

Z-TRANSFORMACIJA I NJENE PRIMJENE U ANALIZI DISKRETNIH LTI ISTEMA

Transformacione tehnike su moćan alat za analizu signala i LTI sistema. U ovoj glavi ćemo uvesti z -transformaciju, opisati njene osobine i mogućnosti primjene u analizi diskretnih LTI sistema. Na primjer, vidjećemo da je u kodomenu z -transformacije (kompleksnoj z -ravni) konvolucija signala ekvivalentna množenju njihovih z -transformacija. Ova osobina značajno pojednostavljuje analitičko određivanje odziva LTI sistema na proizvoljan oblik pobude.

5.1 Bilateralna \mathcal{Z} - transformacija

\mathcal{Z} -transformacija diskretnog signala $x(n)$ se definiše kao beskonačni stepeni red:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad (5.1)$$

gdje je z kompleksna varijabla. Dakle, po definiciji je \mathcal{Z} -transformacija pravilo na osnovu kojeg se niz brojeva, realnih ili kompleksnih, kojim je predstavljen diskretni signal $x(n)$ u vremenskom domenu, preslikava u kompleksnu funkciju kompleksne varijable $X(z)$. Relacija (5.1) se naziva *direktna \mathcal{Z} -transformacija*, dok se relacija kojom se diskretni signal $x(n)$ iskazuje preko $X(z)$ naziva *inverzna \mathcal{Z} -transformacija*. Po konvenciji se \mathcal{Z} -transformacija označava sa:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}, \quad (5.2)$$

a inverzna \mathcal{Z} -transformacija sa:

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}. \quad (5.3)$$

Transformacioni par \mathcal{Z} -transformacije označavamo na sljedeći način:

$$x(n) \leftrightarrow X(z). \quad (5.4)$$

Izraz (5.1) zapravo predstavlja Loranov red, pa se $X(z)$ može odrediti samo za one vrijednosti kompleksne promjenljive z za koje Loranov red konvergira. Tada $|X(z)|$ ima konačnu vrijednost. Skup vrijednosti promjenljive z za koje Loranov red (5.1) konvergira naziva se *oblast konvergenije \mathcal{Z} -transformacije*, dok se skup vrijednosti promjenljive z za koje taj red divergira naziva se *oblast divergenije \mathcal{Z} -transformacije*.

Signal $x(n)$ konačnog trajanja $N_1 \leq n \leq N_2$ konvergira u cijeloj z -ravni ako su svi njegovi elementi ograničenih vrijednosti:

$$|x(n)| < \infty, \quad N_1 \leq n \leq N_2. \quad (5.5)$$

Iz oblasti konvergencije se jedino isključuju tačke $z = \infty$ ako je $N_1 < 0$ i/ili $z = 0$ ako je $N_2 > 0$, jer tada:

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x(n)z^{-n} \quad (5.6)$$

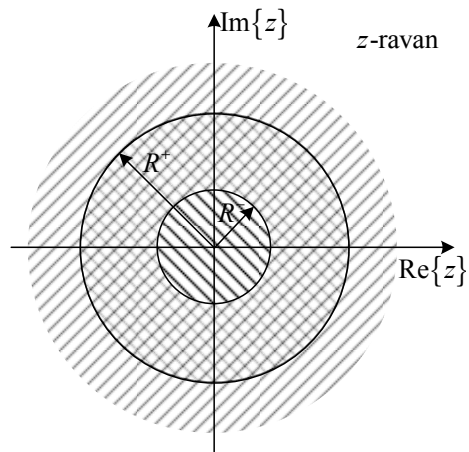
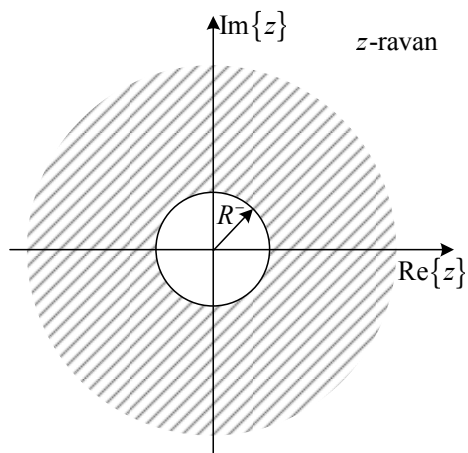
poprima beskonačno veliku vrijednost.

Problem određivanja oblasti konvergencije za signale neograničenog trajanja je složeniji. Za $z = re^{j\theta}$, modul z-transformacije je:

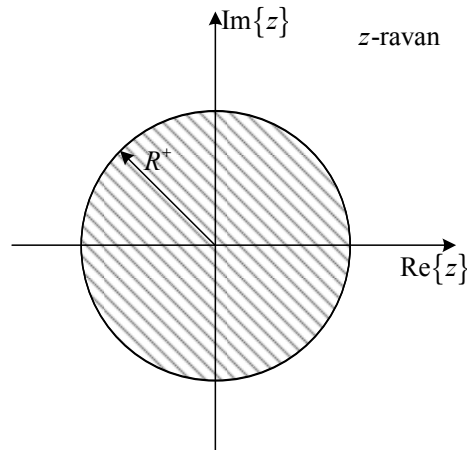
$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\theta n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}e^{-j\theta n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}|, \quad (5.7)$$

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)r^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}| = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)r^n| + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}|. \quad (5.8)$$

Egzistencija $X(z)$ zavisi od konvergencije posljednje dvije sume u (5.9). Ako postoji $r = R^+$, dovoljno malo da prva suma konvergira, odnosno da sekvenca $|x(n)r^n|$ bude apsolutno sumabilna za $1 \leq n < \infty$, onda ta suma konvergira i za svako $r < R^+$. S druge strane, ako postoji $r = R^-$, dovoljno veliko da druga suma konvergira, odnosno da sekvenca $|x(n)r^{-n}|$ bude apsolutno sumabilna za $0 \leq n < \infty$, onda ta suma konvergira i za svako $r > R^-$. Sa $z = re^{j\theta}$, $r = \text{const.}$ je određena kružnica u z -ravni sa poluprečnikom r . To znači da je oblast konvergencije prve sume unutrašnjost kruga poluprečnika R^+ , dok je oblast konvergencije druge sume spoljašnjost kruga poluprečnika R^- . Za egzistenciju z-transformacije neophodno je da obe ove sume konvergiraju, te je oblast konvergencije z-transformacije prsten $R^- < |z| < R^+$. Na Slici 5.1 oblast konvergencije prve sume je šrafirana kosim linijama pod uglom od 135° , a oblast konvergencije druge sume kosim linijama pod uglom od 45° . Presjek ove dvije oblasti je oblast konvergencije z-transformacije. U svakoj tački iz oblasti konvergencije z-transformacija i sve njene derivacije su kontinualne funkcije od z . Za kauzalne signale kod kojih je $x(n) = 0$ za $n < 0$, elementi signala u prvoj sumi su jednaki nuli, te je dovoljno ispuniti uslov konvergencije

Slika 5.1 Oblast konvergencije z -transformacije.Slika 5.2 Oblast konvergencije z -transformacije kauzalnog signala.

druge sume. Stoga je oblast konvergencije kauzalnih signala spoljašnjost kruga poluprečnika R^- , tj. $|z| > R^-$, prikazana na Slici 5.2. Na sličan način, oblast konvergencije antikauzalnih signala za koje vrijedi da je $x(n) = 0$ za $n > 0$, je



Slika 5.3 Oblast konvergencije z -transformacije antikauzalnog signala.

unutrašnjost kruga poluprečnika R^+ , tj. $|z| < R^+$, jer su u tom slučaju elementi signala u drugoj sumi jednaki nuli i dovoljno je da prva suma bude apsolutno sumabilna. Oblast konvergencije antikauzalnih signala prikazana je Slici 5.3. Vrijednosti z za koje je z -transformacija beskonačno velika nazivaju se *polovima* i označavaju sa "x", dok se vrijednosti z za koje je z -transformacija jednaka nuli nazivaju *nulama* z -transformacije i označavaju sa "o".

Preslikavanje koje se vrši z -transformacijom nije jednoznačno ako se ne uzme u obzir oblast konvergencije. Na primjerima elementarnih signala pokazaćemo kasnije da su analitički izrazi za z -transformacije nekih od kauzalnih signala $x(n)u(n)$ i njihovih antikauzalnih pomjerenih verzija $-x(-n-1)u(-n-1)$ identične. Međutim, oblasti konvergencije tih signala su različite. Prema tome, z -transformacija je jednoznačno preslikavanje i diskretni signal $x(n)$ je jednoznačno određen svojom z -transformacijom $X(z)$ samo ukoliko je poznata i oblast konvergencije $X(z)$. Inverznu z -transformaciju i metode njenog određivanja ćemo detaljno razmatrati kasnije.

Budući da su kod z -transformacije definisane sa (5.1) granice sume od $-\infty$ do ∞ , ovako definisanu z -transformaciju ponekad nazivamo *bilateralna z -transformacija*, kako bismo napravili razliku od unilateralne z -transformacije, koju ćemo uvesti nešto kasnije i koja je definisana sumom čije su granice od 0 do ∞ .

5.2 Unilateralna \mathcal{Z} - transformacija

O signalu $x(n)$ najčešće imamo dovoljno informacija tek nakon nekog trenutka kada počinje njegovo posmatranje (koji najčešće označavamo sa 0). Tada nije moguće koristiti definicioni izraz za bilateralnu \mathcal{Z} -transformaciju, jer ne poznajemo vrijednosti signala $x(n)$ za $n < 0$. Zbog toga je potrebno definisati jednostranu, odnosno *unilateralnu \mathcal{Z} -transformaciju*:

$$\mathcal{Z}_+ \{x(n)\} = X_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}. \quad (5.9)$$

Najvažnija primjena unilateralne \mathcal{Z} -transformacije je određivanje odziva LTI sistema sa nenulim početnim uslovima. Za rješavanje tih problema nije moguće koristiti bilateralnu \mathcal{Z} -transformaciju jer ne poznajemo niti pobudu niti stanje sistema (izuzev početnih uslova) za $n < 0$.

Za konvergenciju unilateralne z -transformacije:

$$|X_+(z)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\theta n} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}e^{-j\theta n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}| \quad (5.10)$$

treba osigurati apsolutnu sumabilnost sekvence $|x(n)r^{-n}|$, te je oblast konvergencije unilateralne \mathcal{Z} -transformacije uvijek spoljašnjost kruga poluprečnika $r = R^-$, koji je dovoljno velik da (5.11) konvergira.

Bilateralna \mathcal{Z} -transformacija kauzalnog signala $x_+(n)$, koji je za $n < 0$ jednak nuli, a za $n \geq 0$ posmatranom signalu $x(n)$:

$$x_+(n) = \begin{cases} x(n), & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

jednaka je unilateralnoj \mathcal{Z} -transformaciji signala $x(n)$:

$$\mathcal{Z}\{x_+(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_+(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = \mathcal{Z}_+\{x(n)\} = X_+(z). \quad (5.12)$$

Računanje *inverzne unilateralne \mathcal{Z} -transformacije* od $X_+(z)$ se svodi na računanje inverzne bilateralne \mathcal{Z} -transformacije i zadržavanje samo dijela signala za $n \geq 0$:

$$x_+(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{X_+(z)\}, \quad n \geq 0. \quad (5.13)$$

Uglavnom se posebno ne naglašava da li se koristi bilateralna ili unilaternalna z -transformacija, niti se uvode posebne oznake kao što smo to radili u okviru ovog poglavlja. Koji oblik z -transformacije se koristi jasno je iz samog konteksta. Stoga ćemo i mi u daljem izlaganju u oba slučaja koristiti oznake uvedene kod bilateralne z -transformacije.

5.3 Inverzna z - transformacija

Prilikom korišćenja z -transformacije, nakon analize i obrade signala u transformacionom domenu, potrebno je odrediti inverznu z -transformaciju, te na taj način dobiti rezultujući signal u domenu diskretnog vremena. Kako bismo došli do izraza za inverznu z -transformaciju, pomnožimo definicioni izraz (5.1) sa z^{k-1} , pa odredimo konturni integral čija se kontura integracije C nalazi u oblasti konvergencije z -transformacije:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n+k-1} dz. \quad (5.14)$$

Budući da je na konturi integracije osigurana konvergencija z -transformacije, možemo zamijeniti redoslijed integraljenja i sumiranja:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{-(n-k+1)} dz. \quad (5.15)$$

Na osnovu Košijeve teoreme znamo da je:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{-k} dz = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}. \quad (5.16)$$

Stoga su svi integrali pod sumom u (5.15) jednaki nuli, osim za $n=k$, te dobijamo da je:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz = x(k). \quad (5.17)$$

Na kraju, napravimo zamjenu $k \rightarrow n$, kako bismo dobili uobičajen oblik zapisa inverzne \mathcal{Z} -transformacije:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz. \quad (5.18)$$

Analitičko izračunavanje konturnih integrala nije jednostavno, te se u praksi koriste drugi metodi određivanja inverzne \mathcal{Z} -transformacije, koji će biti detaljno izloženi u Poglavlju 5.6.

5.4 \mathcal{Z} - transformacije elementarnih signala

U ovom poglavlju odredit ćemo \mathcal{Z} -transformacije elementarnih signala, kao što su jedinični impuls, Hevisajdova sekvenca i kompleksna eksponencijalna sekvenca, kao i \mathcal{Z} -transformacije drugih signala koje se iz njih lako odrede, a značajne su za daljnje izlaganje.

Za jedinični impuls \mathcal{Z} -transformacija se odredi veoma jednostavno. Budući da je $\delta(n) = 0$ za svaku vrijednost n , osim za $n = 0$, vrijedi da je:

$$\mathcal{Z}\{\delta(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1. \quad (5.19)$$

Budući da se radi o signalu konačnog trajanja, tačnije o samo jednom elementu signala u trenutku $n = 0$, \mathcal{Z} -transformacija jediničnog impulsa konvergira u cijeloj z -ravni.

Za Hevisajdovu sekvenču

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (5.20)$$

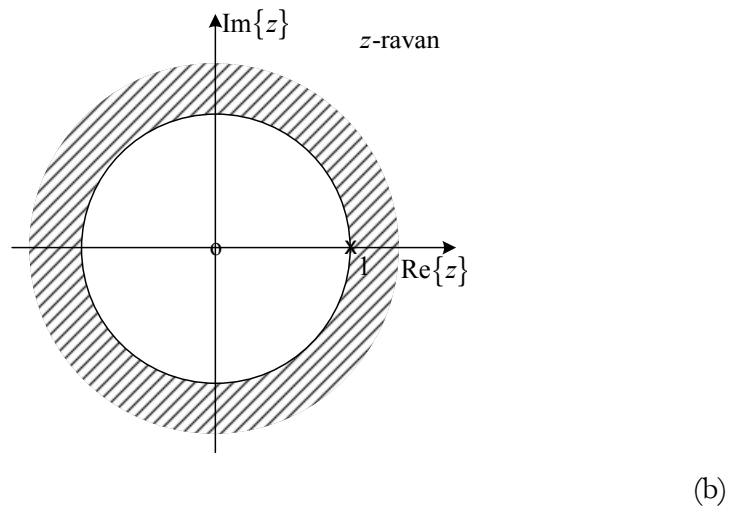
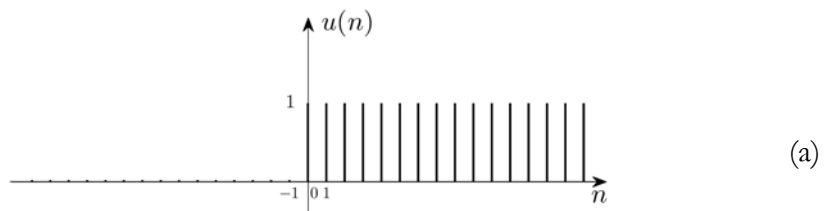
\mathcal{Z} -transformaciju odredimo na sljedeći način:

$$\mathcal{Z}\{u(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n}. \quad (5.21)$$

Budući da se radi o geometrijskoj progresiji koja konvergira za $|z^{-1}| < 1$, odnosno $|z| > 1$, u oblasti konvergencije koja je spoljašnjost kruga jediničnog poluprečnika, z-transformacija Hevisajdove sekvence je jednaka:

$$\mathcal{Z}\{u(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} \Big|_{|z^{-1}| < 1} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}. \quad (5.22)$$

Hevisajdova sekvenca i oblast konvergencije njene z-transformacije prikazane su na Slici 5.4.



Slika 5.4 (a) Hevisajdova sekvenca (kauzalan signal) i (b) oblast konvergencije njene z-transformacije.

Za sekvencu koja se dobije refleksijom negativne Hevisajdove sekvence i pomijeranjem za jedan vremenski interval ulijevo:

$$-u(-n-1) = \begin{cases} 1, & n \leq -1 \\ 0 & n \geq 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

\mathcal{Z} -transformacija je jednaka:

$$\mathcal{Z}\{-u(-n-1)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -u(-n-1)z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} 1 \cdot z^{-n}. \quad (5.24)$$

Nakon dodavanja i oduzimanja elementa sume za $n = 0$, dobijamo:

$$\mathcal{Z}\{-u(-n-1)\} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} z^n \Big|_{|z|<1} = 1 - \frac{1}{1-z} = \frac{z}{z-1}, \quad (5.25)$$

pod uslovom da je $|z| < 1$. Dakle, oblast konvergencije ove antikauzalne sekvence je unutrašnjost kruga jediničnog poluprečnika. Analizirani signal i oblast konvergencije njegove \mathcal{Z} -transformacije prikazani su na Slici 5.5.

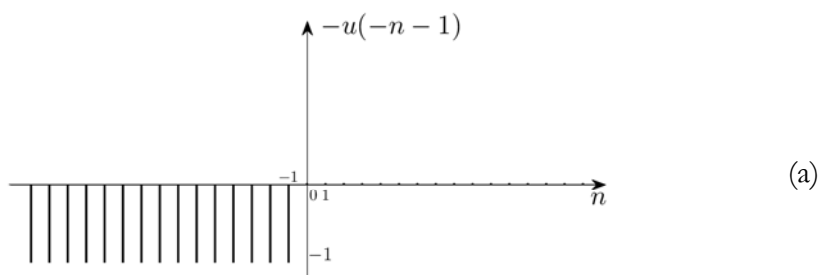
Sličan postupak provodimo kako bismo odredili \mathcal{Z} -transformaciju kompleksne eksponencijalne sekvence $x(n) = a^n u(n)$, $a \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{a^n u(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \Big|_{|az^{-1}|<1} = \\ &= \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Oblast konvergencije ovog kauzalnog signala je određena sa $|z| > |a|$. U geometrijskom smislu to je spoljašnjost kruga poluprečnika $|a|$.

Za kompleksnu eksponencijalnu sekvencu $x(n) = -a^n u(-n-1)$, $a \in \mathbb{C}$ \mathcal{Z} -transformacija je jednaka:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{-a^n u(-n-1)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u(-n-1) z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n \Big|_{|a^{-1}z|<1} = \\ &= 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = 1 - \frac{a}{a-z} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|. \end{aligned} \quad (5.27)$$



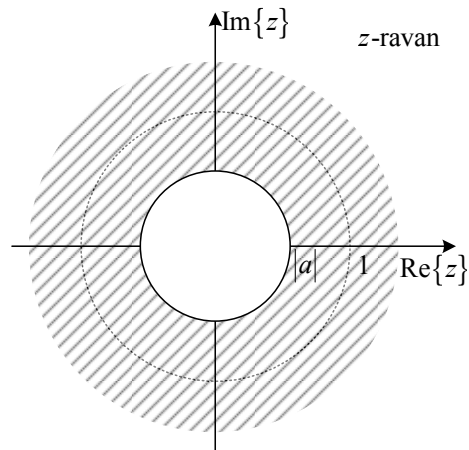
(b)

Slika 5.5 (a) Reflektovana i pomjerena negativna Hevisajdova sekvenca (antikauzalni signal) i (b) oblast konvergencije njene z-transformacije.

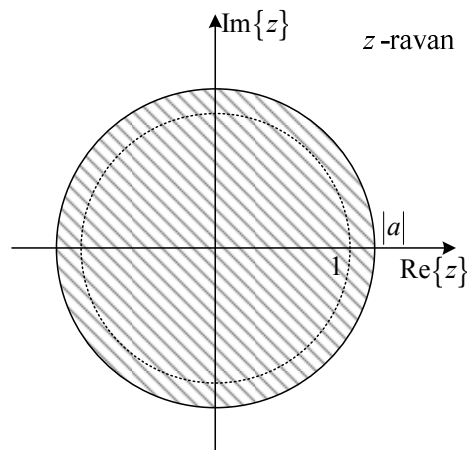
Kod ovog antikauzalnog signala oblast konvergencije je određena sa $|z| < |a|$, dakle unutrašnjost kruga poluprečnika $|a|$.

Oblasti konvergencije z-transformacija kompleksnih eksponencijalnih sekvenci $a^n u(n)$ uz $|a| < 1$ i $-a^n u(-n-1)$ uz $|a| > 1$ su prikazane na slikama 5.6 i 5.7. Primijetimo da Hevisajdova sekvenca i reflektovana negativna Hevisajdova sekvenca koja je pomjerena za jedan vremenski interval ulijevo imaju jednake analitičke izraze za njihove z-transformacije. Jednako vrijedi za analiziranu kauzalnu i antikauzalnu verziju kompleksne eksponencijalne

sekvence. Međutim, iako su analitički izrazi za z -transformacije ovih signala jednaki, razlikuju se njima odgovarajuće oblasti konvergencija, što osigurava jednoznačnost preslikavanja, o čemu smo već govorili u Poglavlju 5.1



Slika 5.6 Oblast konvergencije z -transformacije kauzalne kompleksne eksponencijalne sekvence $a^n u(n)$.



Slika 5.7 Oblast konvergencije z -transformacije antikauzalne kompleksne eksponencijalne sekvence $-a^n u(-n-1)$.

5.5 Osobine \mathcal{Z} - transformacije

U ovom poglavlju razmotrićemo i dokazati najvažnije osobine \mathcal{Z} -transformacije na osnovu kojih se izvode pravila koja pojednostavljaju njenu primjenu. Većina osobina vrijede podjednako i za bilateralnu i za unilateranu \mathcal{Z} -transformaciju. Jedino ćemo osobinu pomaka originalnog signala u domenu diskretnog vremena razmatrati posebno za bilateralnu, a posebno za unilateranu \mathcal{Z} -transformaciju. Ova osobina je veoma značajna pri rješavanju jednačina diferencijala, odnosno određivanju odziva sistema sa nenulim početnim uslovima pomoću \mathcal{Z} -transformacije.

5.5.1 Linearnost

Ako postoje transformacioni parovi $x_1(n) \leftrightarrow X_1(z)$, $R_1^- < |z| < R_1^+$ i $x_2(n) \leftrightarrow X_2(z)$, $R_2^- < |z| < R_2^+$, tada je \mathcal{Z} -transformacija linearne kombinacije ta dva diskretna signala jednaka linearnoj kombinaciji njihovih \mathcal{Z} -transformacija u preklapljenj oblasti konvergencije:

$$\begin{aligned} ax_1(n) + bx_2(n) &\leftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z), \quad \forall a, b \in \mathbb{C}, \\ R^- < |z| < R^+, \quad R^- &= \max(R_1^-, R_2^-), \quad R^+ = \min(R_1^+, R_2^+) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Dokaz:

Zbog linearnosti sume kao osnovnog operatora \mathcal{Z} -transformacije, iz njenog definicionog izraza (5.1) direktno slijedi:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{ax_1(n) + bx_2(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [ax_1(n) + bx_2(n)]z^{-n} = \\ &= a \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)z^{-n} + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)z^{-n} = \\ &= aX_1(z) + bX_2(z). \end{aligned} \quad (5.29)$$

\mathcal{Z} -transformacija linearne kombinacije ova dva signala će konvergirati u oblasti u kojoj konvergiraju njihove pojedinačne \mathcal{Z} -transformacije. Ako su oblasti konvergencije \mathcal{Z} -transformacija $X_1(z)$ i $X_2(z)$ date sa $R_1^- < |z| < R_1^+$ i

$R_2^- < |z| < R_2^+$ respektivno, oblast konvergencije \mathcal{Z} -transformacije njihove linearne kombinacije je dio z -ravni u kojoj se preklapaju oblasti konvergencija $X_1(z)$ i $X_2(z)$, tj. $R^- < |z| < R^+$, $R^- = \max(R_1^-, R_2^-)$, $R^+ = \min(R_1^+, R_2^+)$.

□

Prilikom linearne kombinacije diskretnih signala, u nekim slučajevima se može desiti da oblast konvergencije \mathcal{Z} -transformacije linearne kombinacije bude šira od svake od pojedinačnih oblasti konvergencija \mathcal{Z} -transformacija signala koji učestvuju u linearnoj kombinaciji. Jedan takav slučaj linearne kombinacije diskretnih sekvenci prikazaćemo u primjeru koji slijedi.

Primjer 5.1:

Odrediti oblasti konvergencije \mathcal{Z} -transformacija signala $a^n u(n)$ i $a^n u(n-1)$, a zatim i njihove linearne kombinacije $a^n u(n) - a^n u(n-1)$.

Rješenje:

Prilikom razmatranja \mathcal{Z} -transformacija elementarnih signala, u (5.26) smo pronašli da je oblast konvergencije \mathcal{Z} -transformacije signala $a^n u(n)$ jednaka $|z| > |a|$. Posmatrajući \mathcal{Z} -transformaciju signala $a^n u(n-1)$:

$$\mathcal{Z}\{a^n u(n-1)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n-1) z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (az^{-1})^n \quad (5.30)$$

zaključujemo da će sekvenca az^{-1} biti apsolutno sumabilna za $n = 1, 2, \dots, \infty$ ako je $|az^{-1}| < 1$, odnosno $|z| > |a|$. Vidimo da su oblasti konvergencija \mathcal{Z} -transformacija oba ova signala jednake $|z| > |a|$, što je u geometrijskom smislu spoljašnjost kruga poluprečnika $|a|$ u z -ravni.

Posmatrajmo sada linearnu kombinaciju $a^n u(n) - a^n u(n-1)$. Ova razlika signala za rezultat ima sekvencu $\delta(n)$:

$$a^n u(n) - a^n u(n-1) = a^n \delta(n), \quad (5.31)$$

jer su svi elementi ova dva signala, osim u nuli, jednaki i poništavaju se. Po svojstvu odabiranja jediničnog impulsa, znamo da je

$$a^n \delta(n) = a^0 \delta(n) = \delta(n), \quad (5.32)$$

a oblast konvergencije z -transformacije delta sekvence je cijela kompleksna z -ravan, te zaključujemo da je nakon linearne kombinacije posmatranih signala došlo do proširenja oblasti konvergencije z -transformacije.

□

Primjer 5.2:

Koristeći pravilo linearnosti odrediti z -transformacije signala $\cos \omega_0 n \cdot u(n)$ i $\sin \omega_0 n \cdot u(n)$.

Rješenje:

Poznavajući transformacioni par:

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a| \quad (5.33)$$

lako odredimo z -transformacije kompleksnih sinusnih signala:

$$e^{j\omega_0 n} u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z - e^{j\omega_0}}, \quad |z| > |e^{j\omega_0}| = 1, \quad (5.34)$$

$$e^{-j\omega_0 n} u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}}, \quad |z| > |e^{-j\omega_0}| = 1. \quad (5.35)$$

Sada na osnovu (5.34) i (5.35) određujemo često korišćene z -transformacije signala $\cos \omega_0 n \cdot u(n)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{\cos \omega_0 n \cdot u(n)\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2}[e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}]u(n)\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{e^{j\omega_0 n}u(n)\} + \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{e^{-j\omega_0 n}u(n)\} = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}}\right) = \\
&= \frac{z(z - e^{-j\omega_0}) + z(z - e^{j\omega_0})}{2(z - e^{j\omega_0})(z - e^{-j\omega_0})} = \\
&= \frac{z^2 - z \cos \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}, \quad |z| > 1
\end{aligned} \tag{5.36}$$

i signala $\sin \omega_0 n \cdot u(n)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{\sin \omega_0 n \cdot u(n)\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}]u(n)\right\} = \\
&= \frac{1}{2j}\mathcal{Z}\{e^{j\omega_0 n}u(n)\} - \frac{1}{2j}\mathcal{Z}\{e^{-j\omega_0 n}u(n)\} = \\
&= \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z - e^{j\omega_0}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}}\right) = \\
&= \frac{z(z - e^{-j\omega_0}) - z(z - e^{j\omega_0})}{2j(z - e^{j\omega_0})(z - e^{-j\omega_0})} = \\
&= \frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}, \quad |z| > 1.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

□

5.5.2 Pomak u vremenskom domenu kod bilateralne \mathcal{Z} -transformacije

Ako postoji transformacioni par $x(n) \leftrightarrow X(z)$, sa oblašću konvergencije $R^- < |z| < R^+$, tada pomak signala $x(n)$ u domenu diskretnog vremena za m

vremenskih intervala ($m \in \mathbb{Z}$) dovodi do množenja z-transformacije $X(z)$ sa kompleksnom eksponencijalnom sekvencom z^{-m} , pri čemu se oblast konvergencije ne mijenja:

$$x(n-m) \leftrightarrow z^{-m}X(z), R^- < |z| < R^+. \quad (5.38)$$

U odnosu na z-transformaciju originalnog signala, konvergencija z-transformacije pomjerenog signala se može razlikovati samo u tačkama $z=0$ ili $z=\infty$.

Dokaz:

Na osnovu definicionog izraza (5.1) dobijamo z-transformaciju pomjerene sekvence $x(n-m)$:

$$\mathcal{Z}\{x(n-m)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)z^{-n} \Big|_{n-m \rightarrow n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-(n+m)} = z^{-m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}. \quad (5.39)$$

Posljednja suma je jednaka $X(z)$, te je oblast konvergencije z-transformacije signala $x(n-m)$ jednaka oblasti konvergencije $X(z)$, izuzev eventualno u tačkama $z=0$ ili $z=\infty$ što je posljedica množenja sa z^{-m} u (5.39). U oblasti konvergencije vrijedi:

$$\mathcal{Z}\{x(n-m)\} = z^{-m}X(z). \quad (5.40)$$

□

Primjer 5.3:

Koristeći pravilo pomaka odrediti z-transformacije i oblasti konvergencije signala $\delta(n-1)$ i $\delta(n+1)$.

Rješenje:

Za jedinični impuls $\delta(n)$ znamo da ima z-transformaciju jednaku jedinici sa oblašću konvergencije koja obuhvata kompletnu z -ravan. Koristeći pravilo pomaka (5.38) dobijamo:

$$\mathcal{Z}\{\delta(n-1)\} = z^{-1}, \quad (5.41)$$

$$\mathcal{Z}\{\delta(n+1)\} = z. \quad (5.42)$$

Iz (5.41) vidimo da oblast konvergencije $\mathcal{Z}\{\delta(n-1)\}$ ne obuhvata tačku $z=0$ jer tada z^{-1} poprima beskonačno veliku vrijednost, dok $\mathcal{Z}\{\delta(n+1)\}$ data sa (5.42) ne konvergira u beskonačnosti.

□

Primjer 5.4:

Koristeći pravilo pomaka odrediti \mathcal{Z} -transformaciju pomjerene Hevisajdove sekvence $u(n+5)$.

Rješenje:

Za Hevisadovu sekvencu vrijedi da je:

$$u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1. \quad (5.43)$$

Na osnovu pravila pomaka (5.38) dobijamo da je:

$$u(n+5) \leftrightarrow \frac{z^6}{z-1}. \quad (5.44)$$

Oblast konvergencije ostaje spoljašnost kruga $|z| > 1$, ali je neophodno iz oblasti konvergencije isključiti tačku u beskonačnosti. Dok je \mathcal{Z} -transformacija konvergirala i u beskonačnosti, zbog množenja sa z^5 , \mathcal{Z} -transformacija posmatrane pomjerene Hevisajdove sekvence ne konvergira u beskonačnosti.

□

5.5.3 Pomak u vremenskom domenu kod unilateralne \mathcal{Z} -transformacije

Budući da ćemo se prilikom primjene unilateralne \mathcal{Z} -transformacije za traženje odziva zadržati na kauzalnim LTI sistemima, i da se u jednačinama diferencija koje opisuju ovakve sisteme ne pojavljuju elementi signala sa indeksima većim od onog koji označava trenutak posmatranja n , pravilo pomaka kod unilateralne \mathcal{Z} -transformacije ćemo razmatrati samo za slučaj da je $m > 0$.

Ako postoji transformacioni par unilateralne \mathcal{Z} -transformacije $x(n) \leftrightarrow X(z)$, sa oblašću konvergencije $R^- < |z| < R^+$, tada je unilateralna \mathcal{Z} -transformacija signala koji je u odnosu na $x(n)$ u domenu diskretnog vremenu pomjeren za m vremenskih intervala ($m > 0$), tj. signala $x(n-m)$, jednaka:

$$\mathcal{Z}\{x(n-m)\} = x(-m)z^0 + x(-m+1)z^{-1} + \dots + x(-1)z^{-m+1} + z^{-m}X(z). \quad (5.45)$$

Pri tome se oblast konvergencije unilateralne \mathcal{Z} -transformacije ne mijenja, osim eventualno u tački $z=0$.

Dokaz:

Na osnovu definicionog izraza (5.9), za unilaterlnu \mathcal{Z} -transformaciju pomjerene sekvence $x(n-m)$ dobijamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x(n-m)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m)z^{-n} \Big|_{n-m \rightarrow n} = \sum_{n=-m}^{\infty} x(n)z^{-(n+m)} = z^{-m} \sum_{n=-m}^{\infty} x(n)z^{-n} = \\ &= z^{-m} \left[x(-m)z^m + x(-m+1)z^{m-1} + \dots + x(-1)z^1 + \sum_{n=-m}^{\infty} x(n)z^{-n} \right] = \\ &= x(-m)z^0 + x(-m+1)z^{-1} + \dots + x(-1)z^{-m+1} + z^{-m}X(z), \end{aligned} \quad (5.46)$$

pri čemu je potrebno osigurati konvergenciju $z^{-m}X(z)$. Budući da smo pretpostavili da je $m > 0$, unilaterlna \mathcal{Z} -transformacija pomjerene sekvence konvergira svuda gdje konvergira $X(z)$, osim eventualno u tački $z=0$ zbog množenja sa z^{-m} u (5.46).

□

5.5.4 Skaliranje u vremenskom domenu

Ako postoji transformacioni par $x(n) \leftrightarrow X(z)$, sa oblašću konvergencije $R^- < |z| < R^+$, tada za skaliran signal $x(an)$, $a \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$x(an) \leftrightarrow X\left(z^{\frac{1}{a}}\right). \quad (5.47)$$

Za konvergenciju \mathcal{Z} -transformacije skaliranog signala je potrebno da bude $R^- < \left|z^{\frac{1}{a}}\right| < R^+$.

Dokaz:

Za \mathcal{Z} -transformaciju skaliranog signala $x(an)$, $a \in \mathbb{R}$ se na osnovu definicionog izraza (5.1) dobija:

$$\mathcal{Z}\{x(an)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(an) z^{-n} \Big|_{an \rightarrow n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left(z^{\frac{1}{a}}\right)^{-n} = X\left(z^{\frac{1}{a}}\right). \quad (5.48)$$

Ako je oblast konvergencije $X(z)$ jednaka $R^- < |z| < R^+$, da bi $X\left(z^{\frac{1}{a}}\right)$ konvergiralo, mora da vrijedi $R^- < \left|z^{\frac{1}{a}}\right| < R^+$.

□

5.5.5 Skaliranje u \mathcal{Z} -domenu

Ako postoji transformacioni par $x(n) \leftrightarrow X(z)$, sa oblašću konvergencije $R^- < |z| < R^+$, tada je \mathcal{Z} -transformacija ovog signala $a^n x(n)$, $a \in \mathbb{C}$, skalirana verzija od $X(z)$, tj. vrijedi da je:

$$a^n x(n) \leftrightarrow X(a^{-1}z). \quad (5.49)$$

sa oblašću konvergencije $|a|R^- < |z| < |a|R^+$.

Dokaz:

Potražimo z-transformaciju signala $a^n x(n)$, $a \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{Z}\{a^n x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (a^{-1}z)^{-n} = X(a^{-1}z). \quad (5.50)$$

Za konvergenciju $\mathcal{Z}\{a^n x(n)\}$ potrebno je ispuniti uslov $R^- < |a^{-1}z| < R^+$, odakle slijedi da je $|a|R^- < |z| < |a|R^+$.

□

Primjer 5.5:

Koristeći pravilo skaliranja u z-domenu, odrediti z-transformaciju signala $a^n u(-n-1)$, $a \in \mathbb{C}$.

Rješenje:

Umjesto direktnim računanjem na osnovu definicionog izraza (5.1) kao u Poglavlju 5.4, gdje smo pronašli transformacioni par

$$a^n u(-n-1) \leftrightarrow -\frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|, \quad (5.51)$$

poznavajući z-transformaciju reflektovane i pomjerene Hevisajdove sekvence:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{u(-n-1)\} = -\frac{z}{z-1}, \quad |z| < 1 \quad (5.52)$$

i koristeći pravilo skaliranja u z-domenu (5.49), određujemo z-transformaciju signala $a^n u(-n-1)$:

$$\mathcal{Z}\{a^n u(-n-1)\} = X(a^{-1}z) = -\frac{a^{-1}z}{a^{-1}z-1}, \quad (5.53)$$

$$a^n u(-n-1) \leftrightarrow -\frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|. \quad (5.54)$$

□

5.5.6 Deriviranje u z -domenu

Ako postoji transformacioni par $x(n) \leftrightarrow X(z)$, sa oblašću konvergencije $R^- < |z| < R^+$, tada postoji i transformacioni par:

$$nx(n) \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}. \quad (5.55)$$

Dokaz:

Deriviranjem z -transformacije $X(z)$ po varijabli z dobijamo:

$$\frac{dX(z)}{dz} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n) z^{-n-1}, \quad (5.56)$$

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [nx(n)] z^{-n} = \mathcal{Z}\{nx(n)\}, \quad (5.57)$$

te egzistira transformacioni par:

$$nx(n) \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}. \quad (5.58)$$

Deriviranjem z -transformacije oblast konvergencije se može promijeniti i potrebno ju je odrediti za svaki slučaj posebno.

□

5.5.7 z-transformacija kompleksno konjugovanog signala

Ako postoji transformacioni par $x(n) \leftrightarrow X(z)$, sa oblašću konvergencije $R^- < |z| < R^+$, tada postoji i transformacioni par:

$$x^*(n) \leftrightarrow X^*(z^*). \quad (5.59)$$

Oblast konvergencije z-transformacije konjugovano kompleksnog signala $x^*(n) = x_1(n) - jx_2(n)$ jednaka je oblast konvergencije z-transformacije originalnog signala $x(n) = x_1(n) + jx_2(n)$.

Dokaz:

Potražimo z-transformaciju konjugovano kompleksnog signala $x^*(n) = x_1(n) - jx_2(n)$:

$$z\{x^*(n)\} = z\{x_1(n) - jx_2(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_1(n) - jx_2(n)]z^{-n}. \quad (5.60)$$

S druge strane, vrijedi da je konjugovano kompleksna z-transformacija originalnog signala:

$$X^*(z) = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_1(n) + jx_2(n)]z^{-n} \right\}^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_1(n) - jx_2(n)](z^*)^{-n}, \quad (5.61)$$

a nakon što se napravi konjugovano kompleksna operacija nad varijablom z dobijamo:

$$X^*(z^*) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_1(n) - jx_2(n)]z^{-n}. \quad (5.62)$$

Poređenjem (5.60) i (5.62) zaključujemo da je:

$$z\{x^*(n)\} = X^*(z^*). \quad (5.63)$$

Nakon konjugovano kompleksnih operacija ne mijenja se oblast konvergencije, te su oblasti konvergencije z-transformacija signala $x^*(n)$ i $x(n)$ jednake. □

5.5.8 Početna vrijednost kauzalnog signala

Za kauzalan signal $x(n)$ koji ima \mathcal{Z} -transformaciju $X(z)$ vrijedi da je:

$$x(0) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} X(z). \quad (5.64)$$

Ova osobina \mathcal{Z} -transformacije nam omogućava da, bez traženja inverzne \mathcal{Z} -transformacije, odredimo početnu vrijednost kauzalnog signala $x(n)$, tj. $x(0)$, ako poznamo njegovu \mathcal{Z} -transformaciju $X(z)$.

Dokaz:

\mathcal{Z} -transformacija kauzalne sekvence $x(n)$ je jednaka:

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \dots \quad (5.65)$$

Kada $|z| \rightarrow \infty$ svi članovi sume (5.60) osim $x(0)$ teže ka nuli, te vrijedi da je:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} X(z) = x(0). \quad (5.66)$$

□

Primjer 5.6:

Odrediti početnu vrijednost kauzalnog signala čija je \mathcal{Z} -transformacija data sa $z/(z-a)$, $|z| > |a|$.

Rješenje:

Na osnovu (5.64) dobijamo da je:

$$x(0) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{z}{z-a} = 1. \quad (5.67)$$

Ovo je u skladu sa našim ranijim znanjima, jer je zadata \mathcal{Z} -transformacija zapravo \mathcal{Z} -transformacija sekvence $a^n u(n)$ koja u nuli ima vrijednost 1.

□

5.5.9 Krajnja vrijednost kauzalnog signala

Za kauzalan signal $x(n)$ koji ima \mathcal{Z} -transformaciju $X(z)$ čija oblast konvergencije obuhvata jediničnu kružnicu, vrijedi da je:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z). \quad (5.68)$$

Ova osobina \mathcal{Z} -transformacije nam omogućava da, bez traženja inverzne \mathcal{Z} -transformacije, odredimo čemu će biti jednaka vrijednost kauzalnog signala $x(n)$ u beskonačnosti, ako poznamo njegovu \mathcal{Z} -transformaciju $X(z)$.

Dokaz:

Bilateralna \mathcal{Z} -transformacija $X(z)$ kauzalne sekvence $x(n)$ jednaka je njenoj unilateralnoj transformaciji. Posmatrajmo razliku unilateralnih \mathcal{Z} -transformacija sekvenci $x(n+1)$ i $x(n)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x(n+1)\} - \mathcal{Z}\{x(n)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} [x(n+1) - x(n)] z^{-n} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N [x(n+1) - x(n)] z^{-n}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Budući da je:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x(n+1)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n+1) z^{-n} \Big|_{n+1 \rightarrow n} = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) z^{-n+1} = \\ &= z \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} - zx(0) = zX(z) - zx(0), \end{aligned} \quad (5.70)$$

na osnovu (5.69) i (5.70) možemo pisati:

$$zX(z) - zx(0) - X(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N [x(n+1) - x(n)] z^{-n}, \quad (5.71)$$

$$(z-1)X(z) - zx(0) = x(\infty) - x(0), \quad (5.72)$$

jer se svi ostali članovi sume osim $x(0)$ i $x(\infty)$ međusobno ponište. Pod pretpostavkom da oblast konvergencije $X(z)$ obuhvata jediničnu kružnicu, posmatranjem (5.71) na jediničnoj kružnici u z -ravni dobijamo:

$$\lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z) - zx(0)] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) - x(0) = x(\infty) - x(0), \quad (5.73)$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = x(\infty). \quad (5.74)$$

□

Ako oblast konvergencije z -transformacije kauzalne sekvence ne obuhvata jediničnu kružnicu, $X(z)$ ima polove čiji je modul veći ili jednak jedinici, pa signal $x(n)$ beskonačno raste sa porastom vremena ili ima konstantnu vrijedost. Na primjer, z -transformacija $X(z) = z/(z-a)$, $|z| > |a|$ ima pol $z = a$. Signal u vremenskom domenu je oblika $x(n) = a^n u(n)$. Za $|a| > 1$, kada $n \rightarrow \infty$ vrijednost signala postaje beskonačno velika, a za $|a| = 1$, kada se pol nalazi na jediničnoj kružnici, signal ima konstantnu vrijedost u beskonačnosti.

5.5.10 Konvolucija u vremenskom domenu

Ako postoje transformacioni parovi $x_1(n) \leftrightarrow X_1(z)$, $R_1^- < |z| < R_1^+$ i $x_2(n) \leftrightarrow X_2(z)$, $R_2^- < |z| < R_2^+$, tada konvoluciji signala u domenu diskretnog vremena odgovara množenje u z -domenu:

$$\begin{aligned} x_1(n) * x_2(n) &\leftrightarrow X_1(z) \cdot X_2(z) \\ R^- < |z| < R^+, \quad R^- &= \max(R_1^-, R_2^-), \quad R^+ = \min(R_1^+, R_2^+). \end{aligned} \quad (5.75)$$

Dokaz:

Na osnovu definicionog izraza (5.1) z -transformacija konvolucije diskretnih signala je jednaka:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{x_1(n) * x_2(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_1(n) * x_2(n)] z^{-n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k) x_1(n-k) \right] z^{-n}.\end{aligned}\tag{5.76}$$

Nakon zamjene redoslijeda sumiranja dobijamo:

$$\mathcal{Z}\{x_1(n) * x_2(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n-k) z^{-n} \right].\tag{5.77}$$

Smjenom varijabli $m = n - k$, (5.77) postaje jednako:

$$\mathcal{Z}\{x_1(n) * x_2(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k) z^{-k} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) z^{-m} \right].\tag{5.78}$$

Suma u zagradi u (5.78) se ponaša kao konstanta za vanjsku sumu, te možemo pisati da je:

$$\mathcal{Z}\{x_1(n) * x_2(n)\} = \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) z^{-m} \right] \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k) z^{-k} \right],\tag{5.79}$$

te konačno dobijamo:

$$\mathcal{Z}\{x_1(n) * x_2(n)\} = X_1(z) \cdot X_2(z).\tag{5.80}$$

Budući da je za konvergenciju (5.79) potrebna konvergencija i $X_1(z)$ i $X_2(z)$, \mathcal{Z} -transformacija konvolucije dva signala konvergira u onom dijelu z -ravni gdje konvergiraju \mathcal{Z} -transformacije pojedinačnih signala.

□

5.5.11 Proizvod u vremenskom domenu

Ako postoje transformacioni parovi $x_1(n) \leftrightarrow X_1(z)$, $R_1^- < |z| < R_1^+$ i $x_2(n) \leftrightarrow X_2(z)$, $R_2^- < |z| < R_2^+$, tada množenju signala u domenu diskretnog vremena odgovara konvolucija u z -domenu:

$$x_1(n) \cdot x_2(n) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} X_1\left(\frac{z}{v}\right) X_2(v) v^{-1} dv \quad (5.81)$$

$$R^- < |z| < R^+, \quad R^- = \max(R_1^-, R_2^-), \quad R^+ = \min(R_1^+, R_2^+).$$

Dokaz:

Ako jedan od signala, recimo $x_2(n)$, izrazimo preko njegove inverzne z -transformacije date sa (5.18), z -transformacija proizvoda dva diskretna signala je jednaka:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x_1(n) \cdot x_2(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_1(n) \cdot x_2(n)] z^{-n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} X_2(v) v^{n-1} dv \right] z^{-n}, \end{aligned} \quad (5.82)$$

gdje je C_1 zatvorena kontura u kompleksnoj v -ravni, u preklapljenoj oblasti konvergencija $X_1\left(\frac{z}{v}\right)$ i $X_2(v)$. Zamjenom redosljeda sumiranja i integracije dobijamo:

$$\mathcal{Z}\{x_1(n) \cdot x_2(n)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) \left(\frac{z}{v}\right)^{-n} \right] X_2(v) v^{-1} dv, \quad (5.83)$$

$$\mathcal{Z}\{x_1(n) \cdot x_2(n)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} X_1\left(\frac{z}{v}\right) X_2(v) v^{-1} dv. \quad (5.84)$$

Za konvergenciju (5.83) potrebno je da bude $R_1^- < \left|\frac{z}{v}\right| < R_1^+$ i $R_2^- < |v| < R_2^+$.

Ako se umjesto $x_2(n)$ preko inverzne z -transformacije izrazi $x_1(n)$, za z -transformaciju proizvoda dvije sekvence se dobija alternativni oblik:

$$\mathcal{Z}\{x_1(n) \cdot x_2(n)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_2} X_1(v) X_2\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv, \quad (5.85)$$

pri čemu je gdje je C_2 zatvorena kontura u kompleksnoj v -ravni, u preklapljenjnoj oblasti konvergencija $X_1(v)$ i $X_2\left(\frac{z}{v}\right)$.

□

Zbirni pregled osobina z-transformacije dat je u Tabeli 5.1.

Tabela 5.1. Osobine z-transformacije.

Osobina	$x(n)$	$X(z)$
Linearnost	$ax_1(n) + bx_2(n)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
Pomak u vremenskom domenu kod bilateralne transformacije	$x(n-m)$	$z^{-m}X(z)$
Pomak u vremenskom domenu kod unilateralne transformacije	$x(n-m)$	$x(-m)z^0 + x(-m+1)z^{-1} + \dots + x(-1)z^{-m+1} + z^{-m}X(z)$
Skaliranje u vremenskom domenu	$x(an)$	$X\left(\frac{1}{z^a}\right)$
Skaliranje u z-domenu	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$
Deriviranje u z-domenu	$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$
Transformacija kompleksno konjugovanog signala	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$

Tabela 5.1. Osobine z -transformacije (nastavak).

Osobina	$x(n)$	$X(z)$
Konvolucija u vremenskom domenu	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z) \cdot X_2(z)$
Proizvod u vremenskom domenu	$x_1(n) \cdot x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_{c_1} X_1\left(\frac{z}{v}\right) X_2(v) v^{-1} dv$ $\frac{1}{2\pi j} \oint_{c_2} X_1(v) X_2\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv$
Početna vrijednost kauzalnog signala	$x(0) = \lim_{ z \rightarrow \infty} X(z)$	
Krajnja vrijednost kauzalnog signala	$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$	

5.6 Metodi određivanja inverzne z - transformacije

Zbog složenosti izračunavanja konturnih integrala, inverzna z -transformacija se vrlo rijetko računa na osnovu definicionog izraza (5.18). Umjesto toga, koriste se jednostavniji načini za određivanje vremenskog oblika signala ako je poznata njegova z -transformacija. Prvi metod se zasniva na korišćenju Košijeve teoreme ostataka za izračunavanje konturnog integrala. Međutim, ako se radi o jednostavnim oblicima funkcija, problem se može riješiti poznavajući z -transformacije elementarnih signala i pravila koja proističu iz osobina z -transformacije. Taj metod se u literaturi naziva tablični metod. Osim ovih, u ovom poglavlju ćemo izložiti još dva metoda za određivanje inverzne z -transformacije. Ako se složena funkcija može jednostavno razviti na parcijalne razlomke, koristeći tablični metod odrede se inverzne z -transformacije pojedinačnih sabiraka, a zatim, koristeći pravilo linearnosti, tražena inverzna z -transformacija kao njihov zbir. U slučajevima kada nije neophodno dobiti analitički izraz za signal u vremenskom domenu, već nas zanimaju samo vrijednosti nekih njegovih elemenata, vidjećemo da je za traženje inverzne z -transformacije pogodno koristiti razvoj u stepeni red.

5.6.1 Određivanje inverzne z -transformacije pomoću Košijeve teoreme ostataka

Sa stanovišta kompleksne analize, elementi sekvence $x(n)$ predstavljaju koeficijente Lorantovog reda u tački $z=0$ u koji je razvijena funkcija $X(z)$. Primjenom Košijeve teoreme odredili smo te koeficijente:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (5.86)$$

i na taj način dobili izraz za inverznu z -transformaciju. U (5.86) zatvorena kontura C leži u oblasti konvergencije, obuhvata koordinatni početak i orijentisana je suprotno kretanju kazaljke na satu.

Ako se podintegralna funkcija $X(z)z^{n-1}$ u izrazu (5.86) napiše u obliku:

$$X(z)z^{n-1} = \frac{N(z)}{D(z)}, \quad (5.87)$$

primjenom Košijeve teoreme dobija se da je

$$x(n) = \text{Res} \left[X(z) z^{n-1} \right] \quad (5.88)$$

u polovima koji se nalaze unutar konture C , ili

$$x(n) = -\text{Res} \left[X(z) z^{n-1} \right] \quad (5.89)$$

u polovima koji se nalaze van konture C .

Polovi podintegralne funkcije $X(z)z^{n-1}$ mogu biti jednostruki i višestruki. U slučaju jednostrukih polova ostatak u polu z_i se određuje sa:

$$\text{Res} \left[X(z) z^{n-1} \right] = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) X(z) z^{n-1}, \quad (5.90)$$

dok je u slučaju višestrukih polova ostatak u polu z_i reda m jednak:

$$\text{Res} \left[X(z) z^{n-1} \right] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m X(z) z^{n-1} \right]. \quad (5.91)$$

Posmatranjem podintegralne funkcije $X(z)z^{n-1}$ u izrazu (5.86) zaključujemo da ona za različite vrijednosti n može da ima višestruki pol u $z=0$ ili $z=\infty$. Kako je izračunavanje ostataka u višestrukim polovima složeno, posebno kad je multiplicitet pola promjenljiv, preporučuje se izbjegavanje računanja sume ostataka u višestrukim polovima u nuli ili beskonačnosti. Budući da se višestruki polovi u $z=0$ i $z=\infty$ ne pojavljuju istovremeno, to je moguće postići ako se inverzna z -transformacija računa na sljedeći način:

$$x(n) = \begin{cases} \text{Res}[X(z)z^{n-1}] & \begin{array}{l} \text{u polovima unutar konture } C \\ \text{za one vrijednosti } n \text{ za koje } X(z)z^{n-1} \\ \text{nema višestruki pol u } z=0 \end{array} \\ -\text{Res}[X(z)z^{n-1}] & \begin{array}{l} \text{u polovima unutar van konture } C \\ \text{za one vrijednosti } n \text{ za koje } X(z)z^{n-1} \\ \text{nema višestruki pol u } z=\infty \end{array} \end{cases} \quad (5.92)$$

Primjer 5.7:

Odrediti inverznu z -transformaciju od $X(z) = \frac{5z}{(2-z)(3z-1)}$, ako je oblast konvergencije $\frac{1}{3} < |z| < 2$.

Rješenje:

Kada je oblast konvergencije prsten u z -ravni, inverznom z -transformacijom trebamo dobiti sekvencu koja će imati elemente i za pozitivne i za negativne vrijednosti diskretnog vremena n . Funkcija

$$X(z)z^{n-1} = \frac{5z^n}{(2-z)(3z-1)} \quad (5.93)$$

za svaku vrijednost n ima konačne polove $z_1 = \frac{1}{3}$ i $z_2 = 2$. Za $n > 0$ javlja se i višestruki pol u $z=0$ reda n , dok se za $n < 0$ javlja višestruki pol u $z=\infty$,

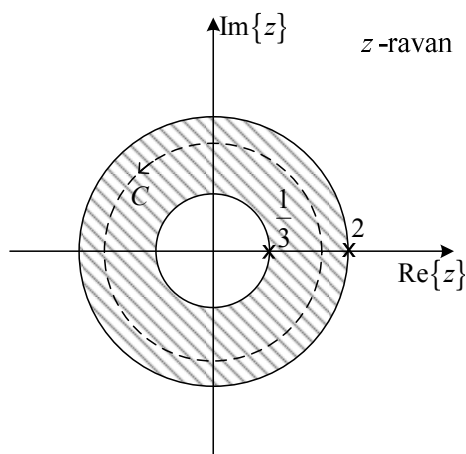
takođe reda n . Stoga je pogodno za $n > 0$ koristiti sumu ostataka u polovima unutar konture koji ne uključuju višestruki pol u $z = \infty$, a za $n < 0$ sumu ostataka u polovima van konture koji ne uključuju višestruki pol u $z = 0$. Za $n = 0$ oba izraza su ravnopravna. Oblast konvergencije zadate z-transformacije i raspored njenih konačnih polova prikazani su na Slici 5.8.

Za $n \geq 0$, unutar konture C , koja se nalazi u oblasti konvergencije, nalazi se samo pol $z_1 = \frac{1}{3}$, te dobijamo:

$$x(n) = \text{Res}\left[X(z)z^{n-1}\right] = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{3}} \left(z - \frac{1}{3}\right) \frac{5z \cdot z^{n-1}}{(2-z)(3z-1)} = \left(\frac{1}{3}\right)^n. \quad (5.94)$$

Za $n < 0$, van konture C se nalazi samo pol $z_2 = 2$, te je:

$$x(n) = -\text{Res}\left[X(z)z^{n-1}\right] = \lim_{z \rightarrow 2} (z - 2) \frac{5z \cdot z^{n-1}}{(2-z)(3z-1)} = 2^n. \quad (5.95)$$



Slika 5.8 Oblast konvergencije i raspored konačnih polova zadate z-transformacije $X(z)$.

Konačan izraz za inverznu z -transformaciju je:

$$x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \geq 0 \\ 2^n, & n < 0 \end{cases} \quad (5.96)$$

□

5.6.2 Tablični metod određivanja inverzne z -transformacije

Tablični metod se zasniva na korišćenju tabela u kojima su date z -transformacije elementarnih signala i pravila z -transformacije. Neke od najčešće korišćenih transformacija su date u Tabeli 5.2. Za nešto složenije funkcije pogodno je koristiti razvoj na parcijalne razlomke, tako što se složena funkcija predstavi kao zbir jednostavnijih. Te jednostavne funkcije su najčešće nastale nekom transformacijom elementarnih signala. Kada se odredi o kom elementarnom signalu i kojoj transformaciji se radi, koristeći tablični metod i pravila z -transformacije, odrede se inverzne z -transformacije pojedinačnih članova zbira. Zatim se superpozicijom dobije tražena inverzna z -transformacija, odnosno signal u domenu diskretnog vremena.

Tabela 5.2. z -transformacije važnijih signala.

Sekvenca	z -transformacija	Oblast konvergencije
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$\delta(n-m), m > 0$	z^{-m}	$\forall z \neq 0$
$\delta(n+m), m > 0$	z^m	$\forall z \neq \infty$
$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$-u(-n-1)$	$\frac{z}{z-1}$	$ z < 1$

Tabela 5.2. z-transformacije važnijih signala (nastavak).

Sekvenca	z-transformacija	Oblast konvergencije
$nu(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a $
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{z}{z-a}$	$ z < a $
$na^n u(n)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z > a $
$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z < a $
$\cos \omega_0 n \cdot u(n)$	$\frac{z^2 - z \cos \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$
$\sin \omega_0 n \cdot u(n)$	$\frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$
$a^n \cos \omega_0 n \cdot u(n)$	$\frac{z^2 - za \cos \omega_0}{z^2 - 2za \cos \omega_0 + a^2}$	$ z > a $
$a^n \sin \omega_0 n \cdot u(n)$	$\frac{za \sin \omega_0}{z^2 - 2za \cos \omega_0 + a^2}$	$ z > a $
$x(n) = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$	$\frac{z^{-N}(z^N - a^N)}{z-a}$	$ z > 0$

5.6.3 Određivanje inverzne z -transformacije razvojem u parcijalne razlomke

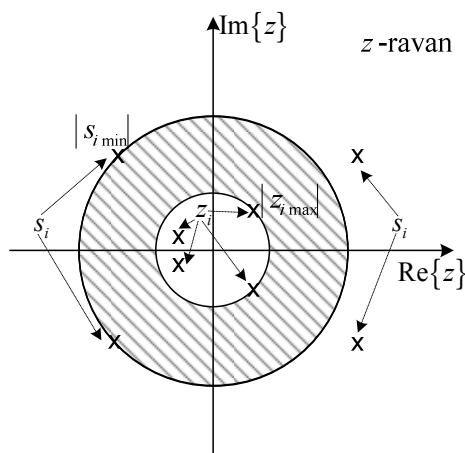
Neka je z -transformacija $X(z)$, sa oblašću konvergencije $|z_{i\max}| < |z| < |s_{i\min}|$ prikazanoj na Slici 5.9, racionalna funkcija:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}, \quad (5.97)$$

gdje je $N(z)$ polinom po z reda M , a $D(z)$ polinom po z reda N . Sa z_i smo označili polove $X(z)$ takve da je $|z_i| < |z_{i\max}|$, a sa s_i polove $X(z)$ takve da je $|s_i| > |s_{i\min}|$. Razvojem funkcije $X(z)$ na parcijalne razlomke dobijamo:

$$X(z) = \sum_{i=0}^{M-N} c_i z^{-i} + \sum_{i=1}^{Nz} \frac{A_i z}{z - z_i} + \sum_{i=1}^{Ns} \frac{B_i z}{z - s_i} + \sum_{i=1}^{Nmz} \sum_{k=0}^{mz_i-1} \frac{C_i z}{(z - z_i)^{k+1}} + \sum_{i=1}^{Nms} \sum_{k=0}^{ms_i-1} \frac{D_i z}{(z - s_i)^{k+1}}. \quad (5.98)$$

Sa Nz je označen broj jednostrukih, a sa Nms broj višestrukih polova z_i , dok je sa Ns označen broj jednostrukih, a sa Nms broj višestrukih polova s_i reda mz_i i ms_i , respektino.



Slika 5.9 Oblast konvergencije i konačni polovi funkcije $X(z)$.

Ako je stepen polinoma u brojniku veći ili jednak stepenu polinoma u nazivniku, koeficijenti c_i se dobiju dijeljenjem polinoma $N(z)$ sa polinomom $D(z)$, inače za $N > M$ prvu sumu u (5.98) treba izostaviti prilikom računanja inverzne z-transformacije.

Kako bismo odredili inverzne z-transformacije članova u razvoju (5.98), razmotrimo šta se dešava prilikom diferenciranja z-transformacije kompleksnih eksponencijalnih signala. Od ranije znamo da egzistiraju transformacioni parovi:

$$z_i^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z - z_i}, \quad |z| > |z_i|, \quad (5.99)$$

$$s_i^n u(-n-1) \leftrightarrow -\frac{z}{z - s_i}, \quad |z| < |s_i|. \quad (5.100)$$

Za prvi izvod z-transformacije sekvence $z_i^n u(n)$ po z_i :

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \left[\sum_{n=0}^{\infty} z_i^n z^{-n} \right] = \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{z}{z - z_i} \quad (5.101)$$

dobijamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z_i^{n-1} z^{-n} = \frac{z}{(z - z_i)^2}. \quad (5.102)$$

Iz (5.102) zaključujemo da postoji transformacioni par:

$$n z_i^{n-1} u(n) \leftrightarrow \frac{z}{(z - z_i)^2}, \quad |z| > |z_i|. \quad (5.103)$$

Drugi izvod po z_i je jednak:

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} z_i^n z^{-n} \right] = \frac{\partial}{\partial z_i} \left[\sum_{n=0}^{\infty} n z_i^{n-1} z^{-n} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z_i^{n-2} z^{-n} = \frac{2z}{(z - z_i)^3}, \quad (5.104)$$

što znači da je:

$$n(n-1)z_i^{n-2}u(n) \leftrightarrow \frac{2z}{(z-z_i)^3}, |z| > |z_i|. \quad (5.105)$$

Ako postupak nastavimo, za k -ti izvod \mathcal{Z} -transformacije sekvence $z_i^n u(n)$ po z_i dobijamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)z_i^{n-k}z^{-n} = \frac{k!z}{(z-z_i)^{k+1}}, \quad (5.106)$$

odnosno:

$$\binom{n}{k} z_i^{n-k} u(n) \leftrightarrow \frac{z}{(z-z_i)^{k+1}}, |z| > |z_i|. \quad (5.107)$$

Na sličan način, na osnovu k -tog izvoda \mathcal{Z} -transformacije sekvence $s_i^n u(n)$ po s_i dobijamo transformacioni par:

$$\binom{n}{k} s_i^{n-k} u(-n-1) \leftrightarrow -\frac{z}{(z-s_i)^{k+1}}, |z| < |s_i|. \quad (5.108)$$

Relacije (5.107) i (5.108) nam sada mogu poslužiti da odredimo inverznu \mathcal{Z} -transformaciju članova treće i četvrte sume u razvoju (5.98), dok inverznu \mathcal{Z} -transformaciju članova druge i treće sume u tom razvoju određujemo na osnovu (5.99) i (5.100). Inverznu \mathcal{Z} -transformaciju članova prve sume lako odredimo koristeći pravilo pomaka i činjenicu da je $\delta(n) \leftrightarrow 1$. Tako konačno dobijamo:

$$\begin{aligned} x(n) = & \sum_{i=0}^{M-N} c_i \delta(n-i) + \left[\sum_{i=1}^{Nz} A_i z_i^n \right] u(n) - \left[\sum_{i=1}^{Ns} B_i s_i^n \right] u(-n-1) + \\ & + \left[\sum_{i=1}^{Nmz} \sum_{k=0}^{mz_i-1} C_i \binom{n}{k} z_i^{n-k} \right] u(n) - \left[\sum_{i=1}^{Nms} \sum_{k=0}^{ms_i-1} D_i \binom{n}{k} s_i^{n-k} \right] u(-n-1). \end{aligned} \quad (5.109)$$

Primijetimo da polovi z_i za koje vrijedi da je $|z_i| < |z_{i\max}|$ generišu kauzalni, a polovi s_i za koje je $|s_i| > |s_{i\min}|$, antikauzalni dio sekvence u vremenu.

Primjer 5.8:

Odrediti inverznu z -transformaciju od $X(z) = \frac{-35z^2 + 265z + 18}{12(5z-1)(z-6)}$, ako je oblast konvergencije:

- a) $|z| > 6$;
- b) $|z| < \frac{1}{5}$;
- c) $\frac{1}{5} < |z| < 6$.

Rješenje:

Članovi razvoja funkcije $X(z)$ u parcijalne razlomke:

$$X(z) = \frac{1}{4} - \frac{z}{z - \frac{1}{5}} + \frac{1}{6} \frac{z}{z - 6} \quad (5.110)$$

su tablične z -transformacije. Njihovim poređenjem sa transformacionim parovima datim u tablicama i korišćenjem superpozicije na najjednostavniji način dobijamo inverznu z -transformaciju.

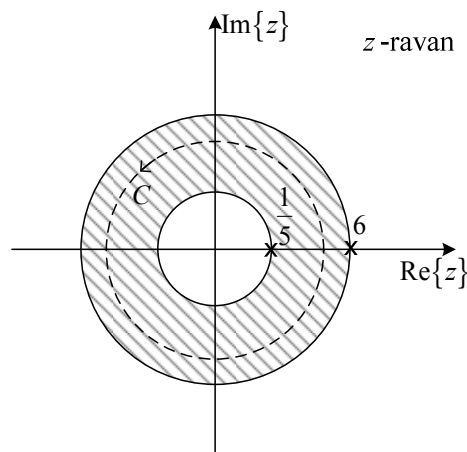
- a) Ako je oblast konvergencije spoljašnjost kruga određena sa $|z| > 6$, iz tablica biramo kauzalne sekvence kao inverzne z -transformacije članova u razvoju (5.110):

$$x(n) = \frac{1}{4} \delta(n) - \left(\frac{1}{5}\right)^n u(n) + \frac{1}{6} 6^n u(n). \quad (5.111)$$

- b) Kada je oblast konvergencije unutrašnjost kruga određena sa $|z| < \frac{1}{5}$ sekvence u vremenu koje odgovaraju članovima u (5.110) su antikauzalne, a određujemo ih takođe na osnovu tablica:

$$x(n) = \frac{1}{4} \delta(n) + \left(\frac{1}{5}\right)^n u(-n-1) - \frac{1}{6} 6^n u(-n-1). \quad (5.112)$$

- c) Konačno, ako tražimo inverznu z -transformaciju pri čemu je oblast konvergencije $X(z)$ prsten, trebamo dobiti sekvencu u vremenu koja ima elemente i za pozitivne i za negativne vrijednosti diskretnog vremena n . Datu oblast konvergencije $\frac{1}{5} < |z| < 6$ možemo posmatrati kao da je nastala preklapanjem dvije oblasti konvergencije: $\frac{1}{5} < |z|$ i $|z| < 6$. Prva oblast je unutrašnjost kruga čiji je poluprečnik određen polom $z = \frac{1}{5}$ funkcije $X(z)$, te će član $\frac{z}{z - \frac{1}{5}}$ u razvoju funkcije $X(z)$ generisati antikauzalni dio sekvence u vremenu. Druga oblast, koja je određena polom $z = 6$, je spoljašnjost kruga, te član $\frac{z}{z - 6}$ u razvoju funkcije $X(z)$ treba posmatrati kao z -transformaciju kauzalne sekvence.



Slika 5.10 Oblast konvergencije $\frac{1}{5} < |z| < 6$ i raspored konačnih polova funkcije $X(z)$.

Vodeći se ovim principima, za inverznu z-transformaciju dobijamo:

$$x(n) = \frac{1}{4} \delta(n) - \left(\frac{1}{5}\right)^n u(n) - \frac{1}{6} 6^n u(-n-1). \quad (5.113)$$

□

5.6.4 Određivanje inverzne z-transformacije razvojem u stepeni red

Osnovna ideja ovog metoda je da se z-transformacija $X(z)$ može razviti u stepeni red po z^{-1} :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n}, \quad (5.114)$$

koji konvergira u oblasti konvergencije $X(z)$. Budući da je z-transformacija jedinstvena ukoliko se posmatra zajedno sa njenom oblašću konvergencije, elementi sekvence u vremenskom domenu su jedinstveno određeni sa:

$$x(n) = c_n, \quad \forall n. \quad (5.115)$$

Ovaj metod je pogodan ako je razvoj u stepeni red jednostavno izvesti. U slučajevima kada je $X(z)$ racionalna funkcija, dijeljenjem polinoma u brojniku i nazivniku se odredi nekoliko prvih članova stepenog reda, pa se onda generalizacijom izvodi funkcionalni oblik za $x(n)$.

U nekim primjenama nije neophodno odrediti funkcionalni oblik signala u vremenu, već je dovoljno odrediti samo nekoliko početnih elemenata originalnog signala. Na osnovu poznate oblasti konvergencije funkcija $X(z)$ se razdvoji na dva dijela: prvi sa oblašću konvergencije koja je spoljašnjost kruga i koji generiše kauzalni i drugi, sa oblašću konvergencije koja je unutrašnjost kruga i koji generiše antikauzalni dio sekvence u vremenu. Kako bismo dobili elemente kauzalne sekvence, dijelimo polinom u brojniku sa polinomom u

nazivniku počevši od njegovog najvišeg stepena. Na primjeru jednostavne z -transformacije $X(z) = \frac{a}{a-z}$, $|z| > |a|$, to znači sljedeće:

$$X(z) = \frac{a}{-z+a} = a : (-z+a) = -az^{-1} - a^2z^{-2} - a^3z^{-3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)z^{-n}. \quad (5.116)$$

Ovakvim načinom dijeljenja dobijamo red sa negativnim stepenima, te jednostavnim poređenjem slijedi da je:

$$x(1) = -a, \quad x(2) = -a^2, \quad x(3) = -a^3, \quad \dots \quad (5.117)$$

Dio z -transformacije koji određuje oblast konvergencije u vidu unutrašnjosti kruga, npr. $X(z) = \frac{a}{a-z}$, $|z| < |a|$, generisaće antikauzalnu sekvencu ako se polinom u brojniku dijeli sa polinomom u nazivniku počevši od najnižeg stepena, tako da se dobije stepeni red sa pozitivnim stepenima:

$$X(z) = \frac{a}{a-z} = a : (a-z) = 1 + a^{-1}z + a^{-2}z^2 + a^{-3}z^3 - \dots = \sum_{n=-\infty}^0 x(n)z^{-n}, \quad (5.118)$$

odakle poređenjem dobijamo elemente signala $x(n)$:

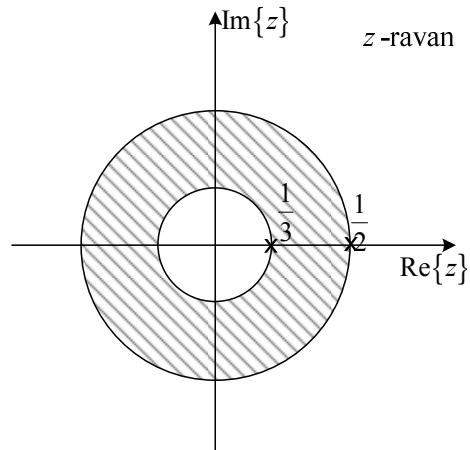
$$x(0) = 1, \quad x(-1) = a^{-1}, \quad x(-2) = a^{-2}, \quad x(-3) = a^{-3}, \quad \dots \quad (5.119)$$

Primjer 5.9:

Razvojem u stepeni red, odrediti inverznu z -transformaciju od $X(z) = \frac{5z}{1+z-6z^2}$, ako je oblast konvergencije $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$.

Rješenje:

Oblast konvergencije u obliku prstena, prikazana na Slici 5.11, nam ukazuje na to da će signal $x(n)$ imati elemente i za $n > 0$ i za $n < 0$.



Slika 5.11 Oblast konvergencije i raspored konačnih polova zadate z -transformacije $X(z)$.

Oblast konvergencije je ograničena sa dva pola funkcije $X(z)$: $z_1 = \frac{1}{3}$ i $z_2 = \frac{1}{2}$. Ako razdvojimo funkciju $X(z)$ na dvije:

$$X(z) = \frac{5z}{1+z-6z^2} = -\frac{1}{1+3z} + \frac{1}{1-2z} = X_1(z) + X_2(z), \quad (5.120)$$

tako da

$$X_1(z) = -\frac{1}{1+3z} \quad (5.121)$$

konvergira za $|z| > \frac{1}{3}$, a

$$X_2(z) = \frac{1}{1-2z} \quad (5.122)$$

za $|z| < \frac{1}{2}$, $X(z)$ će konvergirati za $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$.

Oblast konvergencije $X_1(z)$ je spoljašnjost kruga, pa dijeljenje radimo počevši od najvišeg stepena kako bismo generisali stepeni red sa negativnim eksponentima:

$$X_1(z) = -\frac{1}{1+3z} = -1:(3z+1) = -\frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{9}z^{-2} - \frac{1}{27}z^{-3} + \dots + \frac{(-1)^n}{3^n}z^{-n} + \dots, \quad (5.123)$$

odakle se dobija kauzalni dio sekvence:

$$x(n) = \frac{(-1)^n}{3^n}, \quad n > 0. \quad (5.124)$$

Kod $X_2(z)$ oblast konvergencije je unutrašnjost kruga. Dijeljenje radimo počevši od najnižeg stepena, tako da dobijamo stepeni red sa pozitivnim eksponentima:

$$X_1(z) = \frac{1}{1-2z} = 1:(1-2z) = 1 + 2z + 4z^2 + \dots + 2^n z^{-n} + \dots, \quad (5.125)$$

i antikauzalni dio sekvence:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \leq 0. \quad (5.126)$$

Konačno možemo pisati da je:

$$x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \leq 0 \\ \frac{(-1)^n}{3^n}, & n > 0 \end{cases} \quad (5.127)$$

5.7 Primjena z - transformacije u analizi sistema i obradi signala

Linearni, vremenski invarijantni (LTI) sistemi se opisuju jednačinama diferencijala u obliku:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k), \quad a_0 = 1, \quad (5.128)$$

gdje su $a_i, i=0,1,\dots,N$ i $b_j, j=1,2,\dots,M$ realne konstante koje zavise od elemenata sistema i njihovih međusobnih veza, $x(n)$ pobudni signal, a $y(n)$ odziv sistema. U razvijenom obliku ova jednačina diferencijala ima oblik:

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_N y(n-N) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M). \quad (5.129)$$

U Glavi 4 smo naučili da odziv LTI sistema možemo odrediti konvolucijom ulaznog signala i impulsnog odziva $h(n)$, ukoliko je on poznat i ukoliko je zetečena energija u sistemu jednaka nuli:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n). \quad (5.130)$$

ili rješavanjem jednačine diferencijala (5.128) u domenu diskretnog vremena.

5.7.1 Određivanje odziva množenjem u z -domenu

U Glavi 4 smo definisali funkciju prenosa sistema diskretnog LTI sistema:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) z^{-k}. \quad (5.131)$$

Do ove definicije smo došli pobuđujući LTI sistem kompleksnim eksponencijalnim signalom

$$x(n) = z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (5.132)$$

tako da smo dobili odziv istog oblika kao pobuda, ali u zavisnosti od funkcije prenosa:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{n-k} = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k} \right] z^n, \quad (5.133)$$

Poredeći (5.133) sa definicionim izrazom za \mathcal{Z} -transformaciju, vidimo da je funkcija prenosa $H(z)$ jednaka \mathcal{Z} -transformaciji impulsnog odziva:

$$h(n) \leftrightarrow H(z). \quad (5.134)$$

Na osnovu osobine konvolucije u vremenskom domenu:

$$h(n) * x(n) \leftrightarrow H(z)X(z), \quad (5.135)$$

koja podjednako vrijedi kako za unilateralnu, tako i za bilateralnu \mathcal{Z} -transformaciju, odziv $y(n)$ na proizvoljnu pobudu $x(n)$ čija je \mathcal{Z} -transformacija $X(z)$, uz poznatu funkciju prenosa $H(z)$, možemo odrediti sa:

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (5.136)$$

$$y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)X(z)\}. \quad (5.137)$$

Ovaj metod daje odziv na proizvoljnu pobudu pri nultim početnim uslovima.

Bilateralnu \mathcal{Z} -transformaciju nije pogodno koristiti za traženje odziva jer ona podrazumijeva poznavanje signala od $-\infty$ do ∞ , dok je u praksi pobuda poznata od trenutka poznavanja sistema, tj. za $t \geq 0$. Početni uslovi se takođe vezuju za trenutak početka posmatranja sistema. Zbog toga se odziv određuje primjenom unilateralne \mathcal{Z} -transformacije, pri čemu se podrazumijeva kauzalnost sistema.

Odziv kauzalnog LTI sistema je dat sa:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k). \quad (5.138)$$

na kauzalnu pobudu u vidu kompleksne eksponencijalne sekvence

$$x(n) = z^n u(n), \quad (5.139)$$

je jednak:

$$y(n) = \sum_{k=0}^n h(k)z^{n-k} = \left[\sum_{k=0}^n h(k)z^{-k} \right] z^n. \quad (5.140)$$

Izraz u uglastim zagradama u (5.140) je funkcija vremena jer je gornja granica sume jednaka n . Zbog toga odziv nije neminovno istog oblika kao pobuda, za razliku od pobude nekauzalnom sopstvenom funkcijom sistema z^n (vidi Poglavlje 4.6.1). Međutim, za sisteme kod kojih je impulsni odziv takav da se proizvod $h(k)z^{-k}$ u sumi (5.140) smanjuje pri porastu vremenske varijable k , članovi $h(k)z^{-k}$ će nakon dovoljno dugo vremena postati zanemarivo mali, te se može smatrati da suma nakon dovoljno dugo vremena dostiže svoju konačnu vrijednost koja ne zavisi od gornje granice sumiranja n . Zbog toga za velike vrijednosti n vrijedi:

$$\sum_{k=0}^n h(k)z^{n-k} \approx \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{n-k}, \quad (5.141)$$

što znači da odziv nakon dovoljno dugo vremena poprima isti oblik kao pobuda i kažemo da je nastupilo ustaljeno stanje:

$$y(n) \approx \left[\sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} \right] z^n = H(z)z^n. \quad (5.142)$$

Interval vremena prije nastupanja ustaljenog stanja se naziva prelazni proces.

Na osnovu analize provedene u domenu diskretnog vremena, znamo da je odziv jednak zbiru sopstvenog i prinudnog odziva. Nakon dovoljno dugo vremena sopstveni odziv iščezava i odziv postaje jednak prinudnoj komponenti. Pri kauzalnoj kompleksnoj eksponencijalnoj pobudi taj odziv u ustaljenom stanju je jednak:

$$y(n) \approx y_p(n) = H(z)z^n. \quad (5.143)$$

Stoga se funkcija prenosa može definisati i kao količnik prinudnog odziva na kompleksnu eksponencijalnu pobudu i same te pobude:

$$H(z) = \frac{\text{prinudni odziv na } z^n}{z^n}. \quad (5.144)$$

5.7.2 Funkcija prenosa diskretnih sistema

Poznavajući pravilo z -transformacije o konvoluciji diskretnih signala:

$$y(n) = h(n) * x(n) \leftrightarrow Y(z) = H(z)X(z), \quad (5.145)$$

zaključujemo da je funkcija prenosa diskretnog sistema data kao količnik z -transformacije odziva i z -transformacije eksitacije:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (5.146)$$

Budući da je funkcija prenosa $H(z)$ racionalna funkcija, uobičajeno se koriste oznake $N(z)$ za polinom u brojniku i $D(z)$ za polinom u nazivniku, pa se funkcija prenosa zapisuje u obliku:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}. \quad (5.147)$$

Kod diskretnih sistema opisanih rekurzivnom jednačinom diferencija:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \quad (5.148)$$

impulsni odziv je u opštem slučaju beskonačnog trajanja. Funkcija prenosa je racionalna funkcija sa nulama z_k i polovima p_k konačnih vrijednosti, pa može da se zapiše u razvijenom ili faktorizovanom obliku, kao količnik dva polinoma po z^{-1} :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = K \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})} \quad (5.149)$$

ili po z :

$$H(z) = z^{N-M} \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{z^N + \sum_{k=1}^N a_k z^{N-k}} = K z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^M (z - z_k)}{\prod_{k=1}^N (z - p_k)}. \quad (5.150)$$

Ako je diskretni sistem opisan nerekurzivnom jednačinom diferencija:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k), \quad (5.151)$$

onda je impulsni odziv konačnog trajanja. Funkcija prenosa ima M konačnih nula i pol reda M u nuli:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = z^{-M} \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}. \quad (5.152)$$

Posebnu klasu IIR sistema čine takozvani “all-pole” sistemi koji nemaju konačnih nula transmisije ($b_k = 0, k \neq 0$) i čija funkcija prenosa ima oblik:

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = z^N \frac{b_0}{z^N + \sum_{k=1}^N a_k z^{N-k}}. \quad (5.153)$$

5.7.3 Stabilnost diskretnih sistema

U vremenskom domenu diskretni sistem je stabilan ako njegov impulsni odziv zadovoljava sljedeći uslov:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty. \quad (5.154)$$

Iz uslova stabilnosti datog u vremenskom domenu slijedi da funkcija prenosa konvergira na jediničnoj kružnici u z -ravi:

$$|H(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n) z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| |z^{-n}| \Big|_{|z|=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty. \quad (5.155)$$

Vrijedi i obrnuto. Prvo iz razmatranja izuzmimo FIR sisteme jer su oni uvijek stabilni. Ako se radi o kauzalnom FIR sistemu, njegova funkcija prenosa nema drugih polova osim pola M -tog reda u nuli:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}, \quad (5.156)$$

te impulsni odziv ovog sistema ima konačan broj elemenata:

$$h(n) = b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1) + \dots + b_M \delta(n-M). \quad (5.157)$$

Ako sistem nije kauzalan, opet je broj elemenata impulsnog odziva konačan, samo se pojavljuju elementi i za $n < 0$. Zbog konačnosti impulsnog odziva uvijek je zadovoljen uslov (5.154) te je FIR sistem uvijek stabilan.

Posmatrajmo sada kauzalan IIR diskretni sistem sa funkcijom prenosa:

$$H(z) = K \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}. \quad (5.158)$$

Pretpostavimo da je $M < N$, jer se za $M \geq N$ funkcija prenosa diskretnog sistema može predstaviti zbirom funkcije prenosa FIR sistema i funkcije prenosa IIR sistema kod koga je $M < N$. Razvojem na parcijalne razlomke, u slučaju da su svi polovi jednostruki, imamo:

$$H(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots + \frac{A_N}{1 - p_N z^{-1}}, \quad (5.159)$$

gdje je

$$A_k = \lim_{z \rightarrow p_k} (1 - p_k z^{-1}) H(z), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (5.160)$$

Odgovarajući impulsni odziv je jednak:

$$h(n) = [A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + \dots + A_N p_N^n] u(n). \quad (5.161)$$

Treba da pokažemo da iz uslova da oblast konvergencije obuhvata jediničnu kružnicu slijedi da je sistem stabilan. Budući da posmatramo kauzalan sistem, čija oblast konvergencije mora da bude spoljašnjost kruga, zaključujemo da se

svi polovi diskretnog sistema nalaze u unutrašnjosti jediničnog kruga u z -ravni i da vrijedi:

$$|p_k| < 1, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (5.162)$$

Ako su svi polovi funkcije prenosa po modulu manji od jedan, niti jedan od članova impulsnog odziva (5.161) ne može da poprimi beskonačnu vrijednost, nego im vrijednosti opadaju sa porastom vremena, te vrijedi da je $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$. Prema tome, zaključujemo da je kauzalan sistem čija oblast konvergencije obuhvata jediničnu kružnicu stabilan. Slično se može pokazati i u slučaju da funkcija prenosa ima višestruke polove.

Iako od manjeg značaja, slično razmatranje se može provesti i za antikauzalne sisteme. Tada se iz uslova da je oblast konvergencije unutrašnjost kruga koja obuhvata jediničnu kružnicu, dolazi do zaključka da svi polovi p_k moraju da imaju modul veći od jedinice. Ti polovi u impulsnom odzivu generišu članove funkcionalnog oblika p_k^n , koji onda teže nuli kada $n \rightarrow -\infty$.

Dakle, diskretni sistem je stabilan ako i samo ako oblast konvergencije funkcije prenosa obuhvata jediničnu kružnicu.

5.7.4 Određivanje odziva rješavanjem jednačina diferencija primjenom z-transformacije

Pretpostavimo da želimo da odredimo odziv LTI sistema koji je opisan jednačinom diferencija N -tog reda:

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_N y(n-N) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M), \quad (5.163)$$

pri čemu su poznati početni uslovi $y(-N), y(-N+1), \dots, y(-1)$. Takođe podrazumijevamo da poznamo pobudu u svakom trenutku. Uvešćemo dodatnu pretpostavku za ulazni signal i ograničiti se na pobude čije su z-transformacije racionalne funkcije. Ova pretpostavka nije mnogo restriktivna jer većina signala od praktičnog značaja ima racionalnu z-transformaciju.

Nakon primjene unilateralne z -transformacije na posmatranu jednačinu diferencijala, vodeći računa o pravilu pomaka:

$$z\{x(n-m)\} = x(-m)z^0 + x(-m+1)z^{-1} + \dots + x(-1)z^{-m+1} + z^{-m}X(z), \quad (5.164)$$

dobijamo:

$$Y(z)(1+a_1z^{-1}+\dots+a_Nz^{-N}) = X(z)(b_0+b_1z^{-1}+\dots+b_Mz^{-M}) + IC(z), \quad (5.165)$$

gdje su u $IC(z)$ grupisani svi članovi koji uključuju početne uslove.

Aki želimo samo da odredimo funkciju prenosa, svi početni uslovi postavljaju na nulu, jer bilo koja karakteristika sistema ne smije da zavisi od trenutno zatečenog stanja izraženog kroz početne uslove. Tako dobijamo funkciju prenosa

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Mz^{-M}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}} = \frac{N(z)}{D(z)}. \quad (5.166)$$

koja je količnik dva polinoma po z sa realnim koeficijentima, tzv. *realna racionalna funkcija*. Do zaključka da je funkcija prenosa LTI sistema racionalna funkcija smo došli i ranije, u (5.147). Ako polinom u nazivniku izjednačimo s nulom:

$$D(z) = 0, \quad (5.167)$$

rješenja ove jednačine su *polovi funkcije prenosa*. Istovremeno su to korijeni karakteristične jednačine sistema (4.62), te se polinom $D(z)$ naziva *karakteristični polinom*.

Međutim, ako nas zanima kompletan odziv koji zavisi od početnih uslova, potrebno je pronaći inverznu z -transformaciju izraza:

$$Y(z) = H(z)X(z) + \frac{1}{D(z)}IC(z), \quad (5.168)$$

koji se dobije iz (5.165) dijeljenjem sa $D(z)$. Prvi član $H(z)X(z)$ je z -transformacija odziva pri nultim početnim uslovima, dok je drugi član $\frac{1}{D(z)}IC(z)$ z -transformacija odziva na akumulisanu energiju.

Uz pretpostavku da je z-transformacija pobude realna racionalna funkcija:

$$X(z) = \frac{N_X(z)}{D_X(z)}, \quad (5.169)$$

tada su oba člana u (5.168) realne racionalne funkcije, te se odziv može odrediti inverznom z-transformacijom, koristeći metod razvoja na parcijalne razlomke opisan u Poglavlju 5.6.3:

$$y(n) = z^{-1} \{Y(z)\}. \quad (5.170)$$

Ovaj kompletan odziv se sastoji od odziva na eksitaciju i odziva na akumulisanu energiju:

$$y(n) = y_e(n) + y_a(n), \quad (5.171)$$

koji se lako razdvoje ako se odvojeno traže inverzne z-transformacije sabiraka u (5.168):

$$y_e(n) = z^{-1} \{H(z)X(z)\}, \quad (5.172)$$

$$y_a(n) = z^{-1} \left\{ \frac{IC(z)}{D(z)} \right\}. \quad (5.173)$$

Odziv na eksitaciju pri nultim početnim uslovima

Polinomi u brojniku i nazivniku z-transformacije odziva (5.168) se, pri nultim početnim uslovima, mogu faktorizovati na sljedeći način:

$$Y(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \cdot \frac{N_X(z)}{D_X(z)}, \quad (5.174)$$

$$Y(z) = K \frac{(1-z_1z^{-1})(1-z_2z^{-1})\dots(1-z_Mz^{-1})}{(1-p_1z^{-1})(1-p_2z^{-1})\dots(1-p_Nz^{-1})} \cdot \frac{(1-v_1z^{-1})(1-v_2z^{-1})\dots(1-v_{M_X}z^{-1})}{(1-q_1z^{-1})(1-q_2z^{-1})\dots(1-q_{N_X}z^{-1})}. \quad (5.175)$$

Sa $z_i, i=1,2,\dots,M$ i $p_i, i=1,2,\dots,N$ su označene nule i polovi funkcije prenosa, respektivno. Sa $v_i, i=1,2,\dots,M_X$ i $q_i, i=1,2,\dots,N_X$ su respektivno

označeni korijeni polinoma u brojniku i nazivniku z -transformacije pobude $X(z)$. Pretpostavimo dalje da ne dolazi do poništavanja nula i polova funkcije prenosa sa polovima i nulama z -transformacije pobude, respektivno.

Ako se radi o kauzalnim sistemima sa kauzalnom pobudom i ako su svi polovi jednostruki, razvoj na parcijalne razlomke daje:

$$Y(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i z}{z - p_i} + \sum_{i=1}^{N_X} \frac{A'_i z}{z - q_i}, \quad (5.176)$$

pa je odziv na eksitaciju pri nultim početnim uslovima jednak:

$$y(n) = \left[\sum_{i=1}^N A_i p_i^n + \sum_{i=1}^{N_X} A'_i q_i^n \right] u(n). \quad (5.177)$$

Primijetimo da smo na ovaj način razdvojili dijelove odziva koji su vezani za polove funkcije prenosa p_i od dijela odziva koji je vezan za polove q_i z -transformacije pobude.

U slučaju višestrukih polova i nekauzalnosti sistema ili pobude, traženje inverzne z -transformacije razvojem na parcijalne razlomke se usložnjava. Za oblast konvergencije $R^- < |z| < R^+$ odziva $Y(z)$ uzima da je dio z -ravni u kom konvergira i $H(z)$ i $X(z)$. U opštem slučaju se razvojem na parcijalne razlomke dobija:

$$\begin{aligned} Y(z) = & \sum_{i=0}^{M-N} c_i z^{-i} + \sum_{i=1}^{Np} \frac{A_i z}{z - p_i} + \sum_{i=1}^{Ns} \frac{B_i z}{z - s_i} + \\ & + \sum_{i=1}^{Nmp} \sum_{k=0}^{mp_i-1} \frac{C_i z}{(z - p_i)^{k+1}} + \sum_{i=1}^{Nms} \sum_{k=0}^{ms_i-1} \frac{D_i z}{(z - s_i)^{k+1}} + \\ & + \sum_{i=0}^{M_X - N_X} c'_i z^{-i} + \sum_{i=1}^{Nq} \frac{A'_i z}{z - q_i} + \sum_{i=1}^{Nr} \frac{B'_i z}{z - r_i} + \\ & + \sum_{i=1}^{Nmq} \sum_{k=0}^{mq_i-1} \frac{C'_i z}{(z - q_i)^{k+1}} + \sum_{i=1}^{Nmr} \sum_{k=0}^{mr_i-1} \frac{D'_i z}{(z - r_i)^{k+1}}. \end{aligned} \quad (5.178)$$

gdje su sa p_i i s_i označeni korijeni polinoma $D(z)$, a sa q_i i r_i korijeni polinoma $D_X(z)$, takvi da je $|p_i| < R^-$ i $|q_i| < R^-$, a $|s_i| > R^+$ i $|r_i| > R^+$. Np je

broj jednostrukih, a Nmp broj višestrukih korijena p_i reda mp_i . Ns je broj jednostrukih, a Nms broj višestrukih korijena s_i reda ms_i . Slično, Nq je broj jednostrukih, a Nmq broj višestrukih korijena q_i reda mq_i , dok je Nr broj jednostrukih, a Nmr broj višestrukih korijena r_i reda mr_i . Odziv je jednak:

$$\begin{aligned}
 y(n) = & \sum_{i=0}^{M-N} c_i \delta(n-i) + \left[\sum_{i=1}^{Np} A_i p_i^n \right] u(n) - \left[\sum_{i=1}^{Ns} B_i s_i^n \right] u(-n-1) + \\
 & + \left[\sum_{i=1}^{Nmp} \sum_{k=0}^{mp_i-1} C_i \binom{n}{k} p_i^{n-k} \right] u(n) - \left[\sum_{i=1}^{Nms} \sum_{k=0}^{ms_i-1} D_i \binom{n}{k} s_i^{n-k} \right] u(-n-1) + \\
 & + \sum_{i=0}^{M_x-N_x} c'_i \delta(n-i) + \left[\sum_{i=1}^{Nq} A'_i q_i^n \right] u(n) - \left[\sum_{i=1}^{Nr} B'_i r_i^n \right] u(-n-1) + \\
 & + \left[\sum_{i=1}^{Nmq} \sum_{k=0}^{mq_i-1} C'_i \binom{n}{k} q_i^{n-k} \right] u(n) - \left[\sum_{i=1}^{Nmr} \sum_{k=0}^{mr_i-1} D'_i \binom{n}{k} r_i^{n-k} \right] u(-n-1).
 \end{aligned} \tag{5.179}$$

Sopstveni i prinudni odziv

Na osnovu analize u vremenskom domenu znamo da je sopstveni odziv kauzalnog LTI sistema koji se dobije rješavanjem homogene jednačine diferencija jednak:

$$y_s(n) = \sum_{i=1}^N K_i p_i^n, \quad n \geq 0, \tag{5.180}$$

pod uslovom da su svi korijeni p_i , $i=1,2,\dots,N$ karakteristične jednačine

$$z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_{N-1} z + a_N = 0 \tag{5.181}$$

jednostruki. Poređenjem sa odzivom na pobudu pri nultim početnim uslovima i jednostrukim polovima \mathcal{Z} -transformacije odziva (5.177), koji smo dobili primjenom \mathcal{Z} -transformacije, vidimo da je sopstveni odziv sadržan u ovom izrazu, te da je generisan polovima funkcije prenosa. Pri tome je $A_i = K_i$. Preostali dio odziva predstavlja prinudni odziv, odnosno ustaljeno stanje. Slično razmatranje se može provesti i u slučajevima kada se javljaju višestruki polovi.

Kod realnih racionalnih funkcija prenosa nule i polovi dolaze u konjugovano-kompleksnim parovima. Pretpostavimo da su svi polovi jednostruki. Zavisno od rasporeda polova u kompleksnoj z -ravni, mogu nastupiti različiti oblici sopstvenog odziva:

1. svi polovi se nalaze unutar jediničnog kruga – sopstveni odziv eksponencijalno opada s porastom vremena,
2. pojavljuje se konjugovano-kompleksni par polova na jediničnoj kružnici – sopstveni odziv je u obliku sinusnih signala,
3. postoje polovi van jediničnog kruga – sopstveni odziv eksponencijalno raste s porastom vremena.

Odziv na akumulisanu energiju

Odziv na akumulisanu energiju se dobije inverznom z -transformacijom član $\frac{IC(z)}{D(z)}$ u izrazu (5.168) za z -transformaciju kompletnog odziva. Polovi ove racionalne funkcije su jednaki polovima funkcije prenosa, te je zbog toga sopstveni odziv sistema na akumulisanu energiju istog oblika kao sopstveni odziv na eksitaciju.

U prethodnom izlaganju posebno smo razmatrali odziv na eksitaciju kao zbir sopstvenog odziva na eksitaciju i prinudnog odziva, te odziv na akumulisanu energiju. Ako nas interesuje samo kompletan odziv, član $\frac{IC(z)}{D(z)}$ u izrazu (5.168) nije potrebno posebno izdvajati, niti je prilikom faktorizacije z -transformacije odziva potrebno razdvajati uticaj polova funkcije prenosa od polova z -transformacije pobude, već se kompletan odziv jednostavno određuje inverznom z -transformacijom od $Y(z)$ nekom od metoda.

5.6.6 Jednačine stanja u \mathcal{Z} -domenu

Opis sistema jednačinama stanja u matičnom obliku je dat sa:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}\mathbf{e}(n), \quad (5.182)$$

pri čemu je $\mathbf{x}(n+1)$ vektor varijabli stanja u trenutku $n+1$, $\mathbf{x}(n)$ vektor varijabli stanja u trenutku n , $\mathbf{e}(n)$ vektor ulaznih signala u trenutku n , matrica \mathbf{A} je kvadratna matrica stanja dimenzija $N \times N$ i matrica \mathbf{B} je pravougaona matrica koeficijenata uz ulazne signale dimenzija $N \times M$. Izlazne promjenljive sistema su određene matičnom jednačinom:

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}\mathbf{e}(n), \quad (5.183)$$

gdje su \mathbf{C} i \mathbf{D} matrice koje povezuju izlazne promjenljive sa promjenljivim stanja i pobudama.

Ako postoje transformacioni parovi: $\mathbf{x}(n) \leftrightarrow \mathbf{X}(z)$, $\mathbf{y}(n) \leftrightarrow \mathbf{Y}(z)$ i $\mathbf{e}(n) \leftrightarrow \mathbf{E}(z)$, primjenjujući \mathcal{Z} -transformaciju na matične jednačine (5.182) i (5.183) dobijamo:

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\mathbf{E}(z), \quad (5.184)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\mathbf{E}(z), \quad (5.185)$$

gdje je \mathbf{X}_0 vektor koji sadrži vrijednosti promjenljivih stanja u početnom trenutku posmatranja $n = 0$.

Rješenje za \mathcal{Z} -transformacije promjenljivih stanja dobije se iz (5.184):

$$\mathbf{X}(z) = z(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{X}_0 + (z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{E}(z), \quad (5.186)$$

gdje je \mathbf{I}_n jedinična matrica reda n . Za izlazne promjenljive \mathcal{Z} -transformacije su date matičnom jednačinom:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(z) &= \mathbf{C}z \left[(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{X}_0 + (z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{E}(z) \right] + \mathbf{D}\mathbf{E}(z) = \\ &= \mathbf{C}z(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{X}_0 + \left[\mathbf{C}(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right] \mathbf{E}(z). \end{aligned} \quad (5.187)$$

Ranije smo funkciju prenosa definisali za sisteme sa jednim ulazom i jednim izlazom. Definiciju možemo proširiti na sisteme sa više ulaza i više izlaza. Pri nultim početnim uslovima, definiše se *matrična funkcija prenosa* sa:

$$\mathbf{T}(z) = \frac{\mathbf{Y}(z)}{\mathbf{E}(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (5.188)$$

Poznavajući matričnu funkciju prenosa, izlazne promjenljive pri nultim početnim uslovima se mogu iskazati jednostavnom matričnom jednačinom:

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{T}(z)\mathbf{E}(z). \quad (5.189)$$

Sve pojedinačne funkcije prenosa jednog sistema, definisane kao količnik jedne izlazne promjenljive i jedne pobude, imaju isti polinom u nazivniku. To je karakteristični polinom koji smo već pominjali i označavali sa $D(s)$.

5.6.7 Analiza složenih sistema z -domenu

Rad sa složenim sistemima pojednostavljujemo prikazujući ih preko jednostavnijih sistema u vidu kaskadne ili paralelne veze, sistema u povratnoj sprezi ili njihove kombinacije. Impulsni odziv kaskadne veze dva LTI sistema jednak je konvoluciji njihovih impulsnih odziva:

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n). \quad (5.190)$$

Znajući da konvoluciji u vremenskom domenu odgovara množenje u z -domenu, funkcija prenosa kaskadne veze dva LTI sistema jednaka je proizvodu funkcija prenosa pojedinačnih sistema:

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z). \quad (5.191)$$

Za više sistema u kaskadnoj vezi, kao na Slici 5.12, vrijedi da je:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y_1(z)}{X(z)} \cdot \frac{Y_2(z)}{Y_1(z)} \cdot \frac{Y_3(z)}{Y_2(z)} \cdots \frac{Y_{n-1}(z)}{Y_{n-2}(z)} \cdot \frac{Y(z)}{Y_{n-1}(z)}, \quad (5.192)$$

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \cdots H_n(z). \quad (5.193)$$

Kod paralelne veze LTI sistema prikazane na Slici 5.13, isti pobudni signal se istovremeno dovodi na ulaz svih pojedinačnih sistema, a izlaz kompletnog sistema jednak je zbiru izlaznih signala pojedinačnih sistema. Zbog osobine linearnosti z-transformacije, jednako vrijedi u z -domenu:

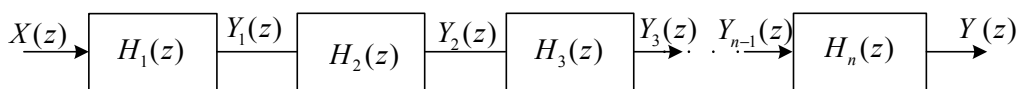
$$Y(z) = Y_1(z) + Y_2(z) + \dots + Y_n(z). \quad (5.194)$$

Za svaki pojedinačni sistem vrijedi da je:

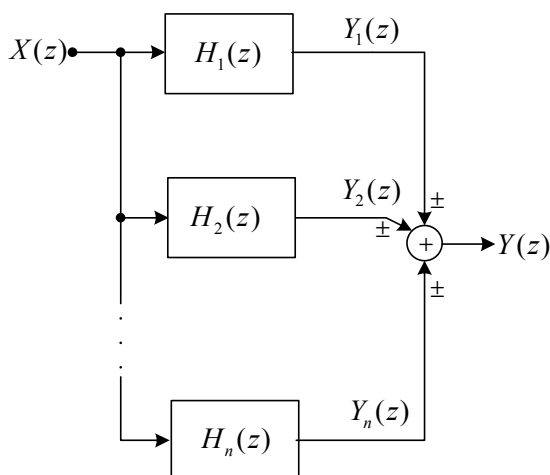
$$Y_i(z) = H_i(z) \cdot X(z), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.195)$$

tako da za funkciju prenosa paralelne veze n LTI dobijamo:

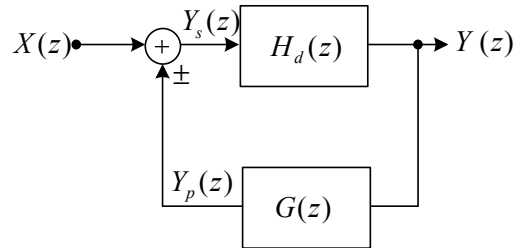
$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_n(z). \quad (5.196)$$



Slika 5.12 Blok šema kaskadne veze n LTI sistema u z -domenu.



Slika 5.13 Blok šema paralelne veze n LTI sistema u z -domenu.



Slika 5.14 Blok šema LTI sistema sa povratnom vezom u z -domenu.

Posmatrajmo sada blok šemu sistema sa povratnom vezom, datu na Slici 7.14. Određivanje funkcije prenosa sistema sa povratnom vezom u z -domenu je mnogo jednostavnije nego određivanje impulsnog odziva u domenu diskretnog vremena:

$$Y_p(z) = G(z)Y(z), \quad (5.197)$$

$$Y_s(z) = X(z) \pm Y_p(z), \quad (5.198)$$

$$Y(z) = H_d(z)Y_s(z), \quad (5.199)$$

na osnovu čega sledi da je

$$Y(z) = H_d(z)[X(z) \pm G(z)Y(z)], \quad (5.200)$$

te je funkcija prenosa sistema sa povratnom vezom

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_d(z)}{1 \mp G(z)H_d(z)}. \quad (5.201)$$

Ako je potrebno, impulсни odziv sistema sa povratnom vezom se može odrediti inverznom z -transformacijom funkcije prenosa $H(z)$, jednostavnije nego u vremenskom domenu.