moguće definisati pragove od čije vrijednosti će zavisiti da li piksel pripada ivici.



Slika 5.13: *Evaluacija alogoritama za segmentaciju na BS skupu slika. U prikazanoj tabeli, algoritmi su rangirani prema maksimalno dostignutoj F-mjeri. Iso-F krive su prikazane zelenim linijama, dok je prosječno slaganje između segmentacija određenih od strane ljudskih subjekata prikazano zelenom tačkom.*

Nivo-skup metoda koja je postigla najbolji rezultat u segmentaciji opštih slika iz BS skupa je predstavljena u radu [34], a koji se oslanja na rezultate dobijene u [38]. U suštini autori u tom radu predlažu tri algoritma zasnovana na totalnoj (*eng.* Total), prosječnoj (*eng.* Average) i normalizovanoj (*eng.* Normalized) različitosti (*eng.* Dissimilarity) između piksela. Autori takođe koriste superpikselsku mapu da bi pojednostavili evolucionu jednačinu. U ovom slučaju evoluciona jednačina se ne oslanja na Chan-Veseov model i postignuta maksimalna F-mjera, i to za algoritam zasnovan na prosječnoj različitosti između piksela, u tom slučaju iznosi $F = 0,58$. Evaluacijom algoritma na skupu od 100 slika iz BS skupa podataka autori su rezultate predstavili dijagramom prikazanim na slici 5.14.

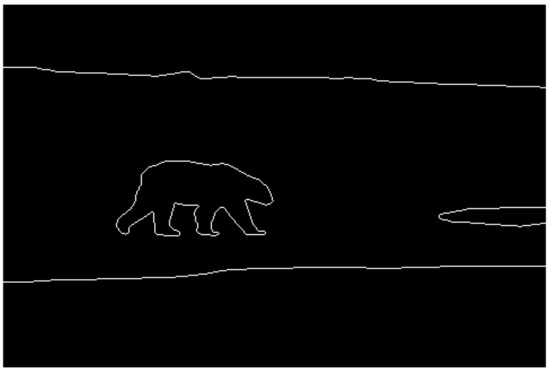


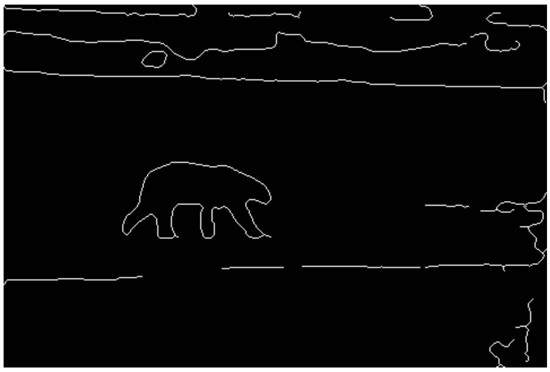
Slika 5.14: *Graf F-mjere za algoritme zasnovane na totalnoj, prosječnoj i normalizovanoj različitosti piksela u poređenju sa Chan-Veseovom metodom.*

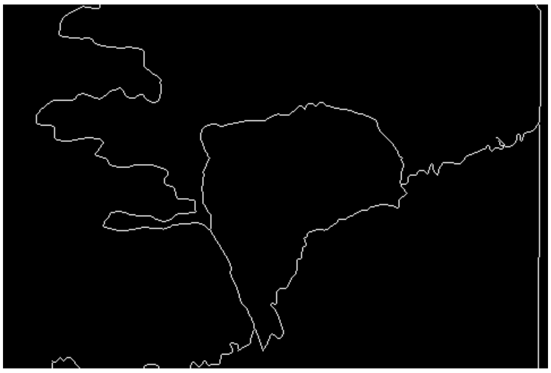
5.3.4.3 Evaluacija predložene metode

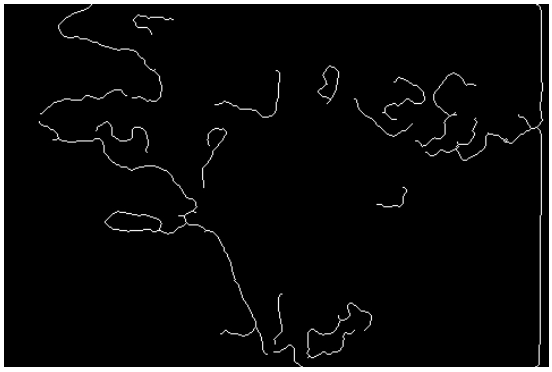
Evaluaciju metode koja je predložena u ovom radu smo takođe izvršili nad slikama is BS skupa. Na slici 5.13 su prikazane neke od segmentacija koje smo dobili. U lijevoj koloni su segmentacije koje su dali ljudski subjekti, dok su u desnoj koloni rezultati koje daje naša metoda za segmentaciju.

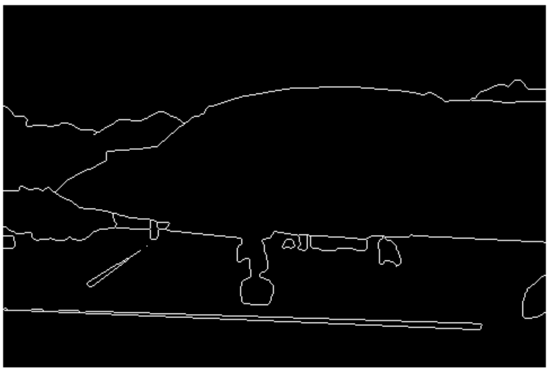
Analizirajući rezultate segmentacije na skupu od 100 slika is BS skupa formirali smo dijagram preciznosti-odziva koji je prikazan na slici 5.14. Postigli smo maksimalnu F-mjeru jednaku $F = 0,63$. U odnosu na do sada najbolji algoritam za segmentaciju, a koji je zasnovan na nivo-skup metodi [34], naš rezultat predstavlja značajan napredak u dostizanju maksimalno moguće F-mjere.

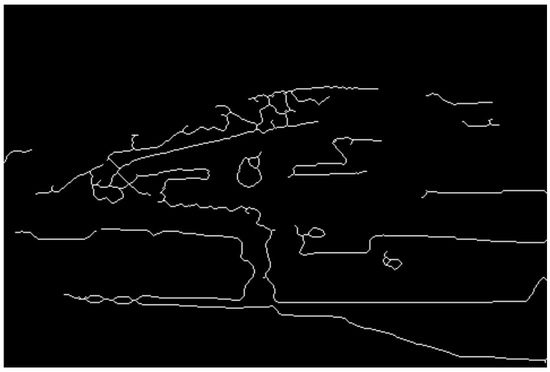

(a)


(b)

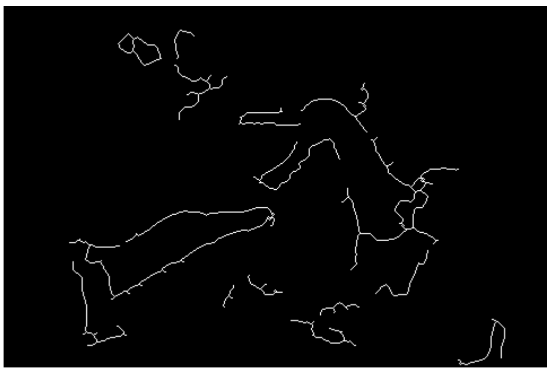

(c)

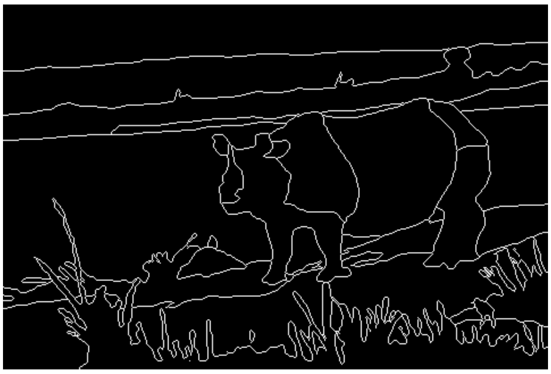

(d)


(e)

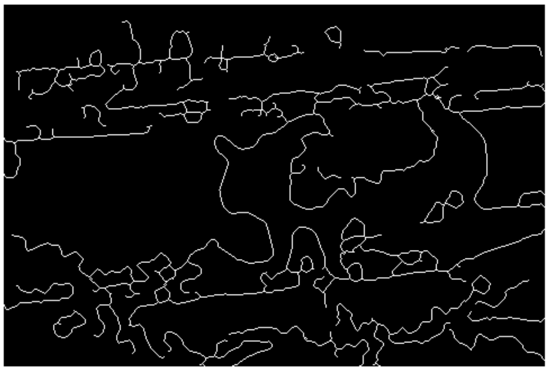

(f)


(g)

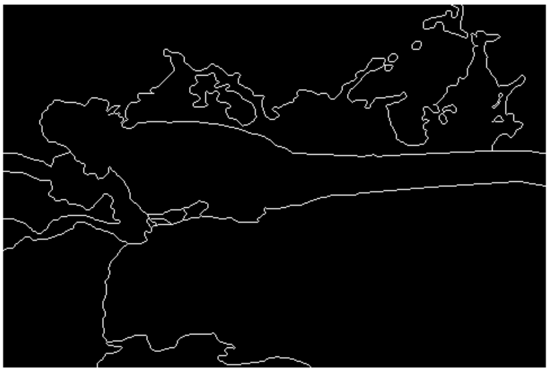

(h)



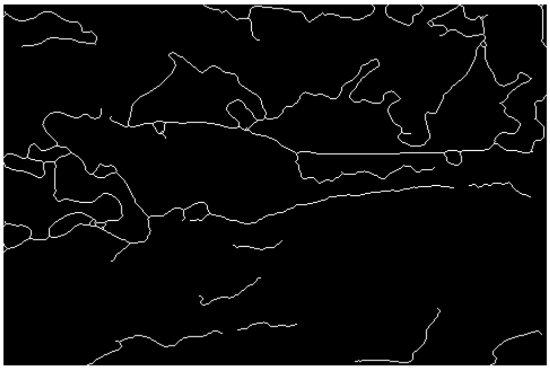
(i)



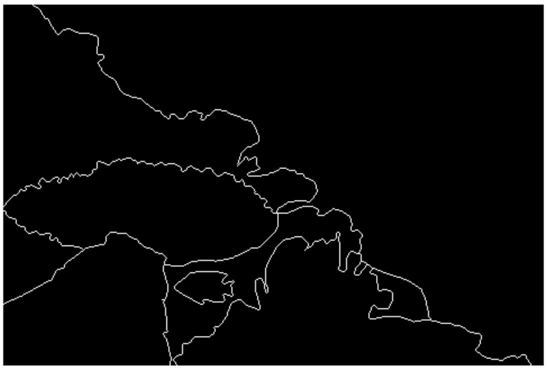
(j)



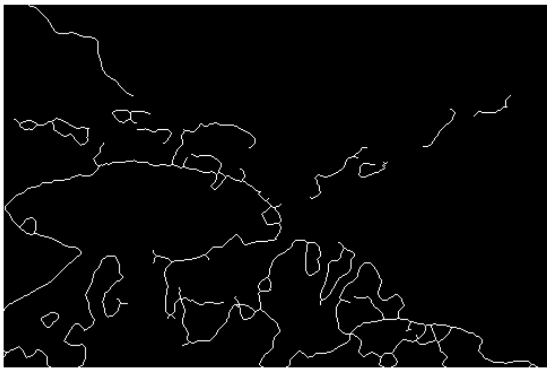
(k)



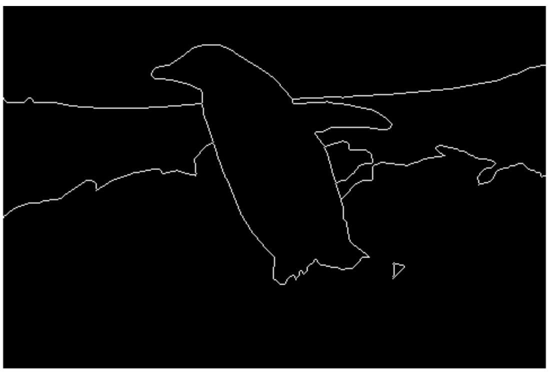
(l)



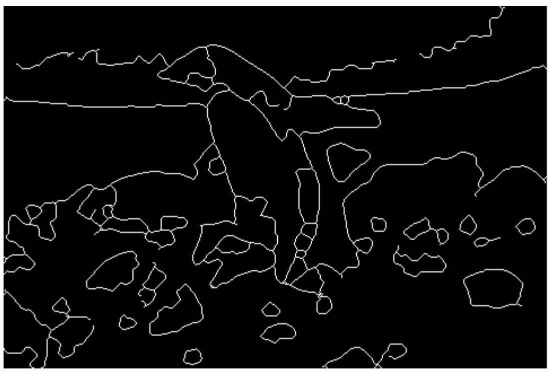
(m)



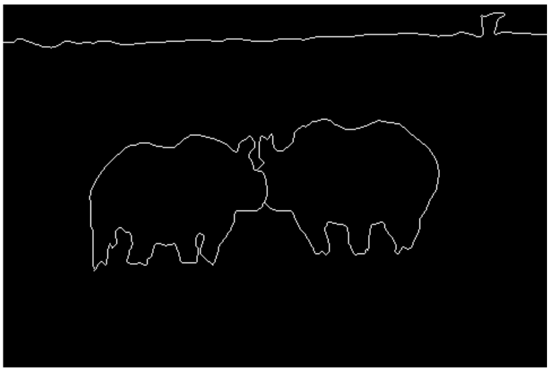
(n)



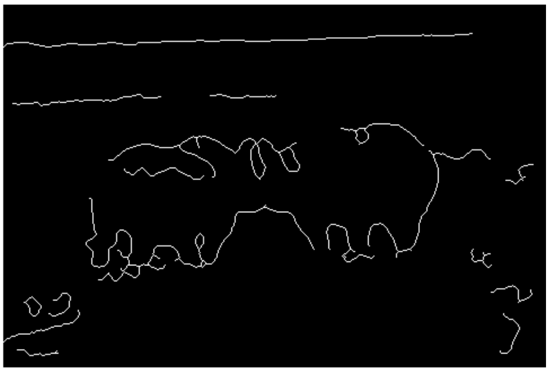
(o)



(p)

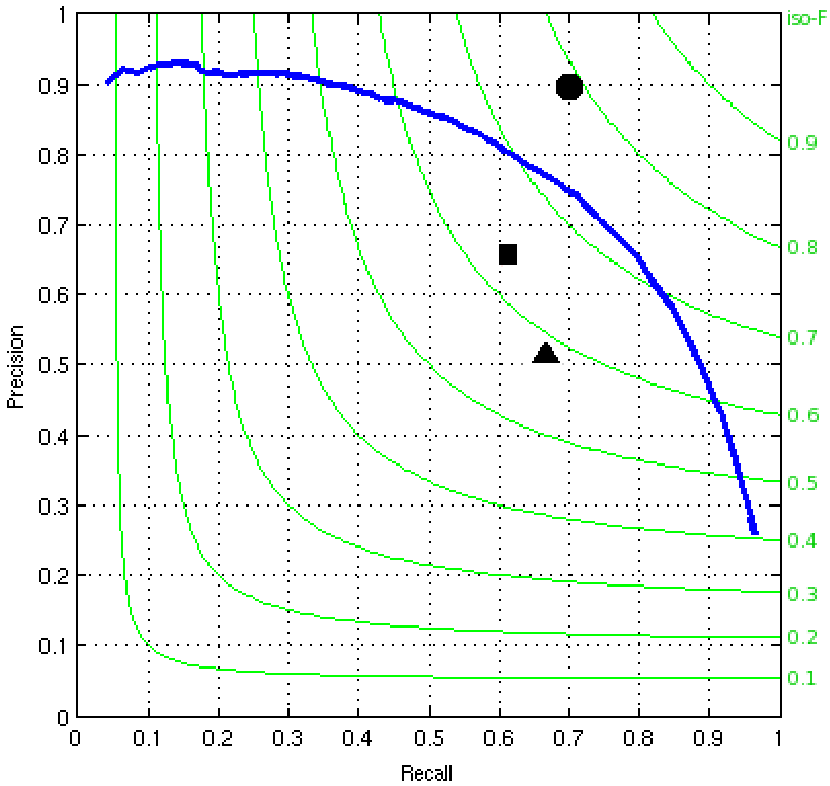


(q)



(r)

Slika 5.13: *Primjeri segmentacija dobijeni predloženom metodom za segmentaciju. U lijevoj koloni su segmentacije koje su dali ljudski subjekti, dok su u desnoj koloni rezultati koje daje naša metoda za segmentaciju.*



Slika 5.14: *Dijagram preciznosti-odziva za metodu predloženu u ovom radu i poređenje sa nekim poznatijim metodama za segmentaciju. Tačka označava prosječno slaganje između segmentacija određenih od strane ljudskih subjekata. Plava linija je dobijena korišćenjem algoritma datog u [37], a koji se danas smatra najboljim algoritmom za segmentaciju. Pravouganik označava F-mjeru dobijenu našom metodom, dok trougao predstavlja rezultate jednog od najboljih alogritma za segmentaciju zasnovanog na nivo-skup metodi [34].*

6. Zaključak

U ovom radu predstavljena je metoda za segmentaciju slika u boji primjenom varijacionog računa i teorije parcijalnih diferencijalnih jednačina. Metode zasnovane na ovim teorijama imaju dosta dobrih karakteristika, od kojih su neke: dobra otpornost na šum, široka mogućnost primjene, jednostavno proširenje algoritma na tri dimenzije i mogućnost vizualizacije procesa segmentacije. Međutim, ove metode u prošlosti nisu davale zadovoljavajuće rezultate pri segmentaciji opštih slika jer je usljed kompleksne strukture evolucione jednačine bilo potrebno vršiti podešavanje parametara za svaku sliku pojedinačno. Pokazano je da se uključivanjem većeg broja informacija o slici (a pogotovo informacija o teksturi) u samu evolucionu jednačinu može postići određeni napredak pri segmentaciji sivih slika i slika u boji.

Kombinacijom različitih informacija o slici u multifaznu nivo-skup jednačinu pokazano je da se efikasnost predložene metode za segmentaciju može povećati i približiti danas vodećim algoritmima za segmentaciju. Predloženom metodom se takođe prevazilaze određeni problemi koji su uslovljeni kompleksnošću evolucione jednačine što predloženu metodu čini korisnom i za automatsku segmentaciju slika. Proširenje nivo-skup metode na slike u boji izvršeno je korišćenjem matrica rastojanja u CIE $L^*a^*b^*$ prostoru boja. Ovaj prostor je izuzetno pogodan za ovu primjenu zbog karakteristike CIE $L^*a^*b^*$ prostora da se svaka perceptualna razlika između dvije boje iz tog prostora može dobro aproksimirati računanjem euklidskog rastojanja između njih. Automatskim izborom kolor markera korišćenjem k-means algoritma formiraju se matrice rastojanja koje se dalje koriste prilikom formiranja tenzorskog polja. Informacije o nivou sivila piksela nakon konverzije RGB slike u sivu sliku su u algoritam unesene kao superpikselska mapa. U literaturi je pokazano da superpikselska mapa nosi dovoljnu količinu informacija o lokaciji ivica na slici, tačnije pokazano je da na slikama veličine 240×160 izbor od 200 superpiksela daje zadovoljavajuće rezultate. Formiranje superpikselske mape vrši se kao pretprocesorski korak, što sa stanovišta vremenske dužine izvršavanja algoritma predstavlja izvjestan nedostatak. Konačno, izvedenim informacijama sa slike formira se evoluciona parcijalna diferencijalna jednačina koja se dalje rješava numeričkom metodom konačnih razlika. Stacionarno stanje evolucione jednačine predstavlja i krajnji rezultat segmentacije.

Predložena metoda je implementirana u MATLAB programskom okruženju. Eksperimentalno testiranje metode je izvršeno na skupu od 100 slika u boji iz BS skupa podataka. Veličina svake ulazne slike je 480×320 piksela. Superpikselska mapa se sastoji od 1000 superpiksela, a izbor kolor markera se vrši automatski korišćenjem k-means algoritma, pri čemu je uzeto da je $k = 4$. Za svaku sliku iz testnog skupa računa se F-mjera, a maksimalnu F-mjeru koju smo postigli na izabranom skupu podataka je $F = 0,63$. Pokazano je da predložena metoda postiže znatno bolje rezultate nego do sada predstavljene metode zasnovane na nivo-skup metodi. U poređenju sa nekim drugim naprednijim algoritmima koji koriste tehnike vještačke inteligencije predložena metoda je postigla uporedive rezultate. Time smo ovim radom pokazali da segmentacione metode zasnovane na varijacionom računu i teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina još uvijek imaju dosta prostora za razvoj i ne moraju kao do sada biti ograničene samo na specifične primjene.

Literatura

[1] Oleg Alexandrov. An illustration of the level set method. `http://en.wikipedia.org/wiki/Level_set_method`, novembar 2004.

[2] V. P. Mikhailov. *Partial Differential Equations*. MIR Publishers Moscow, 1978.

[3] L.C. Evans and R.F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. CRC Press Inc., 1992.

[4] N. Fusco L. Ambrosio and D. Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford University Press, USA, 2000.

[5] G. Buttazzo H. Attouch and G. Michaille. *Variational analysis in Sobolev and BV spaces: applications to PDEs and optimization*, volume 6. Society for Industrial Mathematics, 2006.

[6] Momir V. Ćelić. *Matematika II - Obične diferencijalne jednačine. Višestruki integrali. Vektorska Analiza. Kompleksna analiza. Furijeova analiza.* Abacus sistemi Banja Luka, Vojvode Ž. Mišića 25, 1997.

[7] B. Dacorogna. *Introduction to the Calculus of Variations*. Imperial College Pr, 2004.

[8] S. Geman and D. Geman. Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(6):721–741, 1984.

[9] J.W. Gibbs. *Elementary principles in statistical mechanics*. Ox Bow Press, 1981.

[10] M. Ćelić i M. Jovanović. *Matematika III - Uvod u numeričku matematiku. Osnove teorije vjerovatnoće i matematičke statistike*. IDP Naučna knjiga Beograd, 1990.

[11] G. Aubert and P. Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations (second edition)*, volume 147 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 2006.

[12] Dušan B. Drajić. *Uvod u statističku teoriju telekomunikacija*. Akademska misao Beograd, 2003.

[13] D. Mumford and J. Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on pure and applied mathematics*, 42(5):577–685, 1989.

[14] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of computational physics*, 79(1):12–49, 1988.

[15] J. A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods.* Cambridge University Press, 1999.

[16] S. J. Osher and R. Fedkiw. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces.* Springer, 2002.

[17] A Witkin W. Kass and D. Terzopoulos. Snakes: Active contour models. *International journal of computer vision*, 1(4):321–331, 1988.

[18] R. Kimmel V. Caselles and G. Sapiro. Geodesic active contours. *International journal of computer vision*, 22(1):61–79, 1997.

[19] Chunming Li, Chenyang Xu, Changfeng Gui, and Martin D. Fox. Level set evolution without re-initialization: A new variational formulation. In *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2005. CVPR 2005.*, volume 1, pages 430–436. IEEE, 2005.

[20] T.F. Chan and L.A. Vese. Active Contours Without Edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(2):266–277, 2001.

[21] L. Debnath. *Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers.* Birkhauser, 2005.

[22] B. Yezrielev Sandberg Tony F. Chan and Luminita A. Vese. Active contours without edges for vector-valued images. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 11:130–141, 2000.

[23] L.A. Vese and T.F. Chan. A multiphase level set framework for image segmentation using the mumford and shah model. *International Journal of Computer Vision*, 50:271–293, 2002.

[24] F. Gibou L. Bertelli, S. Chandrasekaran and B.S. Manjunath. On the Length and Area Regularization for Multiphase Level Set Segmentation. *International journal of computer vision*, pages 1–16, 2010.

[25] J.E. Marsden R. Abraham and T.S. Rațiu. *Manifolds, tensor analysis, and applications*, volume 75. Springer, 1988.

[26] A.I. Borisenko and I.E. Tarapov. *Vector and tensor analysis with applications.* Dover Publications, Inc. New York, 1979.

[27] D. Tao B. Wang, X. Gao and X. Li. A unified tensor level set for image segmentation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 40:857–867, June 2010.

[28] J.G. Daugman. Two-dimensional spectral analysis of cortical receptive field profiles. *Vision research*, 20(10):847–856, 1980.

[29] Vladimir Lekić and Zdenka Babić. Multiphase tensor level-set method for segmentation of natural images. In Ryszard Choras, editor, *Image Processing and Communications Challenges 3*, volume 102 of *Advances in Intelligent and Soft Computing*, pages 77–84. Springer Berlin / Heidelberg, 2011.

[30] Vladimir Lekić and Zdenka Babić. Tenzorska level-set metoda za segmentaciju slika u boji. In *55th Conference for Electronics, Telecommunications, Computers, Automatic Control and Nuclear Engineering - ETRAN*, 2011.

[31] Rafael C. Gonzalez and Paul Wintz. *Digital Image Processing (2nd Ed.)*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1987.

[32] A. C. Bovik. *Handbook of Image and Video Processing*. Elsevier, 2005.

[33] F. Gibou and R. Fedkiw. A fast hybrid k-means level set algorithm for segmentation. In *4th Annual Hawaii International Conference on Statistics and Mathematics*, pages 281–291. Citeseer, 2005.

[34] L. Bertelli, B. Sumengen, BS Manjunath, and F. Gibou. A variational framework for multiregion pairwise-similarity-based image segmentation. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, pages 1400–1414, 2007.

[35] X. F. Ren and J. Malik. Learning a classification model for segmentation. In *ICCV*, pages 10–17, 2003.

[36] D. Martin, C. Fowlkes, D. Tal, and J. Malik. A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics. In *Proc. 8th Int'l Conf. Computer Vision*, volume 2, pages 416–423, July 2001.

[37] C. Fowlkes P. Arbeláez, M. Maire and J. Malik. Contour Detection and Hierarchical Image Segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2010.

[38] M. Zuliani L. Bertelli and B.S. Manjunath. Pairwise Similarities across Images for Multiple View Rigid/Non-Rigid Segmentation and Registration. In *IEEE 11th International Conference on Computer Vision, 2007. ICCV 2007.*, pages 1–8. IEEE, 2007.