Električne mreže i kola

15. oktobar 2015

1 Osnovni pojmovi

Električna mreža je kolekcija povezanih elemenata.

Zatvoren sistem obrazovan od elemenata između kojih se vrši razmjena energije putem električne struje koja je uspostavljena u sistemu naziva se *električno kolo.*

Element električne mreže je osnovni dio mreže koji vrši određenu funkciju i koji se ne može razložiti, a da pri tome ne izgubi osnovnu funkciju. Elementi mogu biti *prosti* i *složeni.*

Termini električna mreža i električno kolo se koriste kako za fizičke sisteme tako i za apstraktne modele ovih sistema.

Krajevi (priključci) elemenata (mreža) predstavljaju *čvorove* električne mreže, a par krajeva se naziva *pristup.* Može se govoriti o pristupima električne mreže, ali električno kolo nema pristupe. Električna mreža se može povezati sa drugim električnim mrežama ili elementima, a električno kolo je zatvoren sistem.

2 Osnovne električne veličine

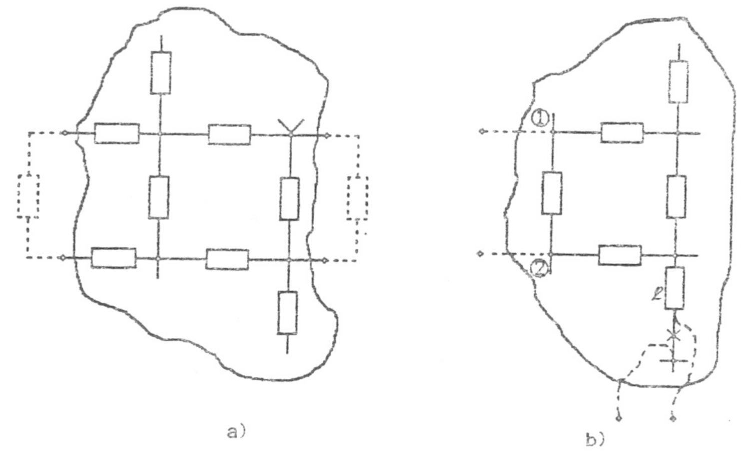
Količina naelektrisanja se označava sa q i mjeri se *kulonima* (C).

Ukoliko je rad potreban da se naelektrisana čestica sa naelektrisanjem dq pomjeri iz tačke j u tačku k jednak dw, onda je napon između te dvije tačke jednak

$$u_{jk} = \frac{dw}{dq}. \tag{1}$$

Napon između dvije tačke j i k u električnom polju jednak je potencijalnoj razlici između tih tačaka

$$u_{jk} = v_j - v_k. \tag{2}$$



Slika 1: Električna mreža, električno kolo.

Jedinica za mjerenje napona u SI sistemu je *volt* (V).

Električna struja u kolu nastaje pri usmjerenom kretanju nosilaca naelektrisanja. Intenzitet električne struje kroz posmatranu površinu je

$$i = \frac{dq}{dt}. \tag{3}$$

Jedinica za mjerenje struje u SI sistemu je *amper* (A).

Ako ϕ predstavlja ukupni fluks elementa, na njegovim krajevima će, prema Faradejevom zakonu, postojati napon u koji je jednak

$$u = \frac{d\phi}{dt}. \tag{4}$$

Brzina promjene energije je jednaka *snazi*

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq}\frac{dq}{dt} = ui. \tag{5}$$

Jedinica za mjerenje energije je *džul* (J), a jedinica za mjerenje snage je *vat* (W).

Navedene veličine su, u opštem slučaju, zavisne od vremena

$$i\left(t\right) = \frac{dq\left(t\right)}{dt}, \tag{6}$$

$$u\left(t\right) = \frac{d\phi\left(t\right)}{dt}, \tag{7}$$

$$p(t) = \frac{dw(t)}{dt}. \tag{8}$$

Moguće je odrediti i inverzne relacije

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} i(\tau)\, d\tau, \tag{9}$$

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau = \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau, \tag{10}$$

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, i(\tau)\, d\tau = w(t_0) + \int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau \tag{11}$$

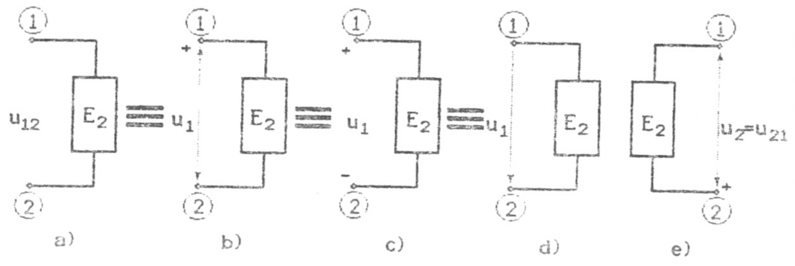
Ovdje smatramo da su veličine $q(-\infty), \phi(-\infty)$ i $w(-\infty)$ jednake nuli.

Često se, ukoliko ne postoji opasnost od zabune, argument t izostavlja i usvaja se konvencija da se malim slovom označava veličina zavisna od vremena, npr. $i \equiv i(t)$.

3 Modelovanje električnih mreža

U analizi električnih mreža i električnih kola koriste se matematički modeli komponenata (elemenata) i njihovih veza. Matematički modeli elemenata predstavljaju jednačine kojima su povezani naponi i struje na njihovim krajevima. Modeli povezivanja definišu jednačine kojima su određeni naponi i struje povezanih elemenata. To su Kirhofovi zakoni za struje i napone. Modeli elemenata i povezivanja su nezavisni i važe jednovremeno.

Elementi i mreže se mogu modelovati sa različitim nivoom detalja. Što je model detaljniji on je tačniji, ali i složeniji. Na primjer, pri niskim frekvencijama pobudnog signala može se smatrati da se naponi i struje u kolu uspostavljaju trenutno, dok pri visokim frekvencijama to nije slučaj. Takođe, na niskim frekvencijama se može zanemariti npr. induktivna priroda elemenata ili samih provodnika, dok na niskim frekvencijama reaktansa provodnika može postati veća od njegove otpornosti. Dakle, model uvijek sadrži određene aproksimacije koje analizu čine jednostavnijom, a zanemarljivo utiču na tačnost rezultata. Obim aproksimacija zavisi od primjene.



Slika 2: Označavanje napona na elementima sa jednim pristupom.

4 Veličine pridružene elementima električnih mreža

Napon na krajevima elementa (napon elementa) je razlika potencijala između krajeva

$$u_{12} = v_1 - v_2. \tag{12}$$

Radi jednostavnijeg označavanja, obično se ne koriste dva indeksa, ali je neophodno označiti *referentni smjer* napona, $u_1 = u_{12}$. Napon je pozitivan, u odnosu na usvojeni referentni smjer, ako je potencijal označenog kraja viši od potencijala drugog kraja. Ako se usvoji drugačiji referentni smjer onda je

$$u_2 = u_{21} = v_2 - v_1. \tag{13}$$

Sada je

$$u_1 = -u_2. \tag{14}$$

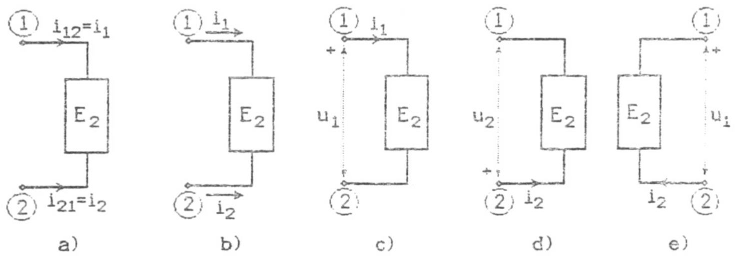
Struja kroz element nastaje usljed kretanja naelektrisanja kroz priključne krajeve. Pojam *kretanje naelektrisanja* uključuje i dielektrični pomjeraj. Za elemente sa dva kraja, struja na jednom kraju elementa jednaka je struji na njegovom drugom kraju

$$i_1 = i_{12}. \tag{15}$$

Radi jednostavnijeg označavanja obično se koristi samo jedan indeks pri čemu je neophodno označiti referentni smjer struje. Za elemente sa dva kraja vrijedi

$$i_2 = i_{21} = -i_1. \tag{16}$$

Struja je pozitivna ukoliko se njen smjer poklapa sa usvojenim referentnim smjerom.



Sl. 1.10 Označavanje struje elementa sa dva kraja.

Slika 3: Označavanje struja na elementima sa jednim pristupom.

Referentni smjerovi napona i struje se mogu birati proizvoljno. Praktično je da se koriste *usaglašeni smjerovi* napona i struje. Usaglašeni smjerovi napona i struje motivisani su činjenciom da struja teče od tačke sa višim potencijalom ka tački sa nižim potencijalom (kretanje pozitivnog naelektrisanja), osim kod generatora gdje druga sila (elektromotorna) pokreće pozitivna naelektrisanja od tačke na nižem ka tački na višem potencijalu. Kod generatora se obično koriste *neusaglašeni* smjerovi napona i struje.

Trenutna ulazna snaga elementa je brzina kojom se energija ulaže u element. Za usaglašene referentne smjerove napona i struje ona je jednaka

$$p_1 = u_1 i_1, \tag{17}$$

odnosno

$$p_2 = u_2 i_2. \tag{18}$$

Pošto je $u_1 = -u_2$ i $i_1 = -i_2$ slijedi da je $p_1 = p_2$. Prema tome, indeks se može izostaviti. Ako je ulazna snaga pozitivna element prima energiju od kola, a ako je negativna element predaje energiju kolu.

U slučaju generatora obično se računa *izlazna snaga*

$$p_i = u_1 i_2. \tag{19}$$

Očigledno je $p_i = -p$. Pošto generatori obično predaju energiju kolu, kada se govori o snazi generatora podrazumijeva se da je riječ o izlaznoj snazi pa ćemo indeks i izostaviti.

Energija (rad) koji se ulaže u element od trenutka t_0 do trenutka $t, t > t_0$ je

$$a\left(t_0, t\right) = \int_{t_0}^{t} da\left(\tau\right) = \int_{t_0}^{t} p\left(\tau\right) d\tau. \tag{20}$$

Neki elementi mogu da *akumulišu* energiju koju zatim mogu da predaju ostatku kola. Akumulisana energija mijenja stanje sredine jer se formira električno ili magnetno polje. Energija formiranog polja je, u stvari, akumulisana energija. Ako se sva energija uložena u element akumuliše, onda je akumulisana energija u trenutku t_0 jednaka radu koji se uloži do trenutka t_0

$$w\left(t_0\right) = a\left(-\infty, t_0\right) = \int_{-\infty}^{t_0} p\left(\tau\right) d\tau. \tag{21}$$

Podrazumijeva se da je $w\left(-\infty\right) = 0$. U realnom slučaju je $w\left(t_0\right) \neq a\left(-\infty, t_0\right)$ jer se energija ulaže i u druge fizičke procese.

Elementi koji mogu akumulisati energiju se nazivaju *elementi sa memorijom*. Fizički, to su kondenzatori i kalemovi.

Element je *pasivan* ako je za svaki trenutak t_0 i $t > t_0$ uložena energija u element nenegativna

$$w\left(t_0\right) + a\left(t_0, t\right) \geq 0. \tag{22}$$

Ako se sav rad koji se ulaže u element akumuliše u vidu energije električnog ili magnetnog polja onda se uslov pasivnosti svodi na

$$w\left(t\right) \geq 0. \tag{23}$$

Pasivnost se, osim za pojedine elemente, na isti način može definisati i za mrežu sa proizvoljnim brojem elemenata.

Srednja (aktivna) snaga u intervalu $\left(t_0, t\right)$ jednaka je

$$P = \frac{a\left(t_0, t\right)}{t - t_0} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t} p\left(\tau\right) d\tau, \tag{24}$$

gdje je $T = t - t_0$.

5 Podjela elemenata električnih kola

Elementi električnih mreža se mogu podieliti prema raznim kriterijumima. Prema broju krajeva, odnosno, pristupa elementi mogu biti sa dva kraja (jednim pristupom), tri kraja (najviše dva nezavisna pristupa) itd.

Elemente električnih mreža je moguće podijeliti i sa stanovišta fizičkih procesa koji se u njima dešavaju. Iako se u jednom realnom elementu istovremeno dešava više različitih procesa, često ih je, sa dovoljnom tačnošću, moguće modelovati idealizovanim modelima u kojima je prisutan samo jedan dominantni fizički proces, a uticaj ostalih se zanemaruje. Ovi procesi mogu biti: nepovratni gubitak energije, formiranje magnentnog polja – akumulisanje magnentne energije i formiranje električnog polja – akumulisanje elektrostatičke energije. Ovi idealizovani elementi se nazivaju: rezistivnim, induktivnim i kapacitivnim elementima, respektivno i mogu se opisati algebarskim relacijama između električnih veličina na pristupima.

Rezistivni element sa jednim pristupom opisan je relacijom oblika

$$F(u, i, t) = 0. \tag{25}$$

Ovo znači da napon i struja na pristupu rezistivnog elementa nisu nezavisni već u svakom trenutku moraju zadovoljavati relaciju (25).

Ako se karakteristika rezistivnog elementa ne mijenja sa vremenom ona je oblika

$$F(u, i) = 0. \tag{26}$$

Rezistivni elementi ne akumulišu energiju. Oni se nazivaju i nedinamičkim elementima, odnosno, elementima bez memorije.

Induktivni element sa jednim pristupom opisan je relacijom oblika

$$F(\phi, i, t) = 0. \tag{27}$$

I u ovom slučaju karakteristika može biti nezavisna od vremena. Induktivni element je element sa memorijom, odnosno, dinamički element i u njemu se akumuliše energija.

Kapacitivni element sa jednim pristupom opisan je relacijom oblika

$$F(q, u, t) = 0. \tag{28}$$

I u ovom slučaju karakteristika može biti nezavisna od vremena. Kapacitivni element je takođe element sa memorijom, odnosno, dinamički element i u njemu se akumuliše energija.

Memristor je element sa jednim pristupom opisan relacijom oblika

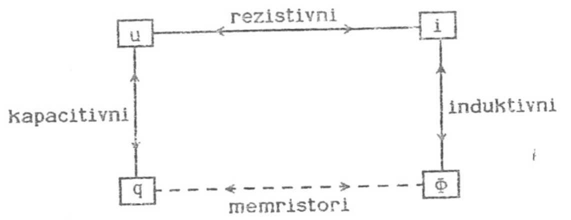
$$F(\phi, q, t) = 0. \tag{29}$$

Memristor (otpornik sa memorijom) je takođe dinamički element. Leon Chua je teorijski analizirao ovaj element 1971. godine, ali je tek 2008. godine proizveden prvi fizički memristor kao komponenta na nanoskali. Patenti vezani za memristore uključuju primjene u programbilnoj logici, obradi signala, neuronskim mrežama, brain-computer interfejsima, itd.

Jednačina ili sistem jednačina koji opisuje ponašanje elementa predstavlja *karakteristiku elementa.*

Ako je karakteristika elementa linearna relacija, onda je element *linearan.* U suprotnom je *nelinearan.* Linearan element ima svojstva *homogenosti* i *superpozicije.* Neka je odziv elementa na pobudu i jednak u, što ćemo označiti sa

$$i \longrightarrow u. \tag{30}$$



Slika 4: Podjela elemenata prema fizičkim procesima.

Element ima svojstvo aditivnosti (superpozicije) ako iz

$$i_1 \longrightarrow u_1 \tag{31}$$

$$i_2 \longrightarrow u_2, \tag{32}$$

slijedi

$$i_1 + i_2 \longrightarrow u_1 + u_2. \tag{33}$$

Element ima svojstvo homogenosti ako iz

$$i \longrightarrow u, \tag{34}$$

slijedi

$$ki \longrightarrow ku, \forall k. \tag{35}$$

Osim za elemente električnih mreža, linearnost se, na isti način, može definisati i za električne mreže.

Primjer

Neka je element opisan sljedećom relacijom između struje i napona

$$v = Ri.$$

Odrediti da li je element linearan.

Rješenje

Superpozicija. Za struje i_1 i i_2 naponi na elementu su

$$v_1 = Ri_1$$

i

$$v_2 = Ri_2.$$

Za struju $i = i_1 + i_2$ napon na elementu je

$$v = Ri = R(i_1 + i_2) = Ri_1 + Ri_2 = v_1 + v_2.$$

Dakle, element ima svojstvo superpozicije.

Homogenost. Za struju i_1 napon na elementu je

$$v_1 = Ri_1.$$

Za struju $i_2 = ki_1$ napon na elementu je

$$v_2 = Ri_2 = R(ki_1) = kRi_1 = kv_1.$$

Element ima i svojstvo homogenosti pa je element linearan.

Primjer

Neka je element opisan relacijom između struje i napona

$$v = i^2.$$

Provjeriti da li se radi o linearnom elementu.

Rješenje

Superpozicija. Za struje i_1 i i_2 naponi na elementu su

$$v_1 = i_1^2$$

i

$$v_2 = Ri_2^2.$$

Za struju $i = i_1 + i_2$ napon na elementu je

$$v = i^2 = (i_1 + i_2)^2 = i_1^2 + 2i_1 i_2 + i_2^2.$$

Sa druge strane je

$$v_1 + v_2 = i_1^2 + i_2^2.$$

Pošto je

$$i_1^2 + 2i_1 i_2 + i_2^2 \neq i_1^2 + i_2^2,$$

element ne zadovoljava svojstvo superpozicije pa se radi o nelinearnom elementu.

Ako je karakteristika elementa funkcija vremena, element je *vremenski promjenljiv* (*vremenski varijantan*, *nestacionaran*). Ako karakteristika elementa nije funkcija vremena, element je *vremenski nepromjenljiv* (*vremenski invarijantan*, *stacionaran*). Za vremenski nepromjenljiv element važi da iz

$$i(t) \longrightarrow v(t) \tag{36}$$

slijedi

$$i\,(t-T) \longrightarrow v\,(t-T)\,, \forall T. \tag{37}$$

Osobine elemenata se mogu prenijeti i na osobine električnih mreža.

Ako mreža sadrži samo pasivne elemente onda se radi o *pasivnoj* mreži. U suprotnom mreža je *aktivna*.

Ako su svi elementi mreže linearni i vremenski nepromjenljivi radi se o linearnoj i vremenski nepromjenljivoj mreži. U linearnoj mreži relacija između pobude i odziva ima osobine aditivnosti i homogenosti. U vremenski nepromjenljivoj mreži relacija između pobude i odziva zadovoljava uslov vremenske nepromjenljivosti.

Ako mreža sadrži samo elemente i provodnike čije su fizičke dimenzije mnogo manje od talasne dužine signala onda se radi o mreži sa *koncentrisanim parametrima*. U takvim mrežama se može smatrati da se vrijednosti napona i struja u svakoj tački mreže uspostavljaju trenutno. U suprotnom mreža je sa *raspodijeljenim parametrima*.

Mreža je kauzalna ako njenom odziv u bilo kom trenutku zavisi od prethodnih i vrijednosti pobude u tom trenutku. Odziv u kauzalnim mrežama se ne može pojaviti prije uključenja pobude. Mreže koje ne zadovoljavaju ovaj zahtjev su nekauzalne.

Bavićemo se uglavnom kauzalnim, linearnim, vremenski nepromjenljivim mrežama sa koncentrisanim i distribuiranim parametrima.

6 Elementi električnih kola

6.1 Pasivni elementi

6.1.1 Otpornik

Otpornik je rezistivni element čija je karakteristika u opštem slučaju data sa

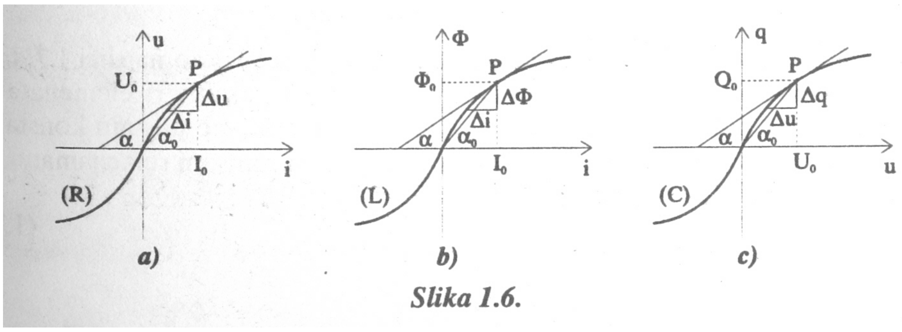
$$F\,(u,i,t) = 0. \tag{38}$$

Karakteristikom je data veza između napona i struje pa se naziva i $u-i$ karakteristika.

Osnovni parametar otpornika je *otpornost*. Otpornost je jednaka nagibu tangente na karakteristiku otpornika u posmatranoj radnoj tački M

$$R = \left.\frac{\partial u}{\partial i}\right|_M = \operatorname{tg}\alpha. \tag{39}$$

Otpornost otpornika zavisi od odabrane radne tačke, tj. vrijednosti napona i struje, a može da zavisi i od vremena $R = R\,(u,i,t)$. Otpornost definisana sa (39) naziva se i *dinamička otpornost*.



Slika 5: Karakteristika otpornika.

Količnik vrijednosti napona i struje u radnoj tački

$$R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \operatorname{tg} \alpha_0, \tag{40}$$

naziva se *statička otpornost* otpornika. Ukoliko je otpornik linearan onda je dinamička otpornost jednaka statičkoj otpornosti svakoj tački karakteristike.

Jedinica za mjerenje otpornosti je om (Ω).

Definiše se i (dinamička) *provodnost* otpornika kao recipročna vrijednost otpornosti

$$G = \left. \frac{\partial i}{\partial u} \right|_M = \operatorname{tg} \beta. \tag{41}$$

Statička provodnost je jednaka

$$G_0 = \frac{I_0}{U_0}. \tag{42}$$

Jedinica za mjerenje otpornosti je simens (S).

Linearan otpornik je u potpunosti određen vrijednošću otpornosti (provodnosti) i u svakom trenutku vrijedi

$$u = Ri \tag{43}$$

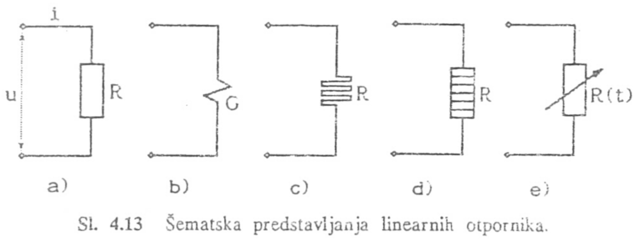
$$i = Gu. \tag{44}$$

Trenutna ulazna snaga otpornika je

$$p_R(t) = u(t)\, i(t). \tag{45}$$

Rad (energija) koji se ulaže u otpornik u intervalu (t_0, t) iznosi

$$a(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p_R(\tau)\, d\tau. \tag{46}$$



Slika 6: Simbol linearnog otpornika.

Otpornik je element bez memorije pa je uslov njegove pasivnosti

$$a(t_0, t) \geq 0. \tag{47}$$

Ovo je ekvivalentno uslovu da je ulazna snaga otpornika nenegativna u svakom trenutku

$$p_R(t) = u(t)\, i(t) \geq 0. \tag{48}$$

U ovom slučaju karakteristika otpornika se nalazi u 1. i 3. kvadrantu.

Za linearan otpornik vrijedi

$$p_R(t) = Ri^2(t), \tag{49}$$

pa se uslov pasivnosti svodi na

$$Ri^2(t) \geq 0, \forall t, \tag{50}$$

odnosno,

$$R \geq 0. \tag{51}$$

6.1.2 Kalem

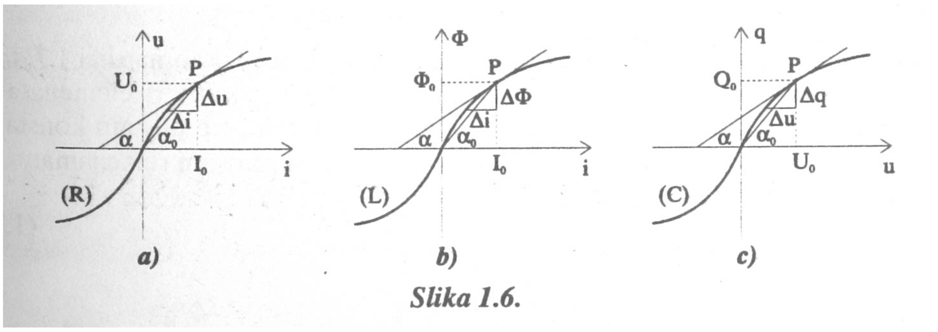
Kalem je dinamički element čija je karakteristika, u opštem slučaju, data sa

$$F(\phi, i, t) = 0. \tag{52}$$

Osnovni parametar kalema je *induktivnost.* Induktivnost je jednaka nagibu tangente na karakteristiku kalema u posmatranoj radnoj tački M

$$L = \left.\frac{\partial \phi}{\partial i}\right|_M = \operatorname{tg} \alpha. \tag{53}$$

Induktivnost kalema zavisi od odabrane radne tačke, tj. vrijednosti magnetnog fluksa i struje, a može da zavisi i od vremena $L = L(\phi, i, t)$. Induktivnost definisana sa (53) naziva se i *dinamička induktivnost.*



Slika 7: Karakteristika kalema.

Količnik vrijednosti magnetnog fluksa i struje u radnoj tački naziva se *statička induktivnost* kalema

$$L_0 = \frac{\Phi_0}{I_0} = \operatorname{tg} \alpha_0. \tag{54}$$

Dinamička i statička induktivnost *linearnog* kalema su jednake u svakoj tački karakteristike. Jedinica za mjerenje induktivnosti je henri (H).

U slučaju linearnog kalema vrijedi

$$\phi(t) = L(t)\, i(t). \tag{55}$$

Pošto je

$$u(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}, \tag{56}$$

za usklađene referentne smjerove napona i struje, imamo

$$u(t) = \frac{d[L(t)\, i(t)]}{dt} = \tag{57}$$

$$= \frac{dL(t)}{dt} i(t) + L(t) \frac{di(t)}{dt}. \tag{58}$$

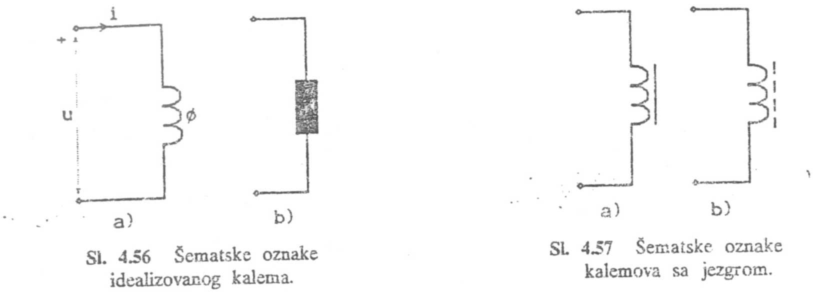
Ukoliko je kalem vremenski nepromjenljiv $L(t) = L = \text{const}$

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}. \tag{59}$$

Struja linearnog vremenski nepromjenljivog kalema se može izraziti u funkciji napona

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau = \tag{60}$$

$$= i(0) + \frac{1}{L} \int_{0}^{t} u(\tau)\, d\tau. \tag{61}$$



Slika 8: Simbol linearnog kalema.

Rad uložen u kalem u intervalu (t_0, t) , u slučaju linearnog i vremenski nepromjenljivog kalema, iznosi

$$a\left(t_0, t\right) = \int_{t_0}^{t} p\left(\tau\right) d\tau = \tag{62}$$

$$= \int_{t_0}^{t} u\left(\tau\right) i\left(\tau\right) d\tau = \tag{63}$$

$$= \int_{t_0}^{t} L \frac{di\left(\tau\right)}{d\tau} i\left(\tau\right) d\tau = \tag{64}$$

$$= L \int_{i(t_0)}^{i(t)} idi = \tag{65}$$

$$= \frac{Li^2\left(t\right)}{2} - \frac{Li_0^2\left(t\right)}{2}. \tag{66}$$

Sav rad uložen u kalem se pretvara u energiju magnetnog polja i ukoliko smatramo da je kalem u trenutku $t = -\infty$ bio bez akumulisane energije, uslov pasivnosti se svodi na

$$w_C\left(t_0\right) + a\left(t_0, t\right) = \frac{Li_0^2\left(t\right)}{2} + \frac{Li^2\left(t\right)}{2} - \frac{Li^2\left(t_0\right)}{2} = \frac{Li^2\left(t\right)}{2} \geq 0, \tag{67}$$

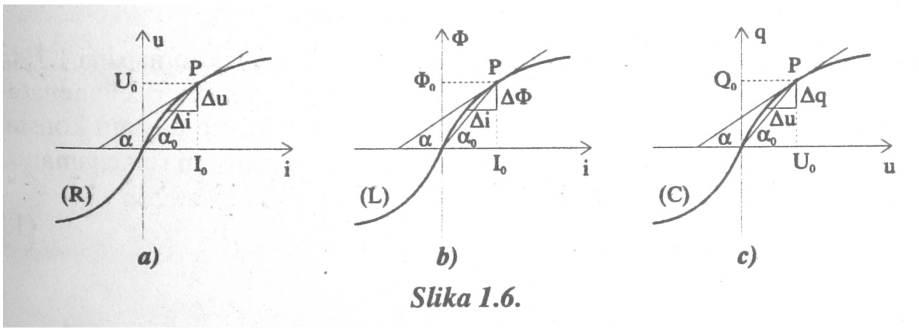
što je ispunjeno ako je

$$L \geq 0. \tag{68}$$

6.1.3 Kondenzator

Kondenzator je dinamički element čija je karakteristika, u opštem slučaju, data sa

$$F\left(q, u, t\right) = 0. \tag{69}$$



Slika 9: Karakteristika kondenzatora.

Osnovni parametar kondenzatora je *kapacitivnost.* Kapacitivnost je jednaka nagibu tangente na karakteristiku u posmatranoj radnoj tački M

$$C = \left.\frac{\partial q}{\partial u}\right|_M = \operatorname{tg}\alpha. \tag{70}$$

Kapacitivnost kondenzatora zavisi od odabrane radne tačke, tj. vrijednosti količine naelektrisanja i napona, a može biti i funkcija vremena $C = C(q, u, t)$. Kapacitivnost definisana izrazom (70) se naziva i *dinamička kapacitivnost.*

Količnik vrijednosti količine naelektrisanja i struje u radnoj tački naziva se *statička kapacitivnost* kondenzatora

$$C_0 = \frac{Q_0}{U_0} = \operatorname{tg}\alpha_0. \tag{71}$$

Dinamička i statička kapacitivnost linearnog kalema su jednake u svakoj tački karakteristike. Jedinica za mjerenje kapacitivnosti je farad (F).

U slučaju linearnog kondenzatora vrijedi

$$q(t) = C(t)\, u(t)\,. \tag{72}$$

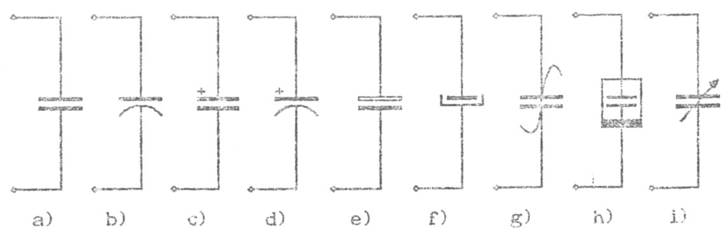
Pošto je

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}, \tag{73}$$

za usklađene referentne smjerove napona i struje, imamo

$$i(t) = \frac{d\left[C(t)\, u(t)\right]}{dt} = \tag{74}$$

$$= \frac{dC(t)}{dt} u(t) + C(t)\, \frac{du(t)}{dt}. \tag{75}$$



Sl. 4.40 Šematske oznake kondenzatora.

Slika 10: Simbol linearnog kondenzatora.

Ukoliko je kondenzator vremenski nepromjenljiv $C(t) = C = \text{const}$

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}. \tag{76}$$

Napon linearnog vremenski nepromjenljivog kondenzatora se može izraziti u funkciji struje

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau = \tag{77}$$

$$= u(0) + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(\tau)\,d\tau. \tag{78}$$

Rad uložen u kondenzator u intervalu (t_0, t), u slučaju linearnog i vremenski nepromjenljivog kondenzatora, iznosi

$$a(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau = \tag{79}$$

$$= \int_{t_0}^{t} u(\tau)\,i(\tau)\,d\tau = \tag{80}$$

$$= \int_{t_0}^{t} u(\tau)\,C\frac{du(\tau)}{d\tau}d\tau = \tag{81}$$

$$= C\int_{u(t_0)}^{(t)} udu = \tag{82}$$

$$= \frac{Cu^2(t)}{2} - \frac{Cu^2(t_0)}{2}. \tag{83}$$

Sav rad uložen u kondenzator se pretvara u energiju električnog polja i, ukoliko smatramo da je kondenzator u trenutku $t = -\infty$ bio bez akumulisane energije, uslov pasivnosti se svodi na

$$w_L(t_0) + a(t_0, t) = \frac{Cu^2(t_0)}{2} + \frac{Cu^2(t)}{2} - \frac{Cu^2(t_0)}{2} = \frac{Cu^2(t)}{2} \geq 0, \tag{84}$$

što je ispunjeno ako je

$$C \geq 0. \tag{85}$$

6.1.4 Neprekidnost napona kondenzatora i struje kalema

Teorema o neprekidnosti napona kondenzatora. Ako je struja linearnog i vremenski nepromjenljivog kondenzatora ograničena u zatvorenom intervalu $[t_1, t_2]$, tada je napon kondenzatora neprekidna funkcija vremena u otvorenom intervalu (t_1, t_2).

Dokaz. Promjena količine naelektrisanja u trenutku $t \in (t_1, t_2)$ iznosi

$$\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t) = \int_t^{t+\Delta t} i(\tau)\, d\tau. \tag{86}$$

Kada $\Delta t \to 0$ i $\Delta q \to 0$ jer površina određena ovim integralom jednaka teži 0. Sa druge strane, promjena napona je

$$\Delta u = \frac{\Delta q}{C} \to 0. \tag{87}$$

Analogno se dokazuje teorema o neprekidnosti struje kalema. Ako je napon linearnog i vremenski nepromjenljivog kalema ograničen u zatvorenom intervalu $[t_1, t_2]$, tada je struja kalema neprekidna funkcija vremena u otvorenom intervalu (t_1, t_2).

Teoreme neprekidnosti napona kondenzatora i struje kalema u stvari iskazuju svojstvo memorisanja kondenzatora i kalema.

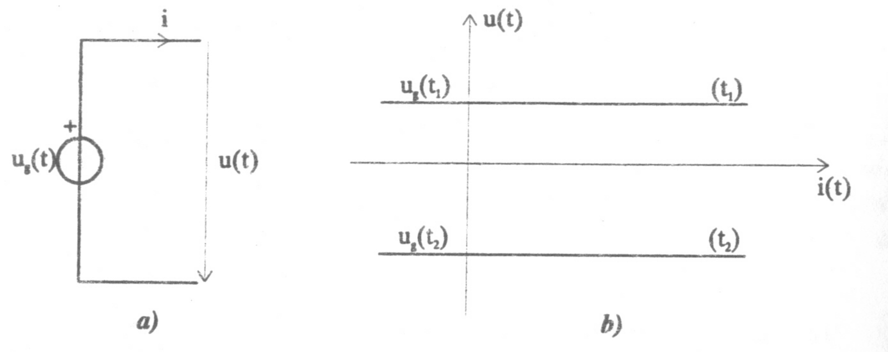
6.2 Aktivni elementi

6.2.1 Idealan naponski generator

Napon na krajevima idealnog naponskog generatora je nezavisan od struje. Njegova karakteristika je data jednačinom

$$u(t) = u_g(t), \forall i. \tag{88}$$

Idealni naponski generator je nelinearan i aktivan element, a može biti i vremenski promjenljiv. Dinamička otpornost idealnog naponskog generatora je jednaka nuli. Njegova uobičajena uloga je da predaje energiju ostatku



Slika 1.4.

Slika 11: Karakteristika idealnog naponskog generatora.

kola. Zbog toga se za generator koriste neusaglašeni smjerovi napona i struje i termin snaga generatora podrazumijeva *izlaznu* snagu generatora

$$p = u_g i. \tag{89}$$

Ukoliko je vrijednost izlazne snage pozitivna generator predaje energiju ostatku kola, a ukoliko je negativna prima energiju od ostatka kola.

Ako se krajevi idealnog naponskog generatora kratko spoje, režim rada je nedefinisan.

6.2.2 Idealan strujni generator

Struja na pristupu idealnog strujnog generatora je nezavisna od napona. Njegova karakteristika je data jednačinom

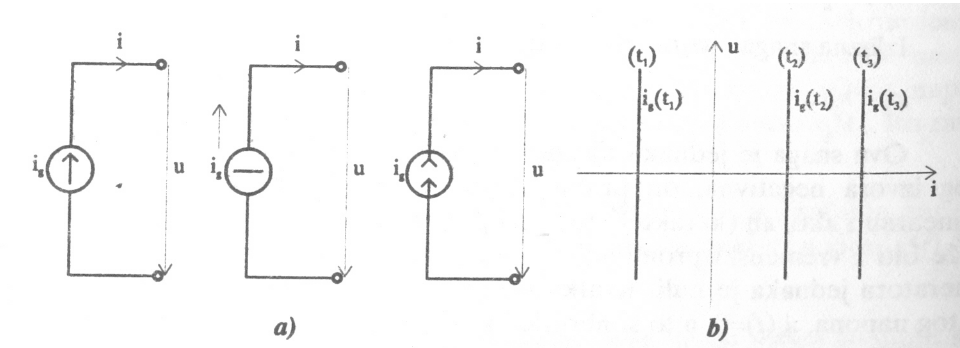
$$i\left(t\right) = i_g\left(t\right), \forall u. \tag{90}$$

Idealni strujni generator je nelinearan i aktivan element, a može biti i vremenski promjenljiv. Dinamička otpornost idealnog strujnog generatora je beskonačna. Njegova uobičajena uloga je da predaje energiju ostatku kola. Zbog toga se i ovdje koriste neusaglašeni smjerovi napona i struje, a termin snaga generatora podrazumijeva *izlaznu* snagu generatora

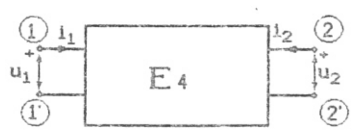
$$p = u i_g. \tag{91}$$

Ukoliko je vrijednost izlazne snage pozitivna generator predaje energiju ostatku kola, a ukoliko je negativna prima energiju od ostatka kola.

Ako su krajevi idealnog strujnog generatora otvoreni, režim rada je nedefinisan.



Slika 12: Karakteristika idealnog strujnog generatora.



Slika 13: Element sa dva pristupa.

6.3 Elementi sa dva pristupa

Zadržaćemo se na rezistivnim elementima sa dva pristupa. Mreže sa dva pristupa ćemo kasnije detaljno razmatrati. Ovdje ćemo prikazati samo nekoliko često korištenih elemenata.

Uslov pasivnosti rezistivnog elementa sa dva pristupa je takođe

$$p(t) \geq 0, \tag{92}$$

pri čemu se u ovom slučaju ulazna snaga elementa računa kao zbir ulaznih snaga na pristupima

$$p(t) = u_1(t)\, i_1(t) + u_2(t)\, i_2(t), \tag{93}$$

za usaglašene referentne smjerove napona i struja.

6.3.1 Zavisni generatori

Zavisni (kontrolisani) generatori spadaju u grupu rezistivnih elemenata sa dva pristupa. Opisani su sa dvije algebarske jednačine između napona i struja na pristupima. Oblik ovih jednačina je takav da možemo smatrati da su ovi elementi sastavljeni iz jednog naponskog ili strujnog generatora vezanog za izlazni pristup i jedne kratke ili otvorene veze vezane za ulazni pristup. Shodno ovome dijelimo ih na naponske i strujne zavisne generatore.

Slika 14: Naponski generator kontrolisan strujom.

Ulazni pristup se zove kontrolišući, a izlazni kontrolisani pristup. U zavisnosti od prirode kontrolisane i kontrolišuće veličine razlikujemo četiri vrste zavisnih generatora:

1. Naponski generator kontrolisan strujom,
2. Naponski generator kontrolisan naponom,
3. Strujni generator kontrolisan strujom,
4. Strujni generator kontrolisan naponom.

Ovi elementi su nerecipročni i aktivni.

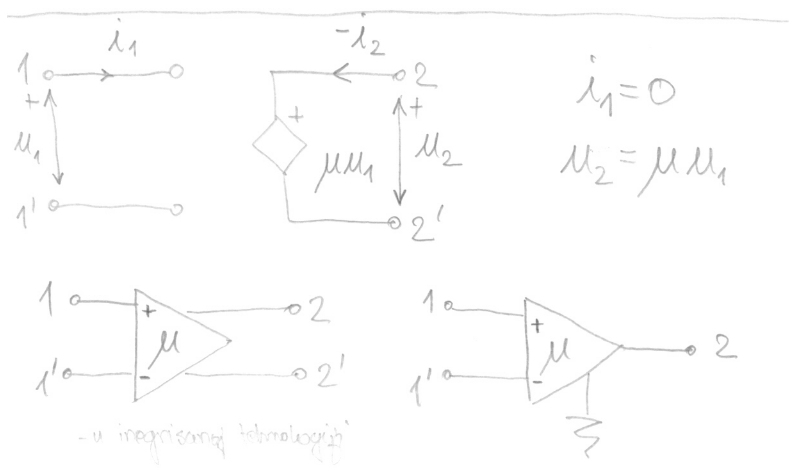
6.3.2 Naponski generator kontrolisan strujom

$$u_1 = 0 \tag{94}$$
$$u_2 = \rho i_1 \tag{95}$$

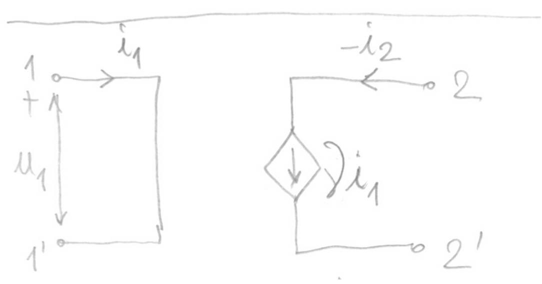
6.3.3 Naponski generator kontrolisan naponom

$$i_1 = 0 \tag{96}$$
$$u_2 = \mu u_1. \tag{97}$$

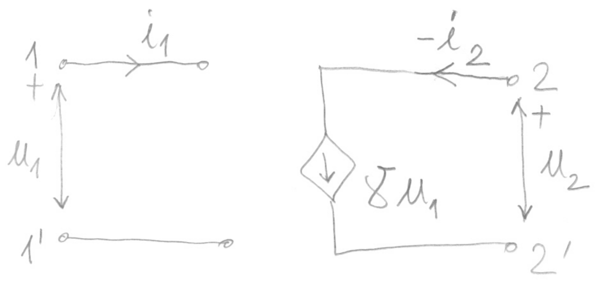
Ovaj element predstavlja idealni naponski pojačavač.



Slika 15: Naponski generator kontrolisan naponom.



Slika 16: Strujni generator kontrolisan strujom.



Slika 17: Strujni generator kontrolisan naponom.

6.3.4 Strujni generator kontrolisan strujom

$$u_1 = 0 \tag{98}$$
$$i_2 = \nu i_1. \tag{99}$$

Ovaj element predstavlja idealni strujni pojačavač. Na ovaj način je moguće modelovati bipolarni tranzistor.

6.3.5 Strujni generator kontrolisan naponom

$$i_1 = 0 \tag{100}$$
$$i_2 = \gamma i_1. \tag{101}$$

Na ovaj način je moguće modelovati FET.

6.3.6 Idealni operacioni pojačavač

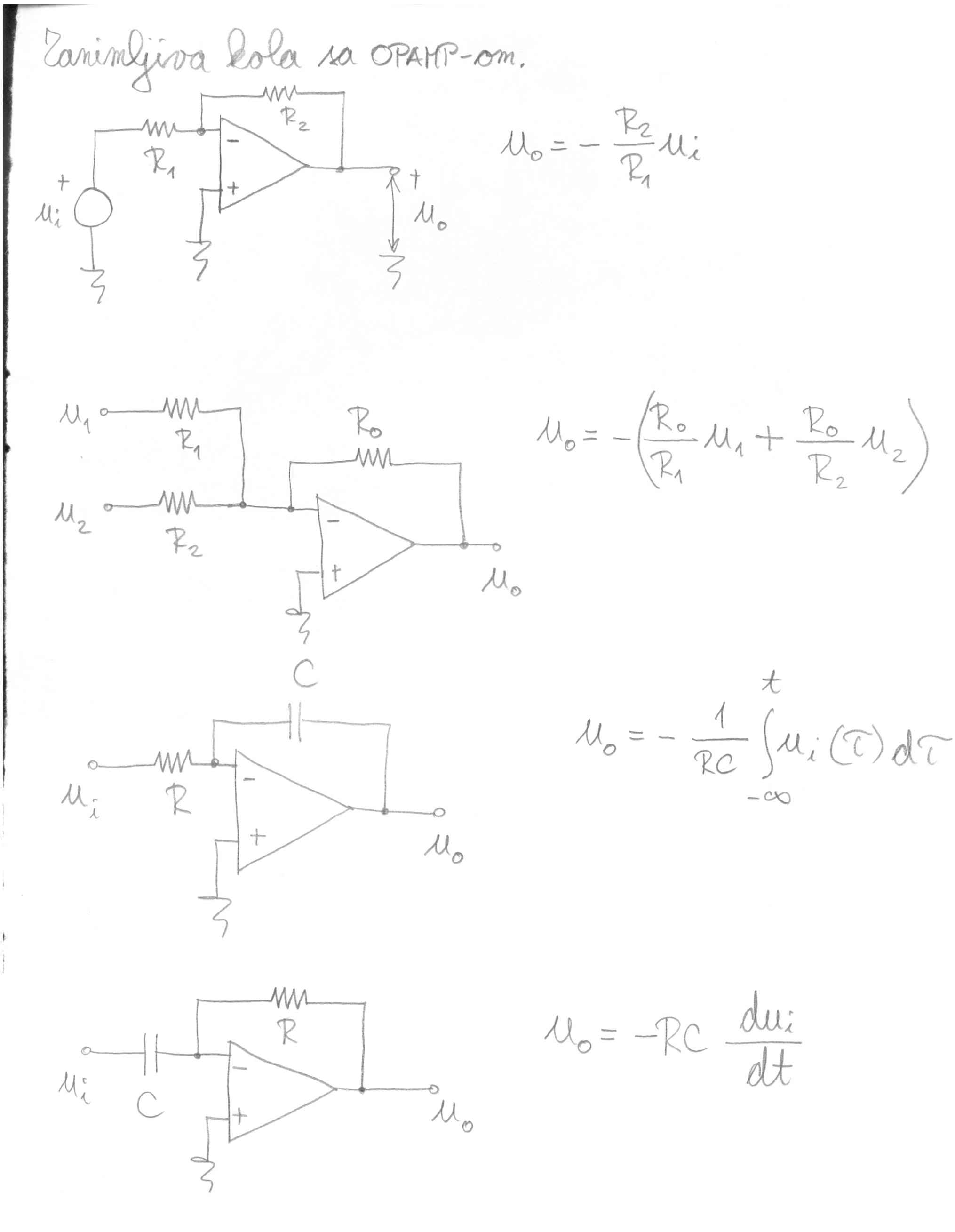
Polazeći od naponom kontrolisanog naponskog izvora moguće je doći do idealnog operacionog pojačavača. Ukoliko pojačanje naponskog pojačavača teži beskonačnosti $\mu \to \infty$, onda će i napon na ulaznom pristupu težiti nuli.

6.3.7 Idealni transformator

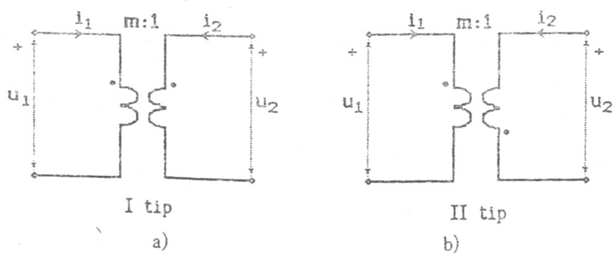
Idealni transformator je rezistivni element. Jedini parametar ovog elementa je prenosni broj transformatora m.

Karakteristika za tip I

$$u_1 = m u_2 \tag{102}$$
$$i_1 = -\frac{1}{m} i_2. \tag{103}$$



Slika 18: Zanimljiva kola sa idealnim operacionim pojačavačem.



Sl. 5.29 Uobičajeno označavanje krajeva idealnog transformatora.

Slika 19: Simbol idealnog transformatora.

Recipročan, pasivan element bez gubitaka, $p = 0$.

Osobina transformacije impedanse. Neka su izlazni krajevi idealnog transformatora zatvoreni otpornikom otpornosti R

$$u_2 = -Ri_2. \tag{104}$$

Sada je

$$u_1 = mu_2 = -mRi_2 = m^2 Ri_1.$$

Slično se može pokazati i za druge elemente.

6.3.8 Idealni žirator

Karakteristika za tip I

$$u_1 = -ri_2 \tag{105}$$

$$u_2 = ri_1. \tag{106}$$

Karakteristika za tip II

$$u_1 = ri_2 \tag{107}$$

$$u_2 = ri_1. \tag{108}$$

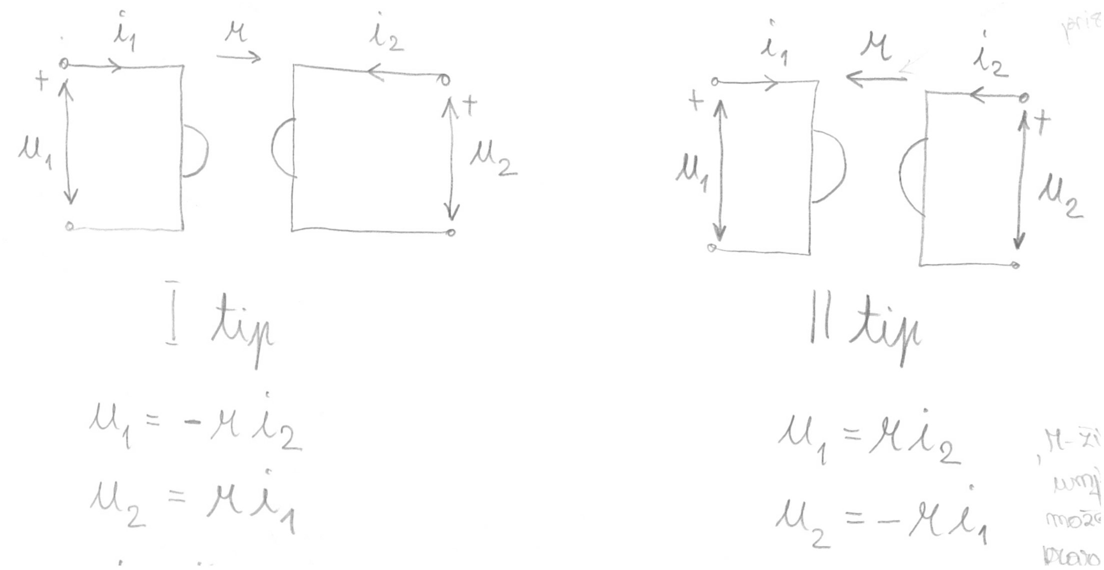
Osobina invertovanja impedanse. Neka su izlazni krajevi idealnog žiratora zatvoreni kondenzatorom kapacitivnosti C

$$i_2 = C\frac{du_2}{dt} = rC\frac{di_1}{dt}.$$

Sada je

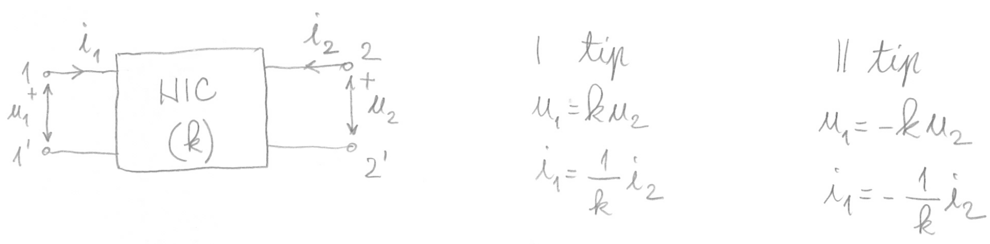
$$u_1 = ri_2 = rC\frac{du_2}{dt} = r^2 C\frac{di_1}{dt}.$$

Dakle, ekvivalentni element se ponaša kao kalem induktivnosti $L_e = r^2 C$.
Analogno $R_e = r^2 G$, $C_e = \frac{L}{r^2}$.



Slika 20: Simbol idealnog žiratora.

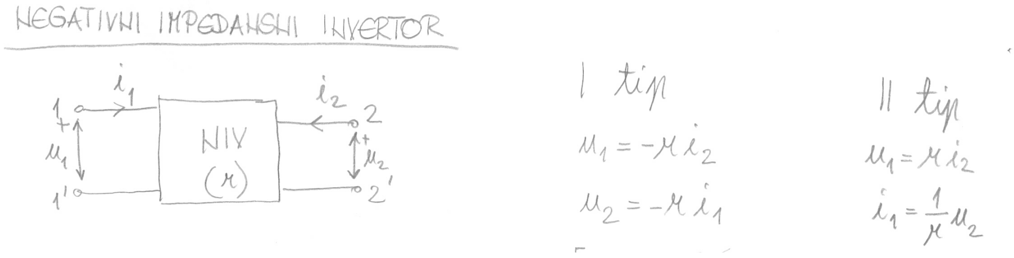
6.3.9 Negativni konvertor impedanse



Slika 21: Negativni konvertor impedanse.

Osobina konvertovanja impedanse

$$R_e = -k^2 R \tag{109}$$
$$L_e = -k^2 L \tag{110}$$
$$C_e = -\frac{C}{k^2}. \tag{111}$$



Slika 22: Negativni invertor impedanse.

6.3.10 Negativni invertor impedanse

Osobina invertovanja impedanse

$$R_e = -r^2 G \tag{112}$$
$$L_e = -r^2 C \tag{113}$$
$$C_e = -\frac{L}{r^2}. \tag{114}$$