1 Određivanje odziva na proizvoljnu pobudu

1.1 Superpozicioni integral

Vidjeli smo da je stepenastu pobudu moguće predstaviti linearnom kombinacijom pomjerenih Hevisajdovih funkcija. Kako bismo došli do superpozicionog integrala, aproksimiraćemo proizvoljnu kauzalnu pobudu linearnom kombinacijom Hevisajdovih funkcija. Pobudu $u_g(t)$ nazivamo *kauzalnom* ako je $u_g(t) = 0$ za $t < 0$. Svojstvo kauzalnosti se povezuje i sa električnim mrežama, odnosno, sistemima u najširem smislu. Za sistem kažemo da je kauzalan ako odziv u proizvoljnom trenutku t zavisi samo od pobude koja je djelovala prije trenutka t, a ne od pobude koja se uključuje nakon trenutka t. Drugim riječima, odziv ne može prethoditi pobudi.

Neka je data kauzalna pobuda koja se uključuje u linearnoj i vremenski nepromjenljivoj mreži

$$u_g(t) = z(t)\,h(t)\,, \tag{1}$$

pri čemu je $z(t)$ neprekidna funkcija. Ova pobuda je prikazana na Slici. Neka ova pobuda rezultuje odzivom $i(t)$. Ovu pobudu možemo aproksimirati stepenastom funkcijom $u_{ga}(t)$ koju dobijamo tako što interval $(0,t)$ podijelimo na N podintervala $(0,t_1),(t_1,t_2),\ldots,(t_{N-1},t)$. Neka je $t_N = t$ i neka su svi podintervali jednake širine $\Delta\tau$. Tada je

$$t_k = k\Delta\tau, k = 1,\ldots,N. \tag{2}$$

Označimo

$$\Delta U^{(k)} = z(t_k) - z(t_{k-1})\,,\ k = 1,\ldots,N. \tag{3}$$

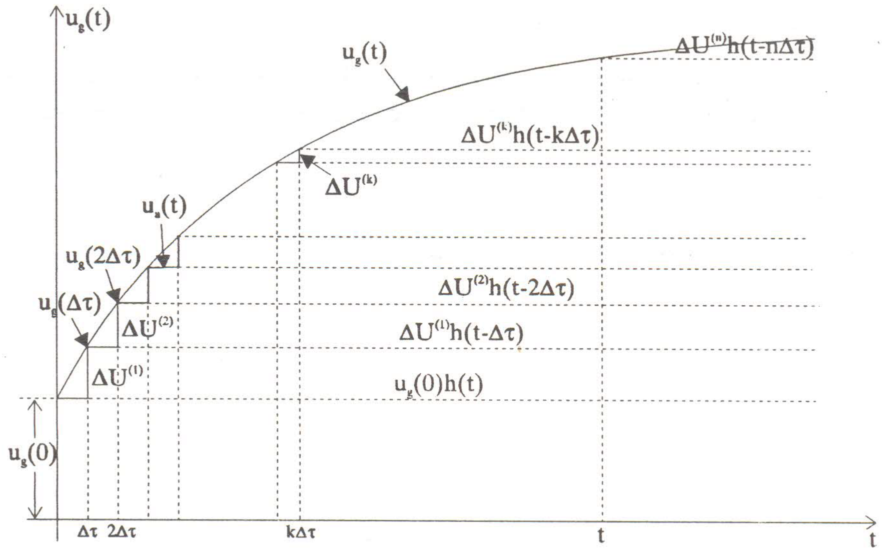
Sada se $u_{ga}(t)$ može napisati u obliku

$$\begin{aligned} u_{ga}(t) &= z(0)\,h(t) + \sum_{k=1}^{N} \Delta U^{(k)} h(t - k\Delta\tau) = \\ &= z(0)\,h(t) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\Delta U^{(k)}}{\Delta\tau} h(t - k\Delta\tau)\,\Delta\tau. \end{aligned} \tag{4}$$

Kada se povećava broj podintervala $N \to 0$, njihova širine se smanjuje $\Delta\tau \to 0$ i stepenasta funkcija teži stvarnoj pobudi $u_g(t)$ i može se prikazati kao

$$u_g(t) = \lim_{\Delta\tau\to 0} u_{ga}(t) = z(0)\,h(t) + \int_0^t z'(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau, \tag{5}$$

gdje je sa $z'(t) = \frac{dz(t)}{dt}$ označen izvod funkcije $w(t)$.



Slika 1: Aproksimacija pobude stepenastom funkcijom.

Odziv na stepenastu pobudu (4) na osnovu linearnosti i vremenske nepromjenljivosti mreže se može prikazati u obliku

$$\begin{aligned} i_a(t) &= z(0)\, f(t) + \sum_{k=1}^{N} \Delta U^{(k)} f(t - k\Delta\tau) = \\ &= z(0)\, f(t) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\Delta U^{(k)}}{\Delta\tau} f(t - k\Delta\tau)\, \Delta\tau, \end{aligned} \tag{6}$$

gdje je sa $f(t)$ označena indiciona funkcija mreže. Kada $\Delta\tau \to 0$, odziv na stepenastu pobudu teži odzivu $i(t)$

$$i(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} i_a(t) = z(0)\, f(t) + \int_0^t z'(\tau)\, f(t-\tau)\, d\tau. \tag{7}$$

Pošto se indiciona funkcija kauzalne mreže može napisati u obliku

$$f(t) = \varphi(t)\, h(t), \tag{8}$$

odziv se može predstaviti u obliku

$$i(t) = \left[z(0)\, \varphi(t) + \int_0^t z'(\tau)\, \varphi(t-\tau)\, d\tau \right]. \tag{9}$$

Izraz (9) naziva se *superpozicioni integral (prve vrste)* ili *Duhamelov integral.* Ovaj integral je moguće prikazati i u drugim oblicima. Smjenom $\theta = t - \tau$ se dobija

$$i(t) = z(0)\varphi(t) + \int_0^t z'(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{10}$$

Parcijalnom integracijom (9) dobija se

$$\begin{aligned} i(t) &= z(0)\varphi(t) + z(\tau)\varphi(t-\tau)\big|_0^t + \int_0^t z(\tau)\varphi'(t-\tau)\,d\tau = \\ &= z(t)\varphi(0) + \int_0^t z(\tau)\varphi'(t-\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{11}$$

Smjenom $\theta = t - \tau$ u (11) dobija se

$$i(t) = z(t)\varphi(0) + \int_0^t z(t-\tau)\varphi'(\tau)\,d\tau. \tag{12}$$

Konačno, primjenom Lajbnicove formule za izvod integrala dobija se

$$i(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t z(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau, \tag{13}$$

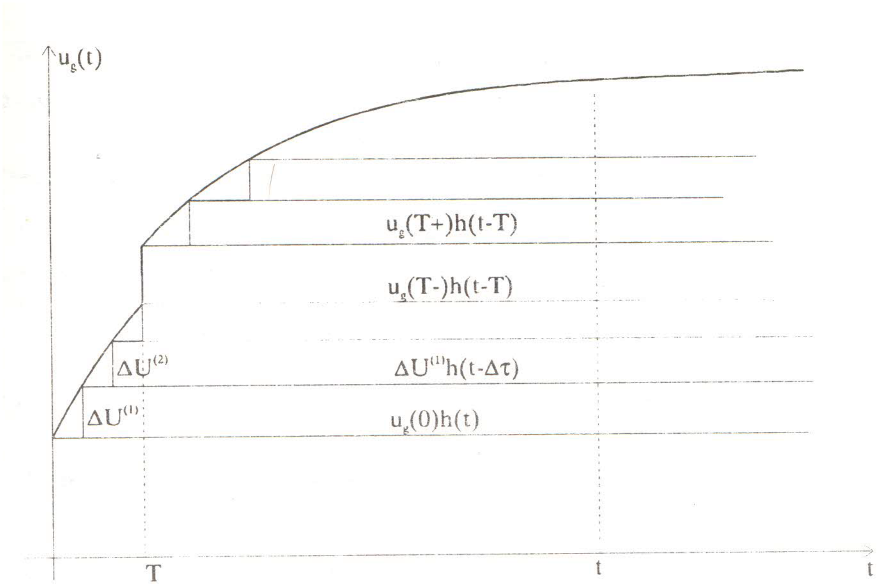
$$i(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t z(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \tag{14}$$

Navedeni oblici superpozicionog integrala su ekvivalentni i može se koristiti onaj kojim se najlakše dolazi do rješenja. U nekim slučajevima potrebno je, međutim, biti pažljiv. Ako, na primjer, pobuda ima skok (prekid prve vrste) u $t = T$, (9) će biti nešto drugačijeg oblika. U ovom slučaju se stepenasta pobuda može napisati u obliku

$$\begin{aligned} u_{ga}(t) &= z(0)h(t) + \sum_{k=1}^{M} \Delta U^{(k)} h(t - k\Delta\tau) + \\ &+ \left[z\left(T^+\right) - z\left(T^-\right)\right] h(t-T) + \sum_{k=M+1}^{N} \Delta U^{(k)} h(t - k\Delta\tau). \end{aligned} \tag{15}$$

U graničnom slučaju kada $\Delta\tau \to 0$ dobijamo

$$\begin{aligned} u_g(t) &= z(0)h(t) + \int_0^T z'(\tau)h(t-\tau)\,d\tau + \\ &+ \left[z\left(T^+\right) - z\left(T^-\right)\right] h(t-T) + \int_T^t z'(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \end{aligned} \tag{16}$$



Slika 2: Aproksimacija pobude sa skokom stepenastom funkcijom.

Odziv je

$$\begin{aligned} u_g(t) = z(0)\,\varphi(t) + \int_0^T z'(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau + \\ + \left[z\left(T^+\right) - z\left(T^-\right)\right]\varphi(t-T) + \int_T^t z'(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau \end{aligned} \tag{17}$$

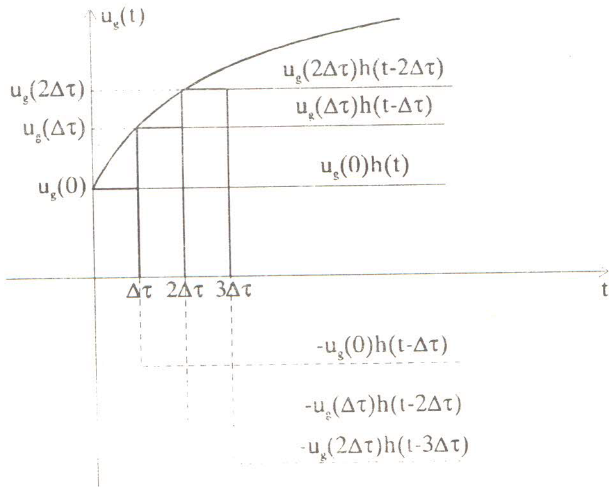
2 Konvolucioni integral

Pobudu $u_g(t) = z(t)\,h(t)$ je moguće aproksimirati i linearnom kombinacijom pravougaonih impulsa koji imaju nenultu vrijednost u intervalima (t_k, t_{k+1}), $k = 0, \ldots, N-1$, pri čemu smatramo da je $t_k = k\Delta\tau$

$$\begin{aligned} u_{ga}(t) &= \sum_{k=0}^{N-1} z(k\Delta\tau)\left[h(t-k\Delta\tau) - h(t-(k+1)\Delta\tau)\right] = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} z(k\Delta\tau)\,\frac{\left[h(t-k\Delta\tau) - h(t-(k+1)\Delta\tau)\right]}{\Delta\tau}\Delta\tau. \end{aligned} \tag{18}$$

Kada se trajanje impulsa skraćuje $\Delta\tau \to 0$, u graničnom slučaju se dobija

$$u_g(t) = \int_0^t z(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau. \tag{19}$$



Slika 3: Aproksimacija pobude pravougaonim impulsima.

Odziv na pobudu (18) je dat sa

$$\begin{aligned} i_a(t) &= \sum_{k=0}^{N-1} z(k\Delta\tau)\left[f(t-k\Delta\tau) - f(t-(k+1)\Delta\tau)\right] = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} z(k\Delta\tau)\frac{\left[f(t-k\Delta\tau) - f(t-(k+1)\Delta\tau)\right]}{\Delta\tau}\Delta\tau, \end{aligned} \tag{20}$$

gdje je $f(t)$ indiciona funkcija mreže. Kada se trajanje impulsa skraćuje, u graničnom slučaju odziv je

$$i(t) = \int_0^t z(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau, \tag{21}$$

gdje je $g(t)$ impulsni odziv, odnosno, Grinova funkcija mreže. Integral (21) se naziva *konvolucioni integral*, *superpozicioni integral druge vrste* ili *Fredholmov integral*.

Smjenom promjenljivih konvolucioni integral se može predstaviti i u obliku

$$i(t) = \int_0^t z(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau. \tag{22}$$

Konvolucioni integrali dati (21) i (22) su izvedeni pod pretpostavkom da su pobuda i električno kolo kauzalni. Međutim, konvolucioni integral se može poopštiti i na slučaj nekauzalne pobude i električnog kola

$$i(t) = u_g(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_g(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u_g(t-\tau)\, g(\tau) \tag{23}$$

Prethodnom jednačinom je definisana operacija *konvolucije* dva signala.

Superpozicioni i konvolucioni integral su međusobno ekvivalentni. Indiciona funkcija mreže je data sa

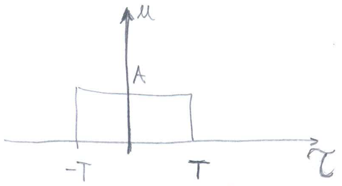
$$f\,(t) = \varphi\,(t)\,h\,(t)\,. \tag{24}$$

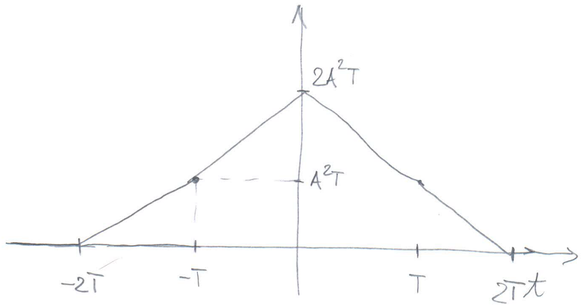
Grinova funkcija je tada

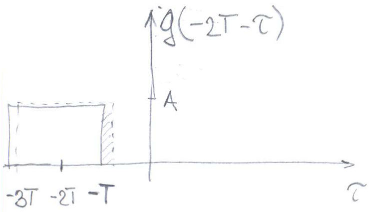
$$g\,(t) = \varphi'\,(t)\,h\,(t) + \varphi\,(0)\,\delta\,(t)\,. \tag{25}$$

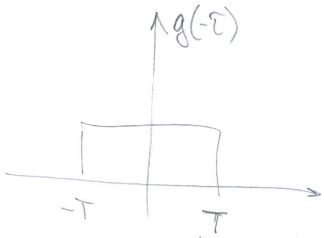
Konvolucioni integral je sada

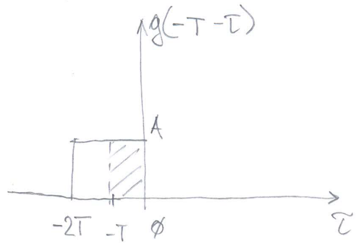
$$\begin{aligned} i\,(t) &= \int_0^t z\,(\tau)\,[\varphi'\,(t-\tau)\,h\,(t-\tau) + \varphi\,(0)\,\delta\,(t-\tau)]\,d\tau = \\ &= \varphi\,(0)\int_0^t z\,(\tau)\,\delta\,(t-\tau) + \int_0^t z\,(\tau)\,\varphi'\,(t-\tau)\,d\tau = \\ &= \varphi\,(0)\,z\,(t) + \int_0^t z\,(\tau)\,\varphi'\,(t-\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{26}$$

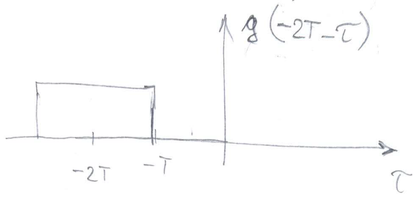

u
A
-T
T
τ

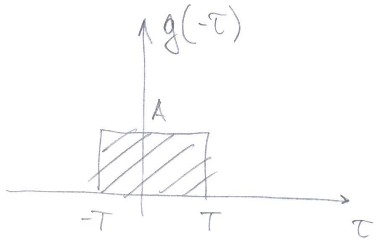

2A²T
A²T
-2T
-T
T
2T
t

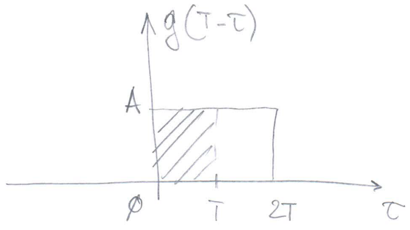

g(-2T-τ)
A
-3T
-2T
-T
τ

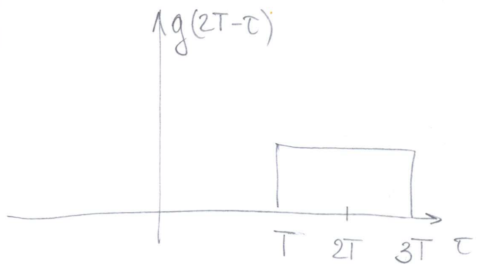

g(-τ)
-T
T

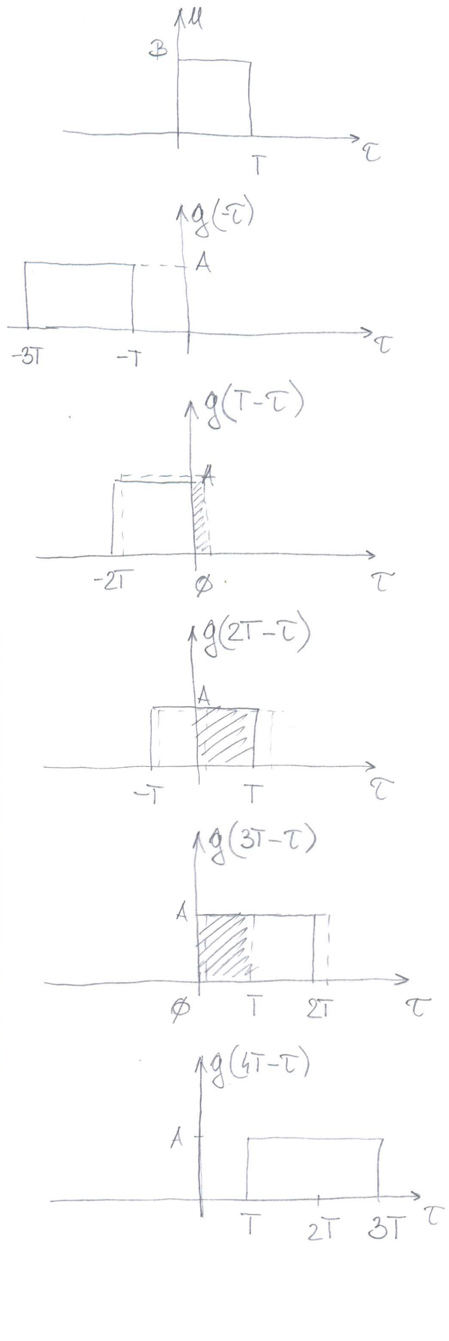

g(-T-τ)
A
-2T
-T
0
τ

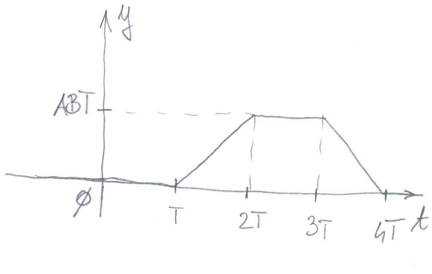

g(-2T-τ)
-2T
-T
τ


g(-τ)
A
-T
T
τ


g(T-τ)
A
0
T
2T
τ


g(2T-τ)
T
2T
3T
τ


u
B
T
τ
g(-τ)
A
-3T
-T
τ
g(T-τ)
A
-2T
ø
τ
g(2T-τ)
A
-T
T
τ
g(3T-τ)
A
ø
T
2T
τ
g(4T-τ)
A
T
2T
3T
τ


y
ABT
ø
T
2T
3T
4T
t