

Analiza mreža u frekvencijskom domenu

23. decembar 2015

U ovom poglavlju ćemo se okrenuti analizi prinudnog odziva mreža na prostoperiodičnu pobudu, odnosno, analizi linearnih, vremenski nepromjenljivih, mreža u *ustaljenom prostoperiodičnom režimu*. U pasivnoj mreži sopstveni odziv iščezava s vremenom, a prinudni traje do naredne promjene u kolu tako da je od značaja proučavati prinudne odzive. Motivacija za analizu mreža u ustaljenom prostoperiodičnom režimu potiče iz upotrebe naizmjenične struje u elektroenergetskom sistemu kao i primjena u telekomunikacijama i obradi audio signala. Kao što smo već vidjeli, izračunavanja u ovom slučaju se mogu olakšati upotrebom kompleksnih predstavnika (fazora) napona i struja u kolu (Charles P. Steinmetz, 1893). Fazor je transformisana reprezentacija prostoperiodičnog napona ili struje i sadrži informacije o amplitudi i fazi sinusoide. Odnos fazora napona i struje nekog elementa je *impedansa* elementa. Odnos fazora struje i napona nekog elementa je *admitansa* elementa. Uvođenjem fazora se rješavanje diferencijalnih jednačina kojima je opisano kolo svodi na rješavanje algebarskih jednačina. Za fazore važe Omov zakon, Kirhofovi zakoni, Tevenenova i Nortonova teorema, itd.

1 Frekvencijska karakteristika mreže

Za određivanje prinudnog odziva na prostoperiodičnu pobudu važnu ulogu igra *kompleksna funkcija mreže*. Kompleksna funkcija mreže je ranije definisana, ali ovdje ćemo ponoviti njenu definiciju. Neka se kolo pobuđuje kompleksnim prostoperiodičnim generatorom oblika

$$\underline{x}(t) = \underline{X}_m e^{j\omega t}. \quad (1)$$

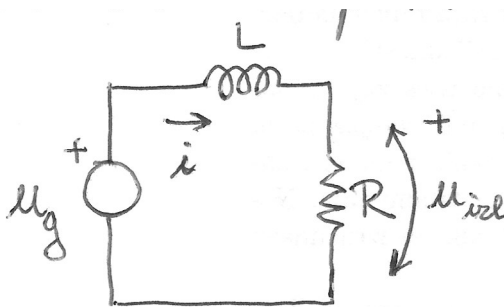
Prinudni odziv u tom slučaju je oblika

$$\underline{y}_p(t) = \underline{Y}_m e^{j\omega t}. \quad (2)$$

Kompleksna funkcija mreže je količnik prinudnog odziva na kompleksnu prostoperiodičnu pobudu i kompleksne prostoperiodične pobude

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{y}_p(t)}{\underline{x}(t)} = \frac{\underline{Y}_m e^{j\omega t}}{\underline{X}_m e^{j\omega t}} = \frac{\underline{Y}_m}{\underline{X}_m}. \quad (3)$$

Kao primjer odredimo kompleksnu funkciju mreže u odnosu na napon na otporniku rednog RL kola prikazanog na Slici 1. Diferencijalna jednačina za



Slika 1: Redno RL kolo.

ovo kolo je

$$\frac{du_{izl}}{dt} + \frac{R}{L}u_{izl} = \frac{R}{L}u_g, \quad t > 0.$$

Ako pretpostavimo kompleksnu eksponencijalnu pobudu

$$\underline{u}_g(t) = \underline{U}_g e^{j\omega t},$$

prinudni odziv je oblika

$$\underline{u}_{izlp}(t) = \underline{U}_{izlp} e^{j\omega t}.$$

Iz diferencijalne jednačine imamo

$$j\omega \underline{U}_{izlp} + \frac{R}{L} \underline{U}_{izlp} = \frac{R}{L} \underline{U}_g$$

pa je

$$\underline{U}_{izlp} = \frac{R}{R + j\omega L} \underline{U}_g.$$

Prinudni odziv je

$$\underline{u}_{izlp}(t) = \frac{R}{R + j\omega L} \underline{U}_g e^{j\omega t}.$$

Kompleksna funkcija mreže za redno RL kolo je

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L}.$$

Vidimo da kompleksna funkcija mreže nije funkcija vremena već samo frekvencije. Pošto kompleksna funkcija mreže karakteriše prinudni odziv kola u zavisnosti od frekvencije pobudnog signala, koristi se i termin *frekvencijska karakteristika kola*.

Neka je sada pobuda data sa $u_g(t) = U_m \cos \omega t$. Odredićemo napon na izlazu kola u ustaljenom stanju korištenjem kompleksnih predstavnika. Kompleksni predstavnik napona pobudnog generatora je $\underline{U}_g = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$. Na osnovu KZN imamo

$$\underline{U}_g = j\omega L \underline{I} + R \underline{I},$$

odnosno,

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_g}{R + j\omega L}.$$

Izlazni napon je

$$\underline{U}_{izl} = R \underline{I} = \frac{R}{R + j\omega L} \underline{U}_g,$$

odnosno,

$$\underline{U}_{izl} = \frac{R}{R + j\omega L} \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{-j \arctg \frac{\omega L}{R}}.$$

Ustaljeni odziv u vremenskom domenu je

$$\begin{aligned} u_{izl}(t) &= \Re \left\{ \sqrt{2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\omega t} e^{-\arctg \frac{\omega L}{R}} \right\} = \\ &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} U_m \cos(\omega t + \Phi), \end{aligned}$$

gdje je

$$\Phi = -\arctg \frac{\omega L}{R}.$$

Odnos amplituda izlaznog i ulaznog napona ne zavisi od vremena, ali zavisi od frekvencije i iznosi

$$\frac{U_{izl}}{U_m} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = G(\omega).$$

Fazni pomak se ponaša na isti način

$$\Phi = \Phi(\omega) = -\arctg \frac{\omega L}{R}.$$

Informacije o amplitudi i fazi sinusnog signala sadržane su u fazorskoj notaciji. Odnos kompleksnih napona na izlazu i ulazu kola je

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{izl}}{\underline{U}_g} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega L}{R}}.$$

Vidimo da je odnos kompleksnih vrijednosti napona na izlazu i ulazu rednog RL kola jednak kompleksnoj funkciji kola. Dakle, vrijednost izlaznog napona se može izračunati kao

$$\underline{U}_{izl} = \underline{G}(j\omega) \underline{U}_g.$$

Pošto je kompleksna funkcija kola funkcija frekvencije i prinudni odziv kola na prostoperiodičnu pobudu je određen vrijednošću kompleksne funkcije kola koristi se i naziv *frekvencijska karakteristika* mreže. Frekvencijskom karakteristikom mreže određena je zavisnost amplitude, odnosno, faze izlaznog signala od frekvencije prostoperiodične pobude. Koristi se i termin *frekvencijski odziv* kola zato što se radi o ustaljenom odzivu na prostoperiodičnu pobudu. Frekvencijska karakteristika je kompleksna funkcija i može se predstaviti u obliku

$$\underline{G}(j\omega) = G(\omega) e^{j\Phi(\omega)}. \quad (4)$$

Realne funkcije

$$G(\omega) = |\underline{G}(j\omega)| \quad (5)$$

i

$$\Phi(\omega) = \arg \underline{G}(j\omega) \quad (6)$$

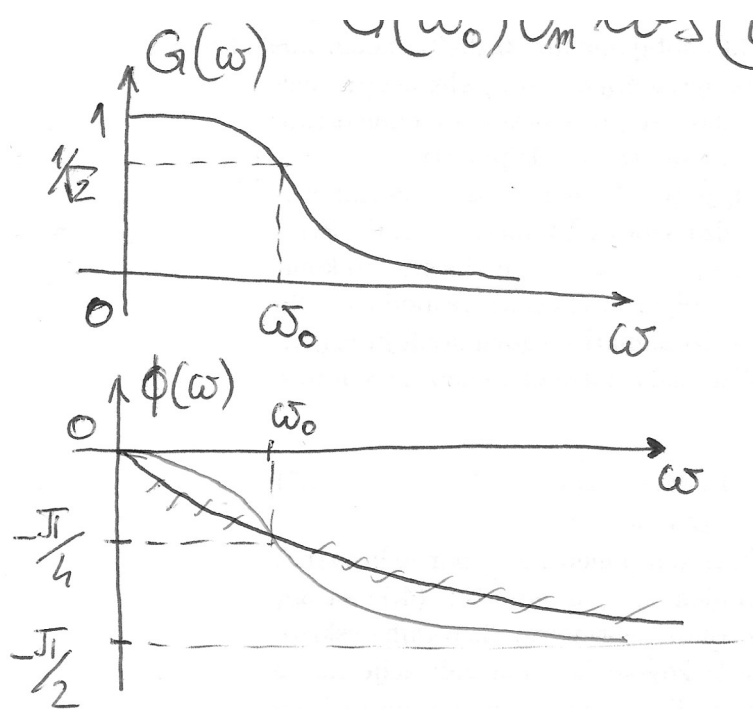
nazivaju se amplitudna i fazna karakteristika kola. Amplitudna karakteristika određuje kako mreža utiče na amplitudu signala. Možemo reći da je vrijednost amplitudne karakteristike na određenoj frekvenciji, u stvari, *pojačanje* mreže. Faznom karakteristikom je određena fazna razlika između odziva i pobude.

Frekvencijska karakteristika mreže se, dakle, može prikazati odnosom kompleksnih predstavnika odziva, $\underline{Y}(j\omega)$, i pobude, $\underline{X}(j\omega)$

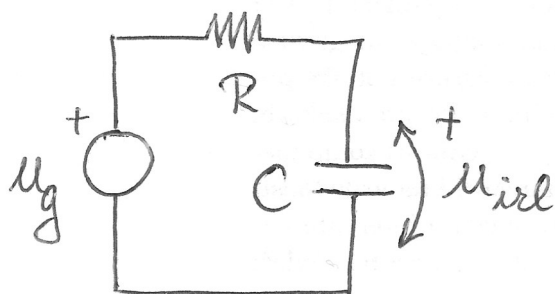
$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{Y}(j\omega)}{\underline{X}(j\omega)}. \quad (7)$$

Vratimo se rednom RL kolu iz primjera. Uobičajeno je da se uvede oznaka $\omega_0 = \frac{R}{L}$. Sada je frekvencijska karakteristika oblika

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega}{\omega_0}}.$$



Slika 2: Amplitudna i fazna karakteristika rednog RL kola.



Slika 3: Redno RC kolo.

Tabela 1: Karakteristične vrijednosti amplitudne i fazne karakteristike rednog RL (RC) kola.

ω	$G(\omega)$	$\Phi(\omega)$
0	1	0
ω_0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\pi}{4}$
∞	0	$-\frac{\pi}{2}$

Frekvencija ω_0 se naziva *ugaona* ili *granična* frekvencija kola. Amplitudna i fazna karakteristika rednog RL kola prikazane su na Slici 2.

Razmotrimo sada redno RC kolo prikazano na Slici 3.

Kompleksni izlazni napon jednak je

$$\underline{U}_{izl} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \underline{U}_g = \frac{1}{1 + j\omega RC} \underline{U}_g.$$

Frekvencijska karakteristika je

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{izl}}{\underline{U}_g} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}},$$

gdje je

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}.$$

Amplitudna karakteristika je

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}},$$

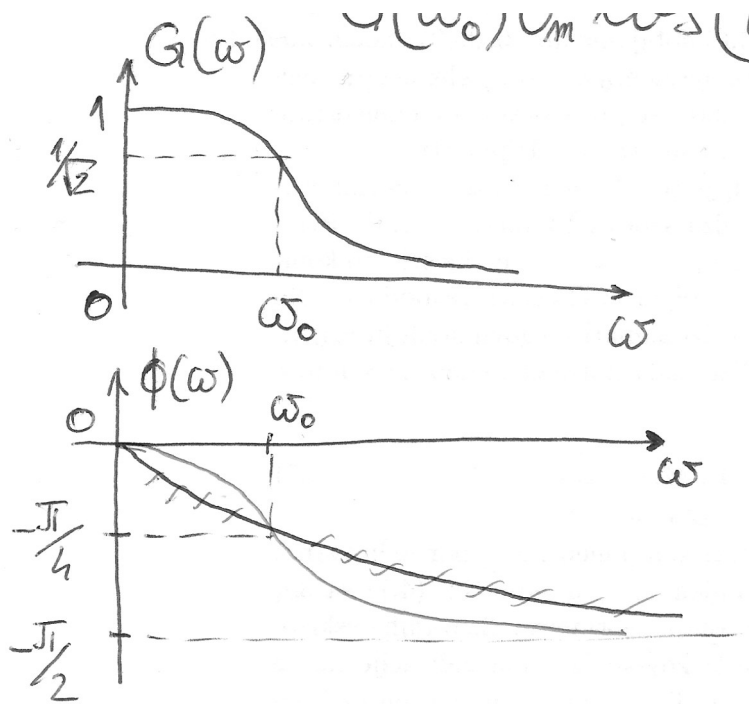
a fazna

$$\Phi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Frekvencijska karakteristika rednog RC kola je identična frekvencijskoj karakteristici rednog RL kola. Grafici amplitudne i fazne karakteristike su prikazani na Slici 4. U tabeli su date neke karakteristične vrijednosti amplitudne i fazne karakteristike rednog RL, odnosno, RC kola

Često se, umjesto grafika sa linearnim osama, za prikazivanje amplitudne i fazne karakteristike koriste grafici sa logaritamskim osama. Ovi grafici se nazivaju *Bodeovi* dijagrami prema njihovom tvorcu. Bodeov dijagram prikazuje logaritam amplitudne karakteristike i fazni ugao na graficima čija apscisa ima logaritamsku podjelu. Definisaćemo *funkciju pojačanja* mreže

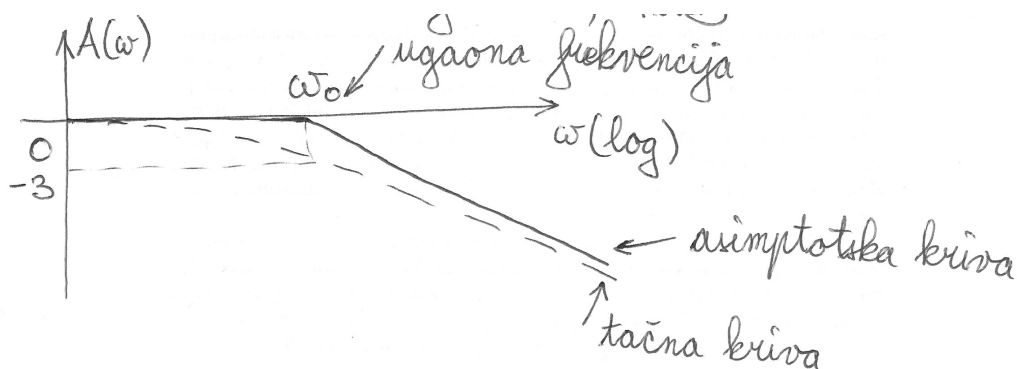
$$A(\omega) = 20 \log G(\omega) \text{ [dB]}. \quad (8)$$



Slika 4: Amplitudna i fazna karakteristika rednog RC kola.

Tabela 2: Karakteristične vrijednosti amplitudne karakteristike i funkcije pojačanja rednog RL (RC) kola.

G	$20 \log G$
0,1	-20
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-3,01
$\frac{1}{2}$	-6,02
1	0
2	0
10	20
100	40



Slika 5: Bodeov dijagram za redno RL (RC) kolo.

U tabeli su date neke karakteristične vrijednosti funkcije pojačanja

Upotreba logaritamske skale ima dvije prednosti, logaritam multiplikativne zavisnosti prevodi u aditivne i logaritamska skala omogućava prikazivanje većeg opsega vrijednosti veličine. U posmatranom primjeru, korištenje logaritamske podjele za frekvencijsku osu omogućava prikazivanje karakteristike filtra u širokom opsegu frekvencija.

Funkcija pojačanja za RL (RC) kolo jednaka je

$$A(\omega) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = -10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right].$$

Bodeov dijagram za RL (RC) kolo prikazan je na Slici 5. Vidimo da se mogu uočiti dva opsega frekvencija u kojima se kolo ponaša na karakterističan način. Na niskim frekvencijama, kada je $\omega \ll \omega_0$ funkcija pojačanja je

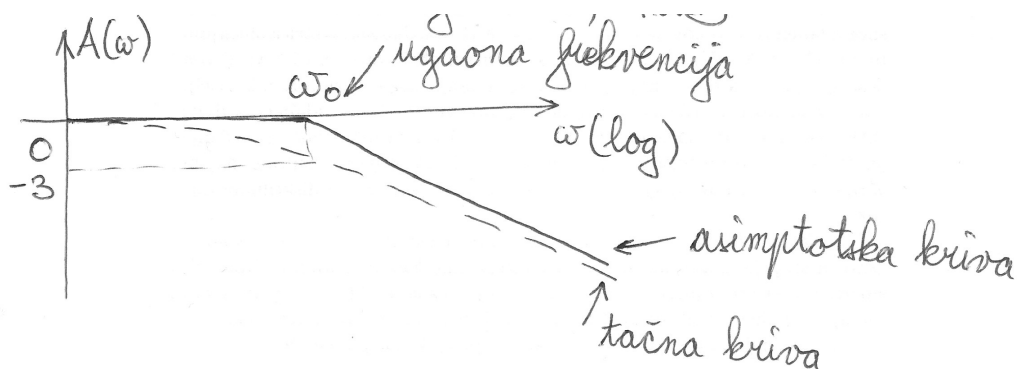
$$A(\omega) \approx -20 \log 1 = 0[\text{dB}].$$

Dakle, na niskim frekvencijama amplituda izlaznog signala je približno jednaka amplitudi ulaznog signala, odnosno, kažemo da kolo *propušta* niskofrekventne signale. Sa druge strane, na visokim frekvencijama, $\omega \gg \omega_0$

$$A(\omega) \approx -20 \log \frac{\omega}{\omega_0}.$$

U ovom slučaju pojačanje kola opada približno linearno sa logaritmom frekvencije. Interval između dvije frekvencije čiji je odnos 10, npr ω_1 i $\omega_2 = 10\omega_1$ se naziva *dekada*. Slično, interval između dvije frekvencije čiji je odnos 2 se naziva *oktava*. Razlika logaritamskih pojačanja RL kola ne jednoj dekadi za $\omega \gg \omega_0$ iznosi

$$A(\omega_1) - A(\omega_2) \approx -20 \log \frac{\omega_1}{\omega_0} - \left(-20 \log \frac{\omega_2}{\omega_0} \right) = -20 \log \frac{\omega_1}{\omega_2} = -20 \log \frac{1}{10} = 20\text{dB}.$$



Slika 6: Aproksimacija Bodeovog dijagrama pojačanja pomoću linijskih segmenata.

Na ugaonoj frekvenciji $\omega = \omega_0$ pojačanje je

$$A(\omega_0) = -10 \log 2 = -3,01[\text{dB}].$$

Zbog ovoga se ugaona frekvencija naziva i 3dB granična frekvencija ili samo *granična frekvencija* kola.

Sa praktičnog stanovišta često je dovoljno aproksimirati Bodeov dijagram pojačanja pomoću linijskih segmenata kao na Slici 6. Nagib asimptotske krive za $\omega \gg \omega_0$ je $20 \left[\frac{\text{dB}}{\text{dec}} \right]$.

Frekvencijski odziv mreže se može dobiti i iz uopštene kompleksne funkcije mreže. Uopštena kompleksna funkcija mreže je definisana kao odnos prinudnog odziva na uopštenu kompleksnu eksponencijalnu pobudu i uopštene kompleksne eksponencijalne pobude $\underline{x}(t) = \underline{X}e^{st}$

$$\underline{G}(s) = \frac{\underline{y}_p(t)}{\underline{x}(t)} = \frac{\underline{Y}_p e^{st}}{\underline{X} e^{st}} = \frac{\underline{Y}_p}{\underline{X}}. \quad (9)$$

Pošto je kompleksna eksponencijalna pobuda jednaka uopštenoj kompleksnoj eksponencijalnoj pobudi kada je kompleksna frekvencija $\underline{s} = j\omega$ slijedi da je frekvencijska karakteristika jednaka vrijednosti uopštene kompleksne funkcije mreže na imaginarnoj osi.

Moguće je povezati i frekvencijsku karakteristiku sa Grinovom funkcijom mreže. Pomoću konvolucionog integrala prinudni odziv, $\underline{y}(t)$ na pobudu $\underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}$, $-\infty < t < \infty$ se može izračunati kao

$$\begin{aligned} \underline{y}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \underline{x}(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \underline{X} e^{j\omega t} e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) \underline{X} e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (10)$$

Izraz

$$\underline{G}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (11)$$

jednak je frekvencijskoj karakteristici mreže.

Ako je Grinova funkcija mreže realna onda frekvencijska karakteristika ima sljedeću osobinu

$$\underline{G}(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau = \underline{G}^*(j\omega). \quad (12)$$

Slijedi da je amplitudna funkcija mreže parna funkcija

$$|\underline{G}(-\omega)| = |\underline{G}(\omega)|, \quad (13)$$

a fazna karakteristika mreže neparna funkcija

$$|\Phi(-\omega)| = -|\Phi(\omega)|. \quad (14)$$

2 Električni filtri

Kola razmatrana u prethodnim primjerima imaju osobinu frekvencijske selektivnosti, odnosno, njihov odziv zavisi od frekvencije ulaznog signala. Frekvencijski selektivna kola se obično nazivaju *električnim filtrima*. Primjene električnih filtara su brojne u različitim oblastima telekomunikacija, elektronike i elektroenergetike.

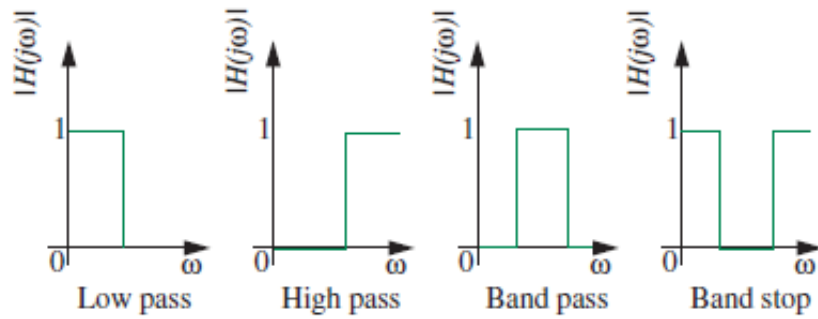
Uočili smo već da se redno RL kolo ponaša kao niskopropusni filtar, tj. propušta signale niskih frekvencija, a slabi (ne propušta) signale visokih frekvencija. Na Slici 7 prikazane su idealizovane amplitudne karakteristike četiri tipa filtara: niskopropusnog, visokopropusnog, propusnika opsega i nepropusnika opsega.

Jednostavan primjer električnog filtra je audio skretnica. Pošto zvučnici nemaju dobre karakteristike u širokom opsegu frekvencija, potrebno je na svaki zvučnik dovesti signal iz odgovarajućeg opsega. Kako bi se ovo postiglo koristi se električni filtar koji na svaki zvučnik dovodi odgovarajući signal kao što je konceptualno prikazano na Slici 8. Koristićemo jednostavnu RL skretnicu, čija je principijelna šema prikazana na Slici 9. Kompleksni napon na otporniku je već određen ranije i iznosi

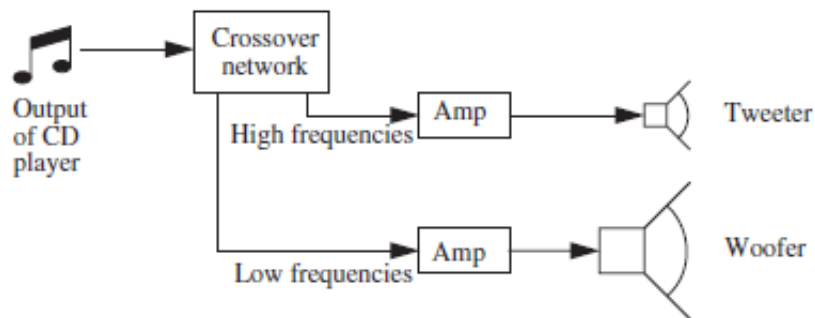
$$\underline{U}_R = \frac{R}{R + j\omega L} \underline{U}_g$$

pa je odgovarajuća kompleksna funkcija mreže

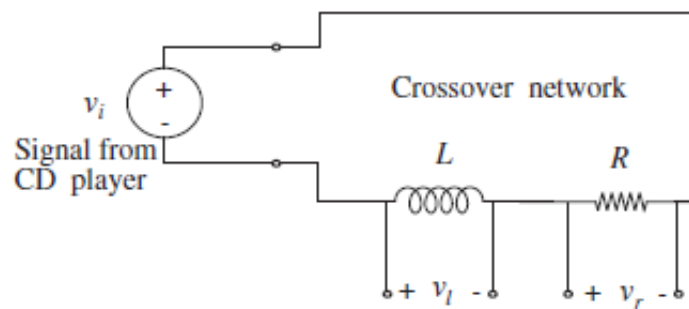
$$\underline{G}_R(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L}.$$



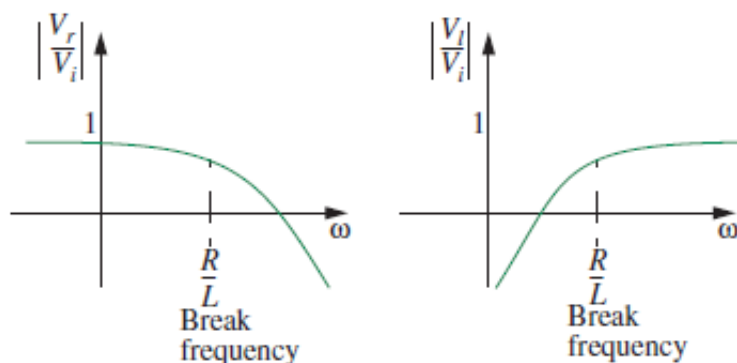
Slika 7: Amplitudne karakteristike različitih tipova filtara.



Slika 8: Princip rada audio skretnice.



Slika 9: Principijelna šema RL skretnice.



Slika 10: Amplitudne karakteristike audio skretnice.

Kompleksni napon na kalemu je jednak

$$U_L = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} U_g,$$

a odgovarajuća funkcija mreže je

$$\underline{G}_L(j\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}.$$

Amplitudne karakteristike koje odgovaraju ovim dvjema funkcijama mreže date su na Slici 10. Vidimo da je, u odnosu na napon na otporniku, ovim kolom realizovan niskopropusni filter, dok je, u odnosu na napon na kalemu, kolom realizovan visokopropusni filter. Dakle, signal sa otpornika treba da bude ulaz u niskotonski zvučnik, a signal sa kalema u visokotonski zvučnik.

Čovjek čuje frekvencije približno iz opsega 20 Hz do 20 kHz pa ćemo za graničnu frekvenciju filtera izabrati $f_0 = 5\text{kHz}$. Pošto je

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{R}{L},$$

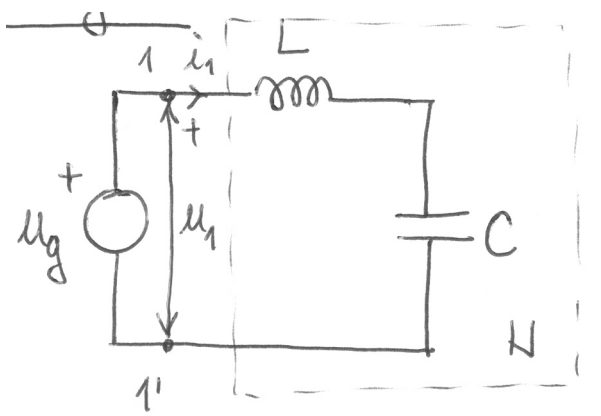
slijedi da je

$$\frac{R}{L} = 31416 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Ovaj zahtjev je moguće približno realizovati pomoću kalema induktiviteta $L = 3,2 \text{ mH}$ i otpornika otpornosti $R = 100\Omega$.

3 Rezonancija

Posmatraćemo redno LC kolo prikazano na Slici 11. Odredimo kompleksnu funkciju mreže za ovo kolo i prinudni odziv na prostoperiodičnu pobudu oblika $u_g(t) = U_m \cos \omega t$ za $t > 0$.



Slika 11: Redno LC kolo.

Uopštena kompleksna funkcija je oblika

$$\underline{G}(s) = \frac{C\underline{s} \frac{1}{L\underline{s}}}{C\underline{s} + \frac{1}{L\underline{s}}} = \frac{C\underline{s}}{1 + LC\underline{s}^2}.$$

Sopstvene učestanosti LC kola su

$$s_{1,2} = \pm j \frac{1}{\sqrt{LC}} = \pm j\omega_0.$$

Prinudni odziv na prostoperiodičnu pobudu frekvencije $\omega \neq \omega_0$ je dat sa

$$i_p(t) = \Re \left\{ \sqrt{2} \underline{G}(j\omega) \underline{U}_g e^{j\omega t} \right\},$$

gdje je $\underline{U}_g = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$. Odavde je

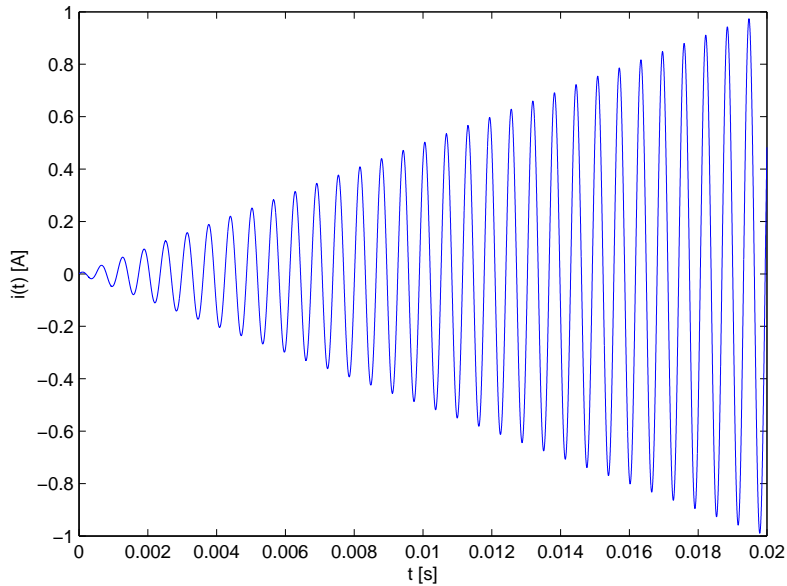
$$i_p(t) = \frac{C\omega}{|1 - LC\omega^2|} U_m \cos(\omega t + \psi),$$

gdje je

$$\psi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \omega < \omega_0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega > \omega_0 \end{cases}.$$

Međutim, kada je frekvencija pobude jednaka sopstvenoj učestanosti LC kola, $\omega = \omega_0$, kompleksna funkcija kola poprima beskonačnu vrijednost pa prinudni odziv nije moguće izračunati korištenjem kompleksnih predstavnika. Partikularno rješenje diferencijalne jednačine u ovom slučaju je oblika

$$i_p(t) = K_1 t \cos \omega_0 t + K_2 t \sin \omega_0 t.$$



Slika 12: Struja u LC kolu kada je frekvencija pobude jednaka sopstvenoj učestanosti kola.

U ovom slučaju, u stvari, ne možemo koristiti kompleksne predstavnike za određivanje partikularnog odziva zato što on nije prostoperiodična funkcija. Ranije je, međutim, pokazano da je kompletan odziv u ovom slučaju

$$i(t) = \frac{U_m}{2\omega_0 L} (\sin \omega_0 t + \omega_0 t \cos \omega_0 t).$$

Prinudni odziv je, dakle, oblika

$$i_p(t) = \frac{U_m}{2L} t \cos \omega_0 t.$$

Grafik struje u kolu u ovom slučaju prikazan je na Slici 12.

Ova pojava se naziva *rezonancija*, a prinudni odziv se, u ovom slučaju, naziva *rezonantni odziv*. U slučaju LC kola vidjeli smo da amplituda rezonantnog odziva linearno raste što može dovesti do neželjenih efekata i čak uništenja elemenata kola.

Razmotrićemo sada opšti slučaj. Neka je linearno vremenski nepromjenljivo kolo opisano diferencijalnom jednačinom

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \quad t > 0. \quad (15)$$

Neka je pobuda oblika

$$x(t) = X_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \gamma). \quad (16)$$

U tom slučaju prinudni odziv je oblika

$$y(t) = Y_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \delta). \quad (17)$$

Kompleksni predstavnici pobude i odziva su

$$x(t) \leftrightarrow \underline{X} = X_m e^{j\gamma}, \quad (18)$$

$$y(t) \leftrightarrow \underline{Y} = Y_m e^{j\delta}, \quad (19)$$

tako da je

$$x(t) = \Re \{ \underline{X} e^{st} \}, \quad (20)$$

$$y(t) = \Re \{ \underline{Y} e^{st} \}, \quad (21)$$

gdje je sa $\underline{s} = \sigma + j\omega$ označena kompleksna frekvencija pobude.

Korištenjem kompleksnih predstavnika diferencijalna jednačina se svodi na algebarsku jednačinu oblika

$$\underline{A}(\underline{s}) \underline{Y} = \underline{B}(\underline{s}) \underline{X}, \quad (22)$$

odakle je kompleksni predstavnik odziva

$$\underline{Y} = \frac{\underline{B}(\underline{s})}{\underline{A}(\underline{s})} \underline{X}. \quad (23)$$

Kompleksna funkcija mreže jednaka je

$$\underline{G}(\underline{s}) = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}} = \frac{\underline{B}(\underline{s})}{\underline{A}(\underline{s})}. \quad (24)$$

Karakteristična jednačina kola jednaka je

$$\underline{A}(\underline{s}) = 0, \quad (25)$$

a njena rješenja $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$ su sopstvene učestanosti mreže. Vidimo da ako je kompleksna frekvencija pobude jednaka nekoj od sopstvenih učestanosti mreže kompleksna funkcija mreže poprima beskonačnu vrijednost. U ovom slučaju u kolu je ostvarena rezonancija.

Trenutna vrijednost komponente rezonantnog odziva koja odgovara sopstvenoj učestanosti \underline{s}_i , p -tog reda je

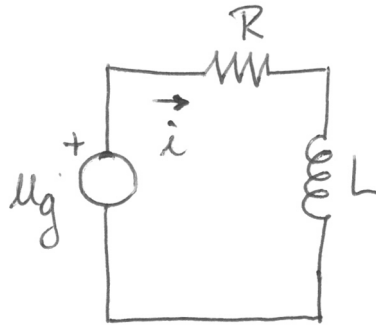
$$y(t) = \Re \left\{ t^p \frac{B(\underline{s}_i)}{A^{(p)}(\underline{s}_i)} X e^{\underline{s}_i t} \right\}, \quad (26)$$

gdje je

$$\underline{A}^{(p)}(\underline{s}_i) = \frac{d^p \underline{A}(\underline{s})}{d\underline{s}^p} \Big|_{\underline{s}=\underline{s}_i}. \quad (27)$$

U slučaju LC kola amplituda rezonantnog odziva je takođe težila beskonačnosti. Međutim, iako na rezonantnoj učestanosti kompleksna funkcija mreže ima beskonačnu vrijednost rezonantni odziv kola ne mora uvijek težiti beskonačnosti kao što pokazuje sljedeći primjer.

Neka je dato kolo na Slici 13. Odredimo uopštenu kompleksnu funkciju mreže i prinudni odziv na pobudu oblika $u_g(t) = U_{gm} e^{-\frac{R}{L}t}$. Uopštena kom-



Slika 13: RL kolo uz primjer.

pleksna funkcija mreže je

$$\underline{G}(\underline{s}) = \frac{\underline{I}(\underline{s})}{\underline{U}_g(\underline{s})} = \frac{1}{R + L\underline{s}} = \underline{Y}(\underline{s}),$$

pri čemu je $\underline{Y}(\underline{s})$ ekvivalentna admitansa redne veze otpornika i kalema.

Sopstvena učestanost mreže je

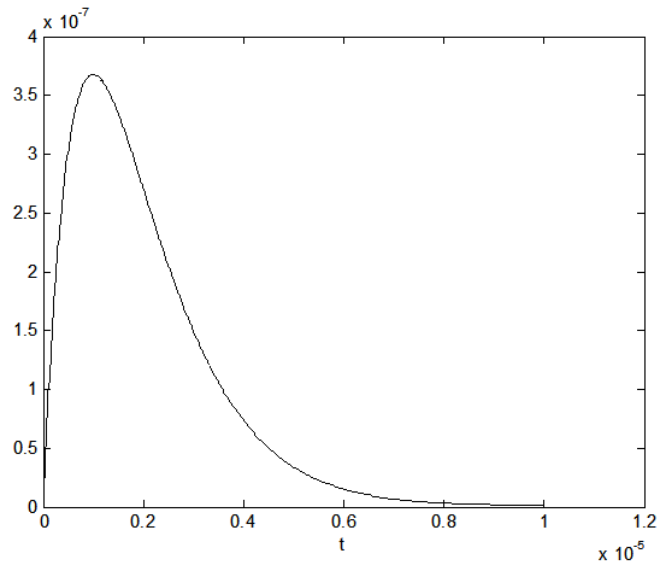
$$\underline{s} = -\frac{R}{L}$$

i prvog je reda.

Prinudni odziv je sada

$$i_p(t) = \Re \left\{ t \frac{B(\underline{s}_1)}{A'(\underline{s}_1)} U_{gm} e^{-\frac{R}{L}t} \right\} = \Re \left\{ t \frac{1}{L} U_{gm} e^{-\frac{R}{L}t} \right\} = \frac{U_{gm}}{L} t e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Talasni oblik prinudnog odziva je prikazan na Slici. Vidimo da u ovom slučaju prinudni odziv pri rezonanciji ne teži beskonačnosti.



Slika 14: Prinudni odziv u rednom kolu pri rezonanciji.

4 Rezonancija u električnim kolima

Neka je data linearna vremenski nepromjenljiva mreža sa jednim pristupom na čijem pristupu vezan naponski generator napona u_g , kao na Slici 15. Tada je napon na pristupu jednak $u_1 = u_g$, a struja zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d^n i_1}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i_1}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{di_1}{dt} + a_0 i_1 = b_m \frac{d^m u_g}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u_g}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du_g}{dt} + b_0 u_g. \quad (28)$$

Pretpostavimo da je pobudni generator prostoperiodičan, oblika

$$u_g(t) = U_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) \quad (29)$$

i da je njegov kompleksni predstavnik

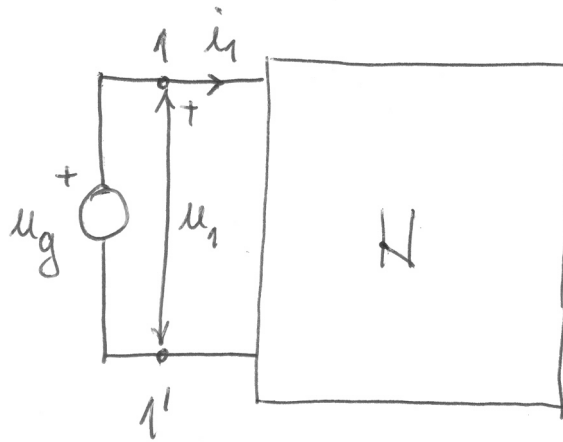
$$\underline{U}_g = U_m e^{j\theta}. \quad (30)$$

Kompleksni odziv je tada

$$\underline{I}_1 = \underline{G}(s) \underline{U}_g, \quad (31)$$

gdje je

$$\underline{G}(s) = \frac{\underline{B}(s)}{\underline{A}(s)}, \quad (32)$$



Slika 15: Linearna vremenski nepromjenljiva mreža pobuđena naponskim generatorom.

uopštena kompleksna funkcija mreže. Brojilac $\underline{B}(s)$ i imenilac $\underline{A}(s)$ funkcije mreže su polinomi po kompleksnoj učestanosti. Karakteristična jednačina kola je

$$\underline{A}(s) = 0, \quad (33)$$

a njeni korijeni $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$ su karakteristične učestanosti kola.

Ulazna admitansa mreže je data sa

$$\underline{Y}_{11}(s) = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_g} = \frac{\underline{B}(s)}{\underline{A}(s)} = \underline{G}(s). \quad (34)$$

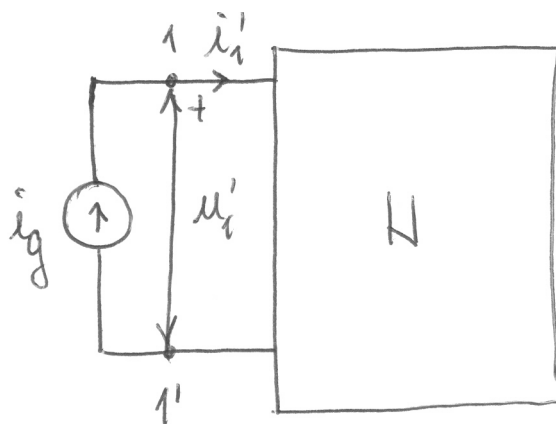
Kada je kompleksna učestanost pobude jednaka nekoj od sopstvenih učestanosti kola $\underline{s} = \underline{s}_i$, ulazna admitansa je

$$\underline{Y}_{11}(\underline{s}_i) = \frac{1}{\underline{Z}_{11}(\underline{s}_i)} = \infty. \quad (35)$$

Ulazna impedansa mreže, $\underline{Z}(\underline{s}_i)$ je u ovom slučaju jednaka nuli i mreža se ponaša kao kratak spoj. Pošto će tada kompleksni predstavnik struje \underline{I}_1 biti beskonačan kažemo da je u kolu nastupila *strujna rezonancija* ili *idealna rezonancija*.

Ako se ista mreža pobuđuje strujnim generatorom kao na Slici 16, ulazna struja mreže jednaka je struji strujnog generatora $i'_1 = i_g$, a napon zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d^n u'_1}{dt^n} + a'_{n-1} \frac{d^{n-1} u'_1}{dt^{n-1}} + \dots + a'_1 \frac{du'_1}{dt} + a'_0 u'_1 = b'_m \frac{d^m i_g}{dt^m} + b'_{m-1} \frac{d^{m-1} i_g}{dt^{m-1}} + \dots + b'_1 \frac{di_g}{dt} + b'_0 i_g. \quad (36)$$



Slika 16: Linearna vremenski nepromjenljiva mreža pobuđena strujnim generatorom.

Uopštena kompleksna funkcija mreže je oblika

$$\underline{G}'(\underline{s}) = \frac{\underline{B}'(\underline{s})}{\underline{A}'(\underline{s})} = \underline{Z}_{11}(\underline{s}), \quad (37)$$

gdje je $\underline{Z}_{11}(\underline{s})$ ulazna impedansa mreže.

Karakteristična jednačina mreže je data sa

$$\underline{A}'(\underline{s}) = 0, \quad (38)$$

a njeni korijeni $\underline{s}'_1, \underline{s}'_2, \dots, \underline{s}'_n$ su karakteristične učestanosti mreže. Ulazna impedansa poprima beskonačnu vrijednost na sopstvenim učestanostima

$$\underline{Z}_{11}(\underline{s}'_j) = \frac{1}{\underline{Y}(\underline{s}'_j)} = \infty, \quad (39)$$

odnosno, ulazna admitansa je na sopstvenim učestanostima jednaka nuli i mreža se ponaša kao prekid. Pošto kompleksni predstavnik napona \underline{U}_1 u ovom slučaju ima beskonačnu vrijednost kažemo da je u kolu nastupila *naponska rezonancija* ili *idealna antirezonancija*.

U slučaju RL kola smo vidjeli da, ukoliko u kolu postoje gubici (realni dio sopstvenih učestanosti je jednak nuli), trenutna vrijednost prinudnog odziva neće biti beskonačna (već će težiti nuli).

Pseudoperiodični generatori, međutim, nemaju praktični značaj i u nastavku ćemo se posvetiti slučaju prostoperiodične pobude.

4.1 Prostoperiodična pobuda

Posmatrajmo sada slučaj kada u kolu djeluje prostoperiodična pobuda oblika $u_g(t) = U_m \cos \omega t$. Kompleksna učestanost pobude je u ovom slučaju $\underline{s} = j\omega$. Dakle, da bi se postigla idealna rezonancija, odnosno, antirezonancija mreža treba da ima imaginarne sopstvene učestanosti, tj. da bude bez gubitaka. U slučaju rednog LC kola, razmatranog ranije, ulazna admitansa kola je

$$\underline{Y}_{11}(\underline{s}) = \frac{\underline{I}_1(\underline{s})}{\underline{U}_g(\underline{s})} = \frac{C\underline{s}}{1 + LC\underline{s}^2} = \frac{\underline{B}(\underline{s})}{\underline{A}(\underline{s})} = \frac{1}{\underline{Z}_{11}(\underline{s})}.$$

Sopstvene učestanosti (rezonantne učestanosti) kola su nule ulazne impedanse i zadovoljavaju

$$\begin{aligned} \underline{A}(\underline{s}) &= 0 \\ 1 + LC\underline{s}^2 &= 0 \\ \underline{s}_{1,2} &= \pm j \frac{1}{\sqrt{LC}} = \pm j\omega_0. \end{aligned}$$

Rezonantni odziv je

$$\begin{aligned} i_{1p}(t) &= \Re \left\{ t \frac{\underline{B}(\underline{s})}{\underline{A}'(\underline{s})} \underline{U}_g(\underline{s}) e^{st} \right\} \Big|_{\underline{s}=\underline{s}_1=j\omega_0} = \\ &= \Re \left\{ t \frac{C\underline{s}}{2\underline{s}LC} U_m e^{st} \right\} \Big|_{\underline{s}=j\omega_0} = \\ &= \frac{U_m}{2L} t \cos \omega_0 t. \end{aligned}$$

Ukoliko je posmatrana mreža sa gubicima i pasivna, sopstvene učestanosti su oblika

$$\underline{s}_i = \sigma_i + j\omega_i, \quad (40)$$

gdje je $\sigma_i < 0$. Pošto se prostoperiodični generator može predstaviti kompleksnim eksponencijalnim generatorima kod kojih je kompleksna učestanost čisto imaginarna, u mreži sa gubicima se ne može ostvariti idealna rezonancija, odnosno, antirezonancija. Međutim, u ovom slučaju se u kolu mogu ostvariti druge vrste rezonancije.

Ukoliko je učestanost prostoperiodičnog generatora jednaka imaginarnom dijelu sopstvene učestanosti kola u kolu se ostvaruje *prava rezonancija/antirezonancija*. U ovom slučaju je moguće prostoperiodičnim generatorom podržati sopstvene oscilacije kola.

Ako se kolo pobuđuje naponskim generatorom, kompleksna ulazna struja je

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}(j\omega) \underline{U}_g = \frac{\underline{U}_g}{\underline{Z}_{11}(j\omega)}. \quad (41)$$

Amplitudna rezonancija se postiže kada je amplituda struje i_1 maksimalna. Ovaj uslov je ekvivalentan pronalaženju maksimuma ulazne admitanse, odnosno, minimuma ulazne impedanse.

Ako se kolo pobuđuje strujnim generatorom, kompleksni ulazni napon je

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}(j\omega) \underline{I}_g = \frac{\underline{I}_g}{\underline{Y}_{11}(j\omega)}. \quad (42)$$

Amplitudna antirezonancija se postiže kada je amplituda napona u_1 maksimalna. Ovaj uslov je ekvivalentan pronalaženju maksimuma ulazne impedanse, odnosno, minimuma ulazne admitanse.

4.2 Fazna rezonancija/antirezonancija

U pasivnim mrežama se ne može odrediti učestanost prostoperiodične pobude tako da ulazna impedansa bude jednaka nuli $\underline{Z}_{11}(j\omega) = 0$, niti da ulazna admitansa bude jednaka nuli $\underline{Y}_{11}(j\omega) = 0$. Umjesto toga, ako predstavimo ulaznu impedansu u obliku

$$\underline{Z}_{11}(j\omega) = R_{11}(\omega) + jX_{11}(\omega), \quad (43)$$

i pretpostavimo da je, na učestanosti pobudnog generatora, ulazna reaktansa jednaka nuli, $X_{11}(\omega) = 0$, kompleksna ulazna struja je

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_g}{\underline{Z}_{11}(j\omega_0)} = \frac{\underline{U}_g}{R_{11}(\omega_0)}. \quad (44)$$

Oдавde slijedi da su ulazni napon i struja u fazi. U kolu je postignuta *fazna rezonancija*.

Analogno, ako predstavimo ulaznu admitansu u obliku

$$\underline{Y}_{11}(j\omega) = G_{11}(\omega) + jB_{11}(\omega) \quad (45)$$

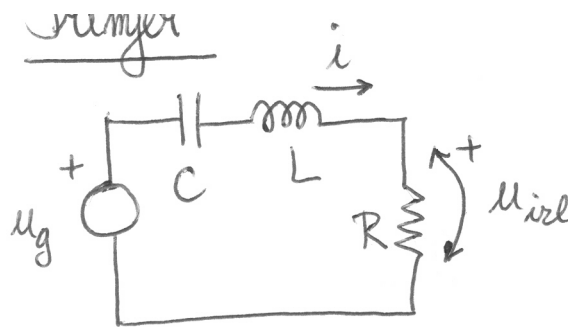
i pretpostavimo da je, na učestanosti pobudnog generatora, ulazna susceptansa jednaka nuli, $B_{11}(\omega_0) = 0$, kompleksni ulazni napon je

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{I}_g}{\underline{Y}_{11}(j\omega_0)} = \frac{\underline{I}_g}{G_{11}(\omega_0)}. \quad (46)$$

Sijedi da su, i u ovom slučaju, ulazni napon i struja u fazi. U kolu je postignuta *fazna antirezonancija*.

Ispitajmo поблиže vezu između fazne rezonancije i antirezonancije. Ulazna impedansa mreže je

$$\underline{Z}_{11}(j\omega) = R_{11}(\omega) + jX_{11}(\omega). \quad (47)$$



Slika 17: Redno RLC kolo.

Ulazna admitansa mreže se sada može napisati u obliku

$$\underline{Y}_{11}(j\omega) = \frac{1}{\underline{Z}_{11}(j\omega)} = \frac{1}{R_{11}(\omega) + jX_{11}(\omega)} = \frac{R_{11}(\omega) - jX_{11}(\omega)}{R_{11}^2(\omega) + X_{11}^2(\omega)}. \quad (48)$$

Poređenjem sa (45) dolazimo do zaključka da je

$$G_{11}(\omega) = \frac{R_{11}^2(\omega)}{R_{11}^2(\omega) + X_{11}^2(\omega)}, \quad (49)$$

$$B_{11}(\omega) = \frac{-X_{11}^2(\omega)}{R_{11}^2(\omega) + X_{11}^2(\omega)}. \quad (50)$$

Slijedi da je, u pasivnoj mreži,

$$X_{11}(\omega) = 0 \Leftrightarrow B_{11}(\omega) = 0, \quad (51)$$

pa su učestanosti fazne rezonancije jednake učestanostima fazne antirezonancije.

Primjer.

Dato je redno RLC kolo, kao na Slici 17. Pobudni generator je prostoperiodičan, oblika $u_g(t) = U_m \cos(\omega t + \theta)$. U kolu je uspostavljeno ustaljeno stanje. Kako bismo odredili učestanosti fazne rezonancije potrebno je da nađemo ulaznu reaktansu mreže. Kompleksna ulazna impedansa je

$$\underline{Z}(j\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

pa je ulazna reaktansa

$$X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

Iz uslova

$$X(\omega) = 0,$$

slijedi

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0.$$

Učestanost fazne rezonancije je

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Odredimo sada struju u kolu. Kompleksni predstavnik napona naponskog generatora je

$$\underline{U}_g = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\theta}.$$

Kompleksna struja u kolu je

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_g}{\underline{Z}(j\omega)} = \frac{\underline{U}_g}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\theta}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}.$$

Trenutna vrijednost struje je

$$i(t) = \Re \left\{ \sqrt{2} \underline{I} e^{j\omega t} \right\} = I_m \cos(\omega t + \theta + \phi),$$

gdje je amplituda struje jednaka

$$I_m = U_m \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

a fazni pomak

$$\phi = - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Na učestanosti fazne rezonancije fazni pomak je jednak nuli

$$\phi = 0,$$

a amplituda struje

$$I_m = \frac{U_m}{R},$$

pa je trenutna vrijednost struje u kolu

$$i(t) = \frac{U_m}{R} \cos(\omega t + \theta).$$

Napon na otporniku je

$$u_R(t) = Ri(t) = U_m \cos(\omega t + \theta) = u_g(t).$$

Dakle, na učestanosti fazne rezonancije, pad napona na rednoj vezi kalema i kondenzatora je jednak nuli.

5 Oscilatorna (rezonantna) kola

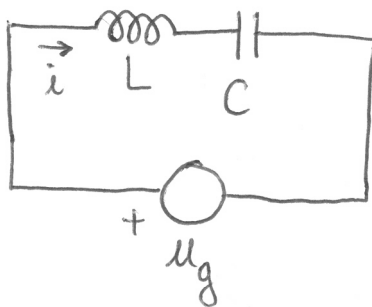
5.1 Redno oscilatorno kolo (prosto rezonantno kolo)

Redno oscilatorno kolo sačinjava redna veza kalema i kondenzatora kao na Slici 18. Pretpostavimo da u kolu djeluje naponski generator oblika $u_g(t) = U_m \cos(\omega t + \theta)$. Kompleksna funkcija kola je jednaka kompleksnoj ulaznoj admitansi kola

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{I}}{\underline{U}_g} = \underline{Y}(j\omega),$$

odnosno,

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{1}{j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$



Slika 18: Redno oscilatorno kolo.

Amplitudna karakteristika kola je jednaka ulaznoj admitansi

$$G(\omega) = |\underline{G}(j\omega)| = \frac{1}{\left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right|} = Y(\omega).$$

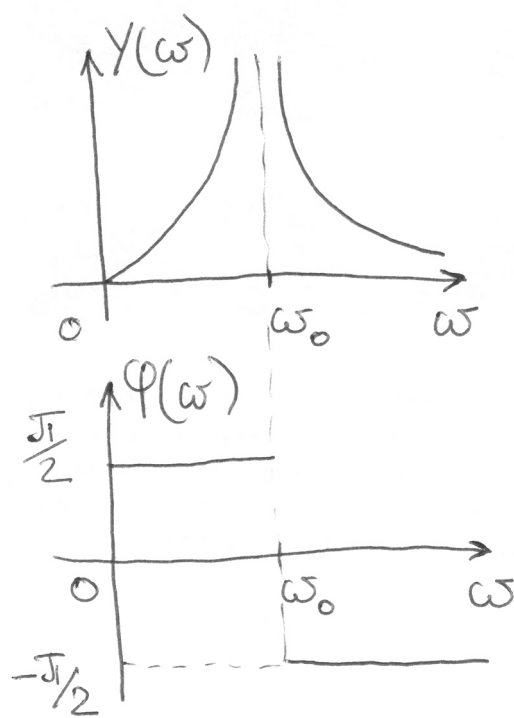
Fazna karakteristika je jednaka

$$\phi(\omega) = \arg \underline{G}(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \omega < \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega > \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}.$$

Već smo vidjeli da se na učestanosti

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

u kolu postiže idealna rezonancija.



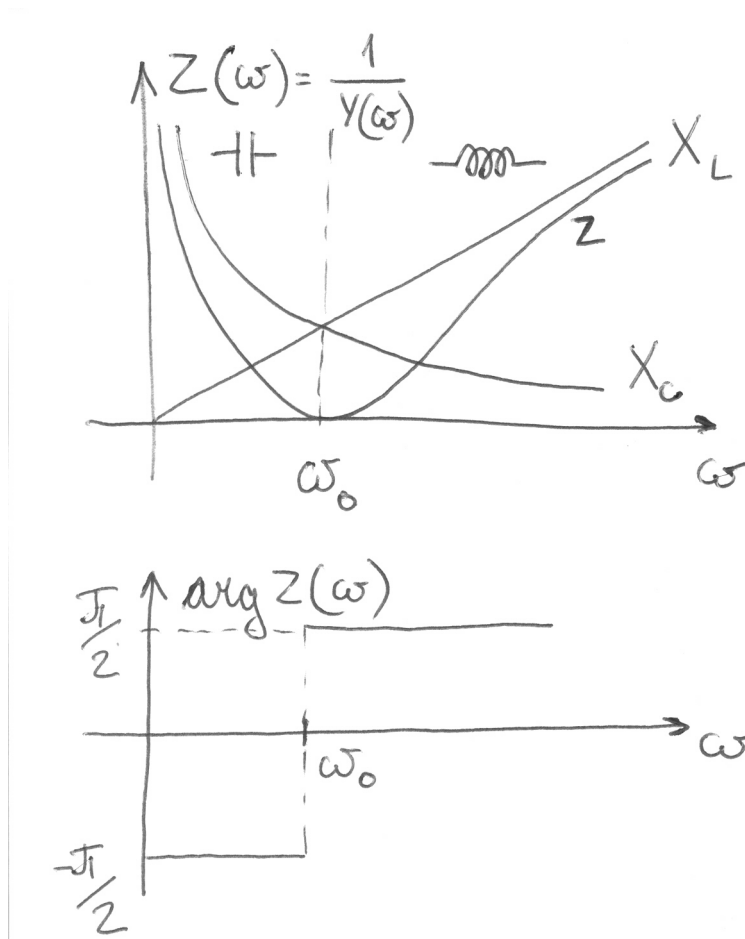
Slika 19: Amplitudna i fazna karakteristika rednog oscilatornog kola.

Grafici amplitudne karakteristike (ulazne admitanse) i fazne karakteristike kola su prikazani na Slici 19. Grafik efektivne vrijednosti struje u kolu ima isti oblik kao grafik ulazne admitanse.

Ulazna admitansa je oblika

$$\underline{Z}(j\omega) = j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

Na Slici 20 prikazani su grafici reaktansi kalema i kondenzatora te ulazne impedanse rednog LC kola u funkciji učestanosti, kao i grafik argumenta kompleksne impedanse. Vidimo da je na rezonantnoj učestanosti postignuta i fazna rezonancija u kolu jer je ulazna reaktansa jednaka nuli. Vidimo da na učestanostima manjim od rezonantne impedansa ima kapacitivni karakter, a na učestanostima višim od rezonantne impedansa ima induktivni karakter.



Slika 20: Ulazna impedansa rednog oscilatornog kola.

Kompleksna struja u kolu je

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_g}{j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Kompleksni napon na kondenzatoru je

$$\underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\underline{I} = \frac{\underline{U}_g}{1 - \omega^2 LC}.$$

Efektivna vrijednost napona na kondenzatoru je

$$U_C = \frac{U_g}{|1 - \omega^2 LC|},$$

gdje je $U_g = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ efektivna vrijednost napona pobudnog generatora.

Kompleksni napon na kalemu je

$$\underline{U}_L = j\omega L\underline{I} = \frac{j\omega L\underline{U}_g}{j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\omega^2 LC\underline{U}_g}{\omega^2 LC - 1}.$$

Efektivna vrijednost napona na kalemu je

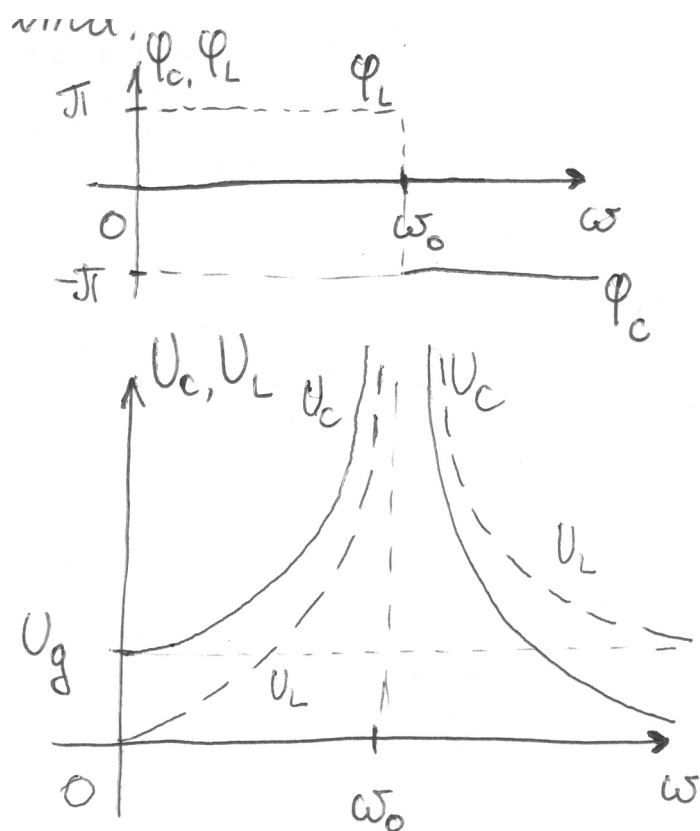
$$U_L = \frac{\omega^2 LC U_g}{|\omega^2 LC - 1|}.$$

Grafici efektivnih vrijednosti napona na kondenzatoru i kalemu u funkciji učestanosti su prikazani na Slici 21. Očekivano, na rezonantnoj učestanosti efektivne vrijednosti ovih napona teže ka beskonačnosti. Interesantno je primjetiti da se u okolini rezonantne učestanosti efektivne vrijednosti napona na kalemu i kondenzatoru mijenjaju vrlo brzo i da postižu vrijednosti veće od efektivne vrijednosti napona pobudnog generatora. Ova pojava se naziva *prenapon*. Na Slici 21 dati su grafici faznog pomaka napona na kondenzatoru i struje kalema u zavisnosti od učestanosti generatora.

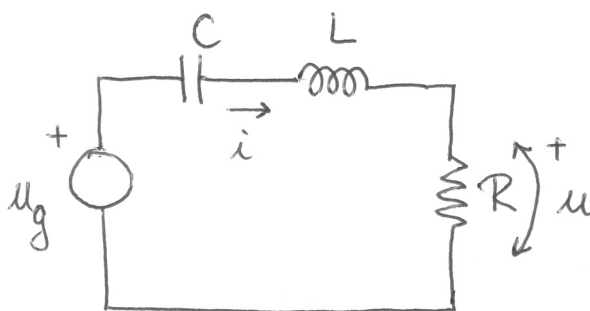
5.2 Redno RLC kolo

Posmatrajmo sada redno RLC kolo prikazano na Slici 22. Neka u kolu djeluje prostoperiodični generator napona $u_g(t) = U_m \cos(\omega t + \theta)$. Kompleksna funkcija kola, odnosno, kompleksna ulazna admitansa je

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{I}}{\underline{U}_g} = \underline{Y}(j\omega) = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)},$$



Slika 21: Efektivne vrijednosti i početne faze napona na kondenzatoru i kalemu.



Slika 22: Redno RLC kolo.

a kompleksna impedansa kola je

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{1}{\underline{Y}(j\omega)} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Redno RLC kolo je zbog prisustva otpornika otpornosti $R > 0$ pasivno

pa se, korištenjem prostoperiodičnog generatora, u njemu ne može ostvariti idealna rezonancija. Uslov za ostvarivanje fazne rezonancije je

$$X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0,$$

odakle je učestanost fazne rezonancije

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Kompleksna vrijednost struje je

$$\underline{I} = \underline{Y}(j\omega) \underline{U}_g = \frac{\underline{U}_g}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)},$$

a njena trenutna vrijednost je

$$i(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t + \theta + \phi),$$

gdje je

$$\phi = -\operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Na učestanosti fazne rezonancije kompleksna vrijednost struje je

$$\underline{I} = \underline{Y}(j\omega_0) \underline{U}_g = \frac{\underline{U}_g}{R},$$

a njena trenutna vrijednost je

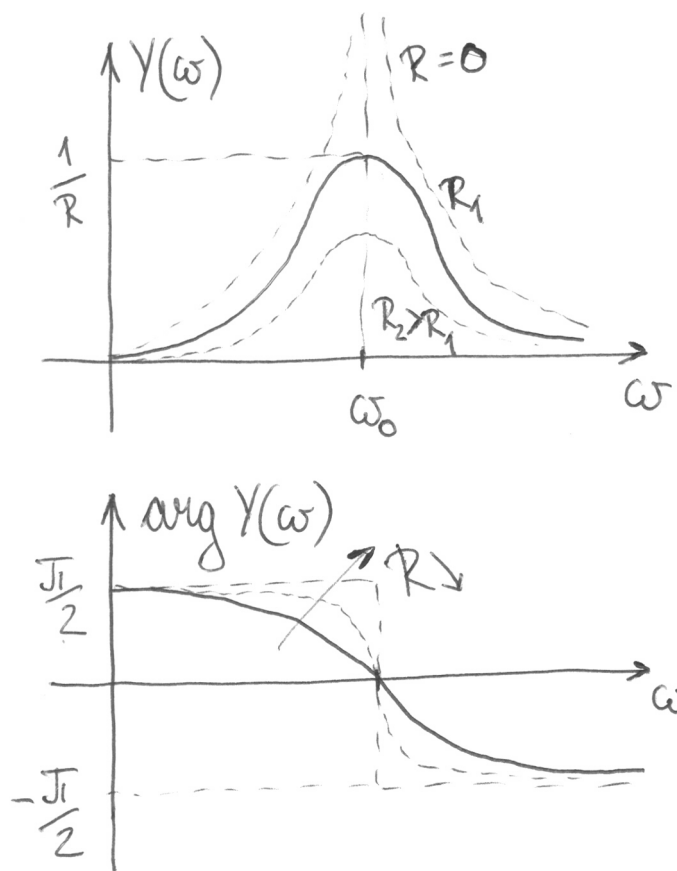
$$i(t) = \frac{U_m}{R} \cos(\omega_0 t + \theta).$$

Vidimo da je fazni pomak u ovom slučaju jednak nuli.

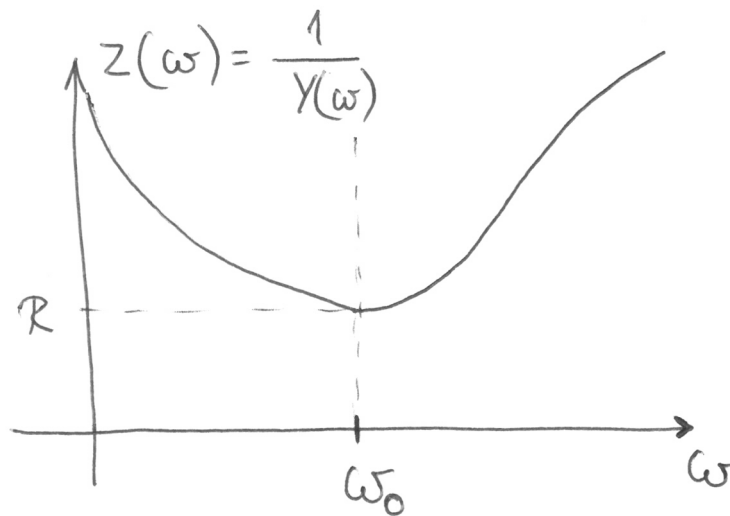
Grafik admitanse kola u funkciji učestanosti prikazan je na Slici 23. Vidimo da vrijednost admitanse dostiže maksimum na učestanosti fazne rezonancije. U tom slučaju reaktansa kola je jednaka nuli i redno RLC kolo se ponaša kao otpornik. Efektivna vrijednost struje u kolu zavisi od učestanosti na isti način što znači da na učestanosti fazne rezonancije dostiže svoj maksimum

$$I_{max} = \frac{U_g}{R}.$$

Dakle, u kolu je postignuta i amplitudna rezonancija. Grafik zavisnosti ar-



Slika 23: Ulazna admitansa rednog RLC kola.



Slika 24: Grafik zavisnosti ulazne impedanse rednog RLC kola od učestanosti.

gumenta admitanse od učestanosti je prikazan na Slici 23. Pošto argument admitanse odgovara faznom pomaku struje u kolu u odnosu na napon pobudnog generatora, vidimo da je na rezonantnoj učestanosti fazni pomak jednak nuli.

Grafik zavisnosti impedanse kola od učestanosti je prikazan na Slici 24. Vidimo da je na učestanosti fazne rezonancije vrijednost impedanse minimalna i iznosi R .

Kompleksna funkcija mreže za napon na otporniku je jednaka

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{U}}{\underline{U}_g}$$

Kompleksni napon na otporniku je

$$\underline{U} = R\underline{I} = \frac{R\underline{U}_g}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Kompleksna funkcija mreže je

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Pored rezonantne učestanosti, oscilatorna kola su karakterisana i faktorom kvaliteta kola (Q-faktor kola)

$$Q = 2\pi \frac{W_{max}}{W_T}$$

gdje je W_{max} maksimalna akumulirana energija, a W_T je energija potrošena u jednom ciklusu. Posmatrano na ovaj način, Q-faktor kola je mjera mogućnosti čuvanja energije u kolu.

Za kolo u rezonanciji ukupna akumulirana energija je konstantna. U trenutku kada je struja kalemata maksimalna, napon na kondenzatoru je jednak nuli i sva energija je akumulirana u kalemu. Energija kalemata je

$$w = \frac{1}{2}Li^2.$$

Maksimalna vrijednost energije kalemata je

$$W_{max} = \frac{1}{2}LI_m^2.$$

Trenutna vrijednost struje je

$$i(t) = I_m \cos(\omega_0 t + \theta),$$

a snaga koja se razvija na otporniku je

$$p(t) = Ri^2(t).$$

Energija koja se troši na otporniku u jednom ciklusu je

$$\begin{aligned} W_{R,T} &= \int_0^T p(t) dt = \\ &= R \int_0^T i^2(t) dt = \\ &= R \int_0^T \frac{I_m^2 (1 + \cos 2\omega_0 t)}{2} dt = \\ &= \frac{RI_m^2 T}{2}. \end{aligned}$$

Q-faktor je sada

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \frac{W_{max}}{W_{R,T}} = \\ &= 2\pi \frac{L}{RT} = \\ &= \frac{\omega_0 L}{R} = Q_0. \end{aligned}$$

Očigledno je i

$$Q = \frac{1}{\omega_0 CR} = Q_{C0}.$$

Frekvencijska karakteristika se može napisati u obliku

$$\begin{aligned}\underline{G}(j\omega) &= \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR}\right)} = \\ &= \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega Q}{\omega_0} - \frac{\omega_0 Q}{\omega}\right)} = \\ &= \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}.\end{aligned}$$

Amplitudna karakteristika je

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}},$$

a fazna karakteristika je

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right).$$

Na Slici 25 su prikazani grafici amplitudne i fazne karakteristike te funkcije pojačanja rednog RLC kola. Vidimo da se redno RLC kolo ponaša kao filter propusnik opsega i da je amplitudna karakteristika (funkcija pojačanja) simetrična oko rezonantne učestanosti ako frekvencijska osa ima logaritamsku podjelu. Na graničnim frekvencijama trodecibelskog propusnog opsega je

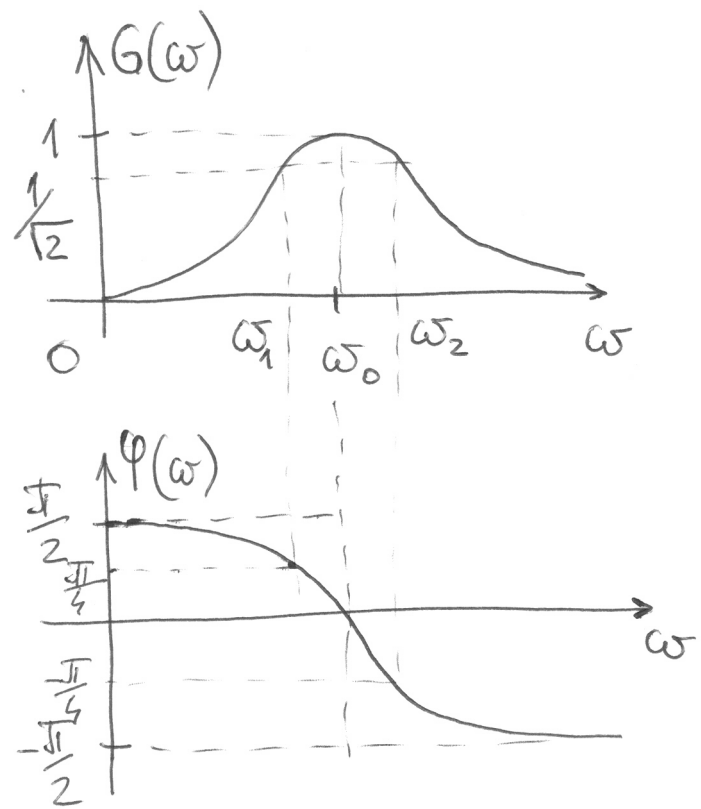
$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Odavde se dobija

$$\begin{aligned}Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 &= 1 \\ \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} &= \pm \frac{1}{Q} \\ \omega^2 \mp \frac{\omega_0}{Q}\omega - \omega_0^2 &= 0.\end{aligned}$$

Rješenja ovih jednačina su

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{2Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4Q^2} + \omega_0^2}$$



Slika 25: Amplitudna i fazna karakteristika rednog RLC kola.

i

$$\omega_{3,4} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4Q^2} + \omega_0^2}.$$

Granične učestanosti su pozitivna rješenja

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} - \frac{\omega_0}{2Q}$$

i

$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} + \frac{\omega_0}{2Q}.$$

Širina trodecibelskog propusnog opsega je

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}.$$

Sa porastom Q-faktora propusni opseg kola se sužava – kolo je selektivnije. U oscilatornim kolima je često $Q > 10$ pa je $\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 \ll 1$ iz čega slijedi da su granične učestanosti

$$\begin{aligned}\omega_1 &\approx \omega_0 - \frac{B}{2}, \\ \omega_2 &\approx \omega_0 + \frac{B}{2}\end{aligned}$$

pa je i za linearnu podjelu frekvencijske ose, amplitudna karakteristika približno simetrična u odnosu na rezonantnu učestanost.

Kako bismo analizirali frekvencijsku karakteristiku na učestanostima bliskim rezonantnoj uvodimo pojam *disonancije (razdešenosti)* kola kao relativnog odstupanja učestanosti od rezonantne.

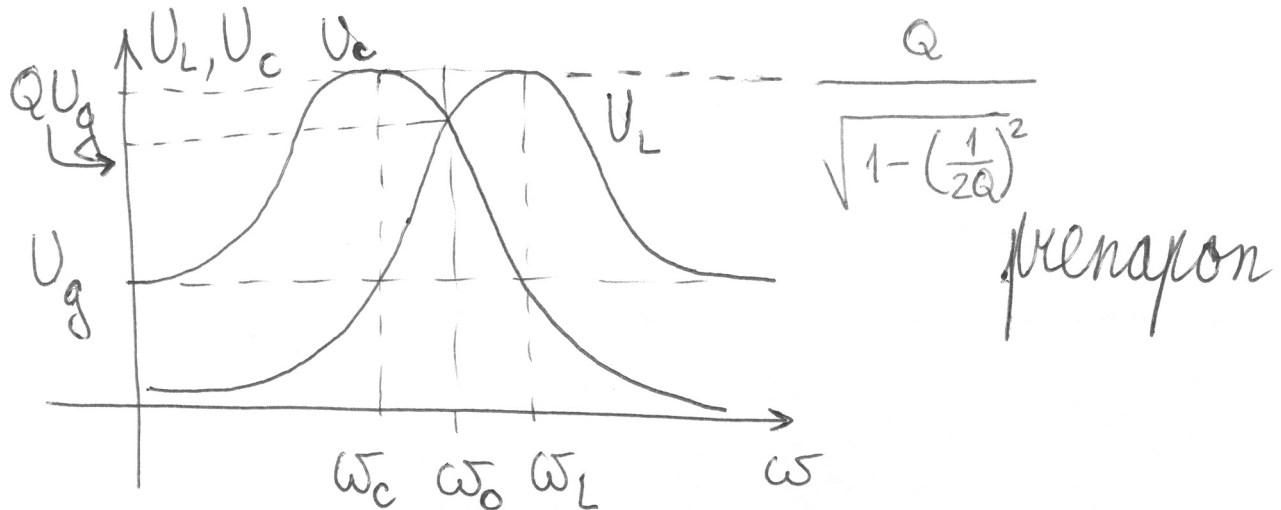
$$\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\omega}{\omega_0} - 1. \quad (52)$$

Sada je za redno RLC kolo

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \delta + 1 - \frac{1}{\delta + 1} = \frac{\delta^2 + 2\delta}{\delta + 1}.$$

Ako učestanost pobude malo odstupa od rezonantne disonancija je $\delta \ll 1$ pa je

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \approx 2\delta.$$



Slika 26: Grafici efektivnih vrijednosti napona na kalem i kondenzatoru u zavisnosti od učestanosti.

Frekvencijska karakteristika se sada može napisati u obliku

$$\underline{G}(j\omega) \approx \frac{1}{1 + j2Q\delta}$$

Kompleksni naponi na ostalim elementima kola su

$$\underline{U}_L = j\omega L \underline{I} = \frac{j\omega L \underline{U}_g}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{jQ \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \underline{U}_g,$$

$$\underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \underline{I} = \frac{1}{j\omega C} \frac{\underline{U}_g}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = -\frac{jQ \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \underline{U}_g.$$

Grafici efektivnih vrijednosti napona na kalem i kondenzatoru u zavisnosti od učestanosti su prikazani na Slici 26. Vidimo da se i u ovom slučaju javlja prenapon na kalem, odnosno, kondenzatoru. Efektivna vrijednost prenapona je $\frac{Q}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}}$. Frekvencije na kojima se dobija prenapon možemo pronaći kao frekvencije na kojima efektivne vrijednosti napona dostižu maksimume, npr.

$$\frac{\partial U_C}{\partial \omega} = 0.$$

Sada je frekvencija na kojoj se javlja prenapon na kondenzatoru

$$\omega_C = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

Analogno, frekvencija na kojoj se javlja prenapon na kalemu je

$$\omega_L = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}.$$

Frekvencije prenapona su na logaritamskoj skali simetrične u odnosu na rezonantnu frekvenciju, odnosno, zadovoljavaju relaciju

$$\omega_L \omega_C = \omega_0$$

Rezonantna kola obezbjeđuju frekvencijski selektivan odziv. Generalisana kompleksna funkcija kola u odnosu na napon na otporniku je

$$\underline{G}(\underline{s}) = \frac{\underline{U}(\underline{s})}{\underline{U}_g(\underline{s})} = \frac{R}{R + L\underline{s} + \frac{1}{C\underline{s}}} = \frac{\frac{R}{L}\underline{s}}{\underline{s}^2 + \frac{R}{L}\underline{s} + \frac{1}{LC}}.$$

Imajući u vidu da je $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ i $Q = \frac{1}{\omega_0 RC}$ generalisana kompleksna funkcija kola se može napisati u obliku

$$\underline{G}(\underline{s}) = \frac{\frac{\omega_0}{Q}\underline{s}}{\underline{s}^2 + \frac{\omega_0}{Q}\underline{s} + \omega_0^2}. \quad (53)$$

Ako se smatra da je napon na otporniku izlazna promjenljiva ova funkcija predstavlja *funkciju prenosa* kola. Gornjim izrazom je dat opšti oblik funkcije prenosa filtra propusnika opsega drugog reda. Ovakvi filtri su značajni i sa praktičnog stanovišta zato što filtri drugog reda predstavljaju osnovne gradivne blokove aktivnih filtara koji se mogu realizovati u integrisanoj tehnologiji.

5.3 Paralelno oscilatorno kolo (prosto antirezonantno kolo)

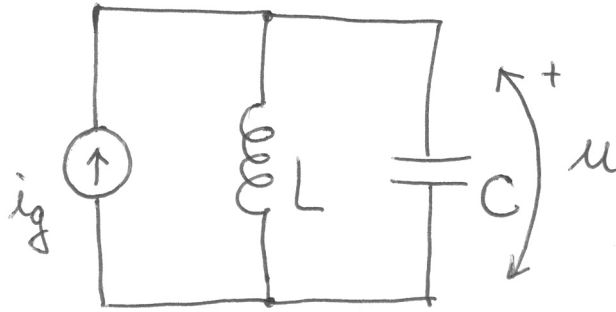
Posmatrajmo paralelno LC kolo, prikazano na Slici 27. Kolo se pobuđuje prostoperiodičnim strujnim generatorom, čija je struja $i_g(t) = I_m \cos(\omega t + \psi)$.

Kompleksna funkcija paralelnog LC kola u odnosu na ulazni napon jednaka je ulaznoj impedansi kola

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_g} = \underline{Z}(j\omega) = \frac{1}{j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}.$$

Amplitudna karakteristika kola je

$$G(\omega) = |\underline{G}(j\omega)| = \frac{1}{\left|\omega C - \frac{1}{\omega L}\right|} = Z(\omega),$$



Slika 27: Paralelno oscilatorno kolo.

a fazna karakteristika je

$$\varphi(\omega) = \arg \underline{G}(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \omega < \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega > \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases} .$$

Grafici amplitudne i fazne karakteristike kola su prikazane na Slici 28. Grafik efektivne vrijednosti napona ima isti oblik kao i grafik ulazne impedanse. Na učestanosti $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ u kolu nastupa idealna antirezonancija. Vidimo da ulazna impedansa na antirezonantnoj učestanosti teži beskonačnosti.

Grafici zavisnosti susceptansi kalema i kondenzatora od učestanosti, te modula i argumenta ulazne admitanse su prikazani na Slici 29. Vidimo da je na antirezonantnoj učestanosti ulazna admitansa jednaka nuli, dok je na učestanostima manjim od antirezonantne dominantna njena induktivna, a na učestanostima višim od antirezonantne njena kapacitivna priroda.

Kompleksni ulazni napon je jednak

$$\underline{U} = \frac{\underline{I}_g}{j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} .$$

Kompleksna struja kondenzatora je

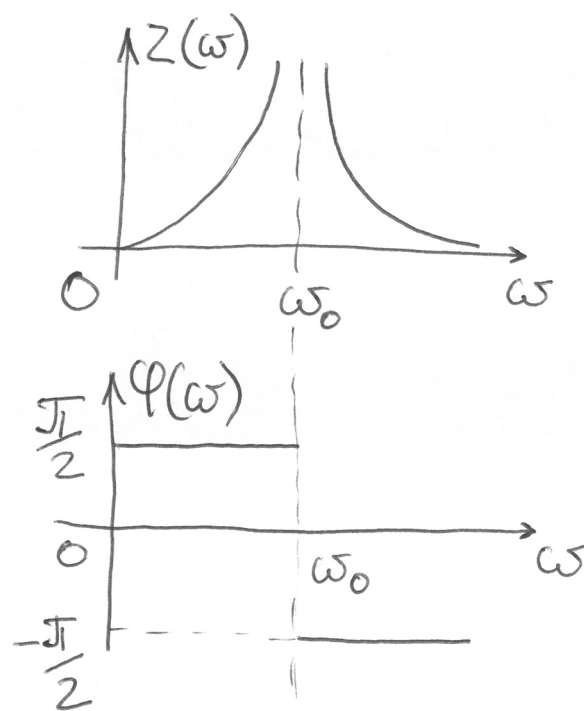
$$\underline{I}_C = j\omega C \underline{U} = \frac{j\omega C \underline{I}_g}{j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{\omega^2 LC \underline{I}_g}{\omega^2 LC - 1} .$$

Njena efektivna vrijednost je

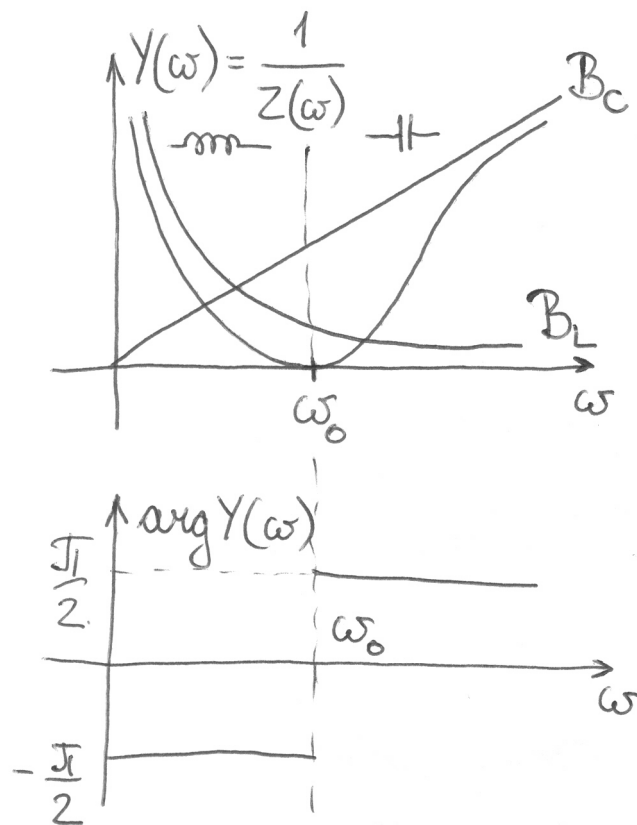
$$I_C = \frac{\omega^2 LC I_g}{|\omega^2 LC - 1|} .$$

Kompleksna struja kalema je

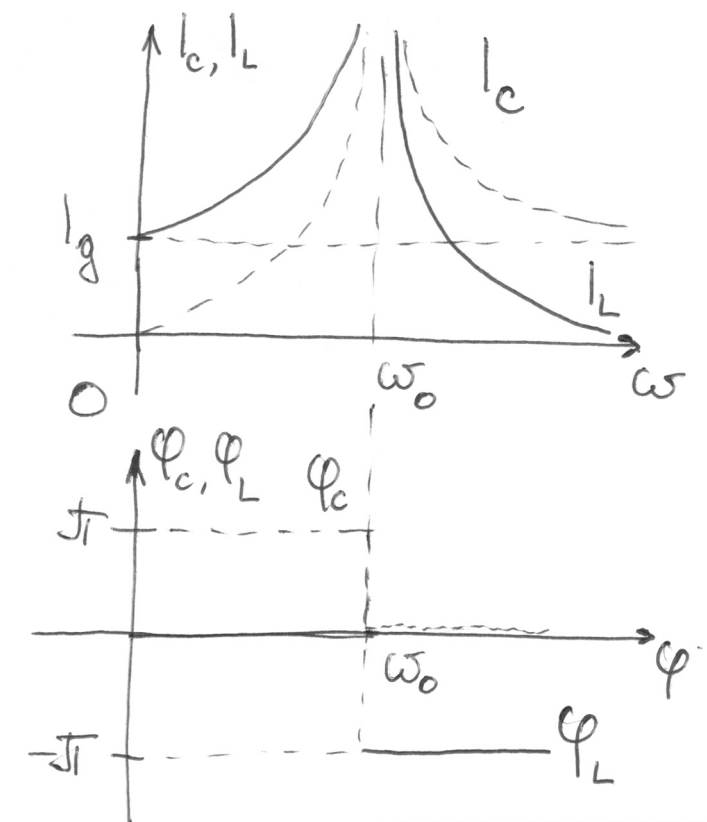
$$\underline{I}_L = \frac{1}{j\omega L} \underline{U} = \frac{\underline{I}_g}{1 - \omega^2 LC} ,$$



Slika 28: Amplitudna i fazna karakteristika paralelnog oscilatornog kola.



Slika 29: Grafici zavisnosti susceptansi kalema i kondenzatora, modula i argumenta ulazne admitanse u funkciji učestanosti.



Slika 30: Grafici efektivnih vrijednosti i početnih faza struja kalema i kondenzatora u funkciji učestanosti.

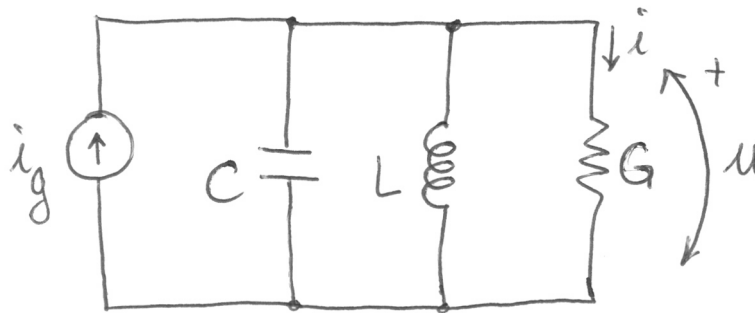
a njena efektivna vrijednost

$$I_L = \frac{I_g}{|1 - \omega^2 LC|}$$

Grafici efektivnih vrijednosti i početnih faza struja kalema i kondenzatora prikazani su na Slici 30. Može se uočiti sličnost između oblika ovih grafika i oblika grafika efektivnih vrijednosti napona kalema i kondenzatora u rednom oscilatornom kolu. Ova sličnost je posljedica osobine *dualnosti* rednog i paralelnog LC kola.

5.4 Paralelno RLC kolo

Posmatrajmo paralelno RLC kolo prikazano na Slici 31. Kolo se pobuđuje prostoperiodičnim strujnim generatorom čija je struja oblika $i_g(t) = I_m \cos(\omega t + \psi)$.



Slika 31: Paralelno RLC kolo.

Ulazna impedansa kola je

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{U}{\underline{I}_g} = \frac{1}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}.$$

Ulazna admitansa kola je

$$\underline{Y}(j\omega) = \frac{1}{\underline{Z}(j\omega)} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right).$$

Ulazna susceptansa kola je

$$B(\omega) = \omega C - \frac{1}{\omega L}.$$

U kolu se postiže fazna antirezonancija na učestanosti za koju vrijedi

$$B(\omega) = 0.$$

Dobija se antirezonantna učestanost

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Kompleksni ulazni napon je

$$\underline{U} = \underline{Z}(j\omega) = \underline{I}_g.$$

Na učestanostima generatora različitim od antirezonantne, $\omega \neq \omega_0$

$$\underline{U} = \frac{1}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} \underline{I}_g.$$

Trenutna vrijednost ulaznog napona je

$$u(t) = \frac{I_m}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \cos\left(\omega t + \psi - \arctg \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}\right).$$

Na antirezonantnoj učestanosti, $\omega = \omega_0$, kompleksni ulazni napon je

$$\underline{U} = \frac{I_g}{G}.$$

Trenutna vrijednost ulaznog napona je

$$u(t) = \frac{I_m}{G} \cos(\omega_0 t + \psi).$$

Vidimo da je na učestanosti fazne antirezonancije, ulazni napon u fazi sa strujom pobudnog generatora.

Na Slici 32 dati su grafici zavisnosti modula i argumenta ulazne impedanse od učestanosti. Vidimo da se maksimum ulazne impedanse postiže na antirezonantnoj učestanosti i da je izraženiji što je manja provodnost G u kolu. Pošto efektivna vrijednost ulaznog napona ima istu funkcionalnu zavisnost od učestanosti, dolazimo do zaključka da se na učestanosti fazne antirezonancije postiže i amplitudna antirezonancija, odnosno, da efektivna vrijednost struje dostiže maksimalnu vrijednost

$$I_{max} = \frac{I_g}{G}.$$

Na Slici 33 dat je grafik zavisnosti ulazne admitanse od učestanosti.

Ukoliko struju otpornika smatramo izlaznom promjenljivom, odgovarajuća funkcija prenosa¹ je

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{I}{I_g} = \frac{G}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}.$$

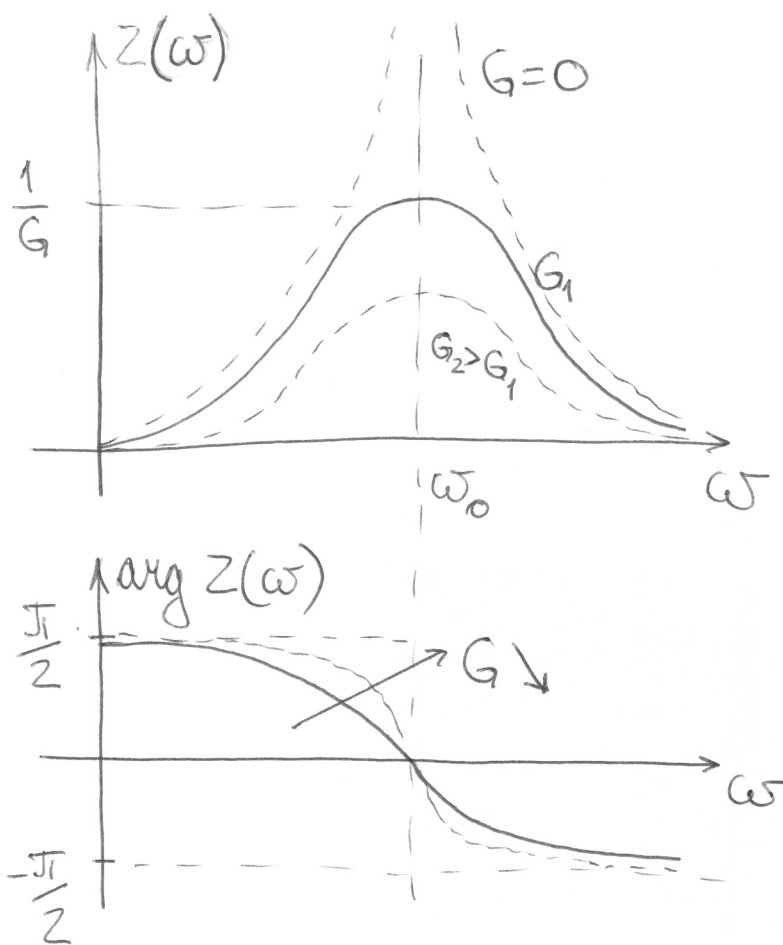
Q-faktor paralelnog RLC kola se može izračunati prema definiciji

$$Q = 2\pi \frac{W_{max}}{W_{G,T}},$$

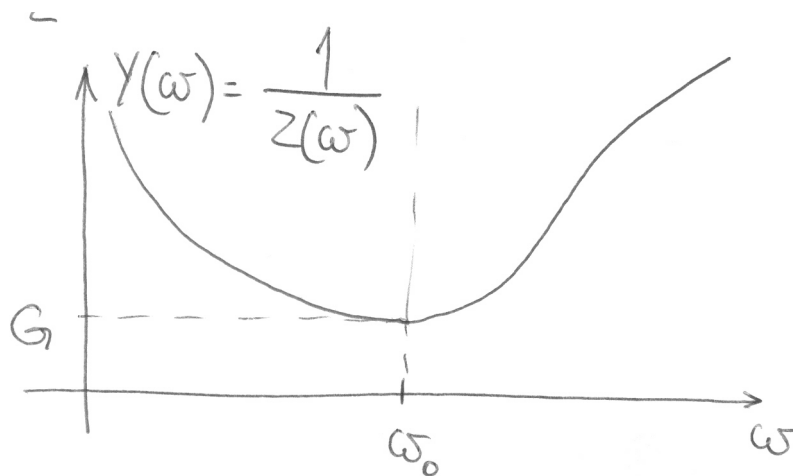
gdje je W_{max} maksimalna energija akumulirana u kolu, a $W_{G,T}$ je energija koja se u jednom periodu disipira na otporniku provodnosti G . Energija akumulirana u kondenzatoru je

$$w = \frac{1}{2} C u^2,$$

¹Koristimo H kao oznaku za funkciju prenosa/mreže da ne bi došlo do konfuzije sa oznakom provodnosti.



Slika 32: Zavisnost modula i argumenta ulazne impedanse od učestanosti.



Slika 33: Zavisnost ulazne admitanse od učestanosti.

a napon na antirezonačnoj učestanosti

$$u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \psi).$$

Kada je ulazni napon maksimalan, struja kroz kalem je jednaka nuli pa je ukupna energija akumulirana u kolu jednaka energiji akumuliranoj u kondenzatoru

$$W_{max} = \frac{1}{2} C U_m^2.$$

Energija koja se disipira na otporniku u toku jednog perioda je

$$W_{G,T} = \frac{G U_m^2 T}{2}.$$

Q-faktor je jednak

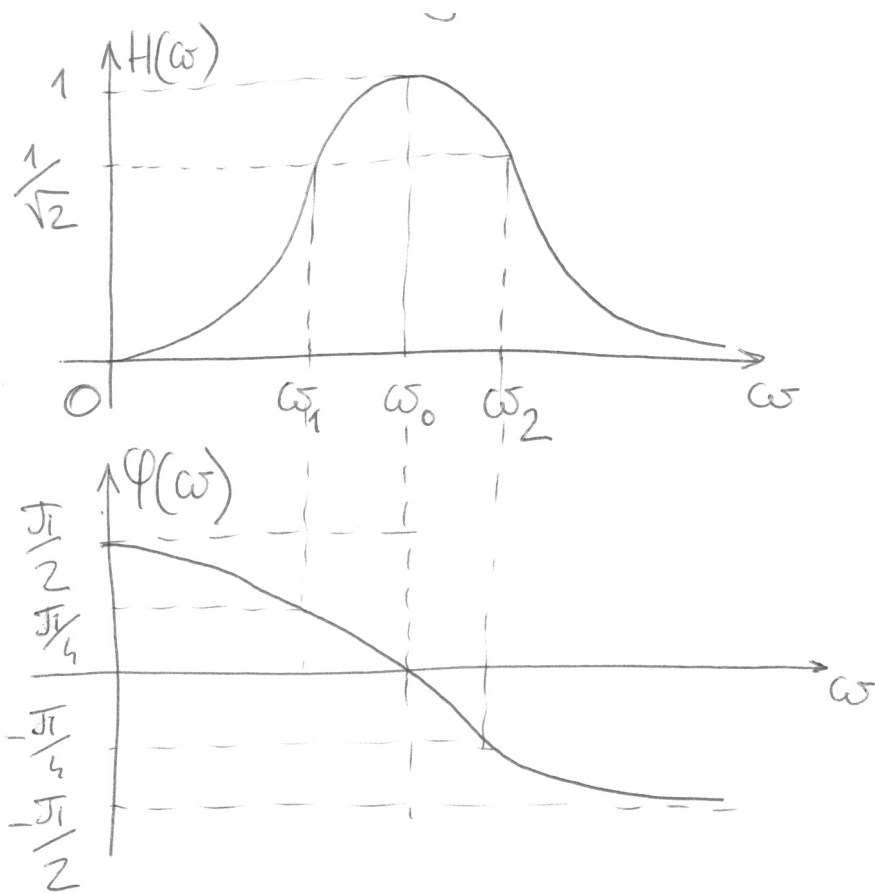
$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} C U_m^2}{\frac{G U_m^2 T}{2}} = \frac{2\pi C}{T G} = \frac{\omega_0 C}{G} = Q_{C0}.$$

Lako se pokaže i da je

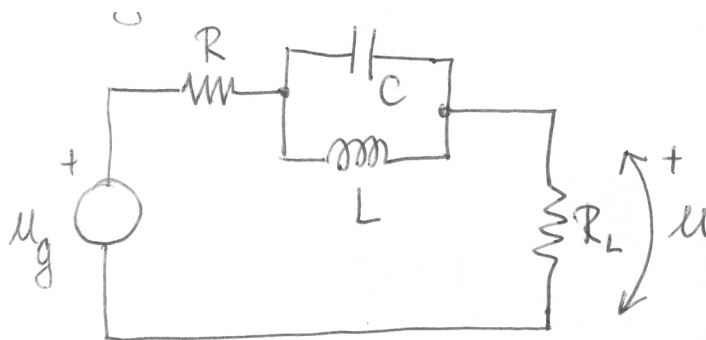
$$Q = \frac{1}{\omega_0 L G} = Q_{L0}.$$

Funkcija prenosa je sada

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega C}{G} - \frac{1}{\omega L G}\right)} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$



Slika 34: Amplitudna i fazna karakteristika paralelnog RLC kola.



Slika 35: Filtar nepropusnik opsega.

Ova relacija je identična kao odgovarajuća (dualna) relacija za redno RLC kolo pa i svi ostali rezultati ostaju isti, uz razliku u definiciji funkcije mreže i Q-faktora. Amplitudna i fazna karakteristika kola su date na Slici 34.

Kompleksne struje ostalih elemenata kola su

$$\underline{I}_C = j\omega C \underline{U} = \frac{j\omega C \underline{I}_g}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{jQ \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \underline{I}_g,$$

$$\underline{I}_L = \frac{1}{j\omega L} \underline{U} = \frac{1}{j\omega L} \frac{\underline{I}_g}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = -\frac{jQ \frac{\omega_0}{\omega}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \underline{I}_g.$$

Generalisana kompleksna funkcija kola je

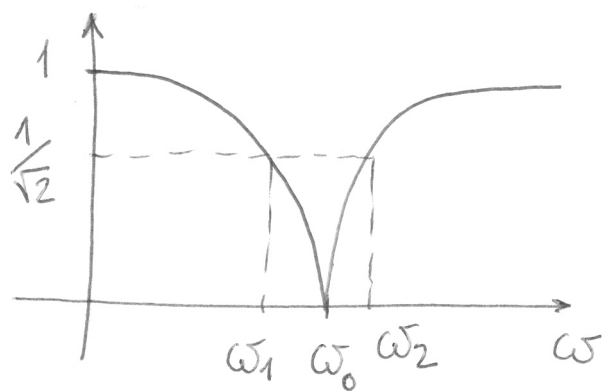
$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\underline{I}(\underline{s})}{\underline{I}_g(\underline{s})} = \frac{G}{G + C\underline{s} + \frac{1}{L\underline{s}}} = \frac{\frac{\omega_0}{Q} \underline{s}}{\underline{s}^2 + \frac{\omega_0}{Q} \underline{s} + \omega_0^2},$$

gdje su $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ i $Q = \frac{\omega_0 C}{G}$.

Oscilatorna kola su osnova za projektovanje i realizaciju električnih filtara zahvaljujući brzim promjenama njihove impedanse u zavisnosti od frekvencije. Antirezonatno kolo se može iskoristiti za realizaciju filtra nepropusnika opsega (notch filtra) kao na Slici 35. Funkcija prenosa ovog filtra je

$$\underline{G}(\underline{s}) = \frac{R_L (\underline{s}^2 + \omega_0^2)}{(R + R_L) (\underline{s}^2 + \omega_b \underline{s} + \omega_0^2)},$$

gdje su $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ i $\omega_b = \frac{1}{(R+R_L)C}$. Amplitudna karakteristika filtra je data na Slici 36. Nepropusni opseg ovog filtra je $B = \omega_2 - \omega_1 = \omega_b$.



Slika 36: Amplitudna karakteristika filtra nepropusnika opsega.