

Određivanje odziva u električnim kolima

28. oktobar 2015

Kada se u električno kolo uključe naponski ili strujni generatori dolazi do promjene stanja kola. Na elementima kola se javljaju naponi, a kroz njihove priključne krajeve teku struje. Naponski ili strujni generatori koji djeluju u kolu se zajedničkim imenom nazivaju *pobuda (eksitacija)*, a naponi i struje u kolu se nazivaju *odziv* kola. Uspostavljanje električne struje u kolu praćeno je i drugim fizičkim pojavama kao što su emitovanje toplote, svjetlosti, mehanički rad, itd. Međutim, sa stanovišta Teorije električnih kola, odzivom kola ćemo smatrati isključivo napone i struje u kolu.

Kako bi se odredio odziv kola potrebno je formirati matematički model kola. Pored karakteristika elemenata u model kola se uključuju i modeli veza elemenata. Modeli veza elemenata su Kirhofovi zakoni za struje i napone.

1 Kirhofovi zakoni

Neka je c ukupan broj čvorova u kolu, a n broj grana u kolu. Kirhofovima zakonima izražena je veza između vrijednosti struja i napona u svakom čvoru, odnosno, svakoj grani kola, respektivno.

1.1 Kirhofov zakon za struje (KZS)

Za svaki čvor u kolu je algebarski zbir struja grana koje se stiču u tom čvoru jednak nuli u svakom trenutku

$$\sum_{l=1}^n a_{kl} i_l = 0, \quad k = 1, 2, \dots, c, \quad (1)$$

pri čemu su vrijednosti koeficijenata

$$a_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{grana } l \text{ je orijentisana od čvora } k \\ -1, & \text{grana } l \text{ je orijentisana ka čvoru } k \\ 0, & \text{grana } l \text{ nije vezana za čvor } k \end{cases} . \quad (2)$$

1.2 Kirhofov zakon za napone (KZN)

Za svaku konturu u kolu je algebarski zbir napona grana koje čine konturu jednak nuli u svakom trenutku.

$$\sum_{l=1}^n b_{kl} u_l = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

pri čemu je m broj kontura u kolu, a vrijednosti koeficijenata su

$$b_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{grana } l \text{ pripada konturi } k \text{ i orijentacije im se podudaraju} \\ -1, & \text{grana } l \text{ pripada konturi } k \text{ i orijentacije im se ne podudaraju} \\ 0, & \text{grana } l \text{ ne pripada konturi } k \end{cases} . \quad (4)$$

1.3 Telegenova teorema

U svakom kolu sa koncentrisanim parametrima zbir ulaznih snaga svih grana je jednak nuli u svakom trenutku

$$\sum_{l=1}^n p_l = \sum_{l=1}^n u_l i_l = 0. \quad (5)$$

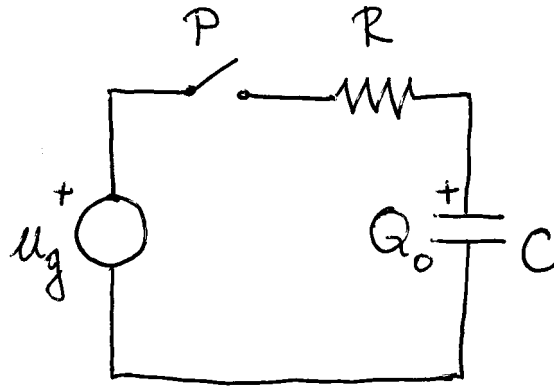
Telegenova teorema je posljedica Kirhofovih zakona i odražava zakon o održanju energije.

2 Određivanje odziva u kolima prvog reda

Kola prvog reda sadrže jedan dinamički element – kondenzator ili kalem. Da bi se pronašao odziv kola potrebno je postaviti jednačine prema Kirhofovih zakonima i jednačine kojima su opisane karakteristike elemenata. Pošto su karakteristie dinamičkih elemenata opisane diferencijalnim operatorima, onda će i jednačine kojima je opisano ponašanje kola biti diferencijalne. Određivanje odziva u kolima prvog reda razmotrićemo na nekim karakterističnim primjerima. Ukoliko ne naglasimo drugačije smatraćemo da su pasivni elementi kola linearni i vremenski nepromjenljivi.

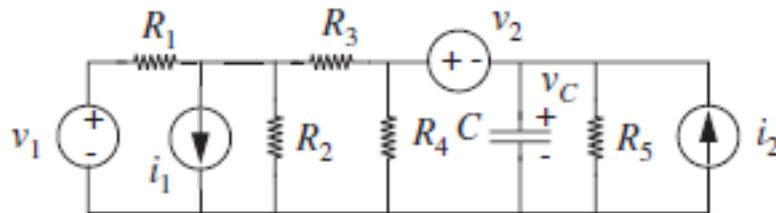
2.1 Odziv rednog RC kola na uključenje konstantne pobude

Dato je redno RC kolo na Slici 1. U kolu se nalazi samo jedan dinamički (reaktivni) element pa se radi o kolu prvog reda. Ovo kolo može biti rezultat



Slika 1: Redno RC kolo.

primjene Thevenenove teoreme na složenije kolo koje sadrži proizvoljan broj naponskih i strujnih generatora, kao i otpornika, ali samo jedan kondenzator, kao npr. na Slici 2.



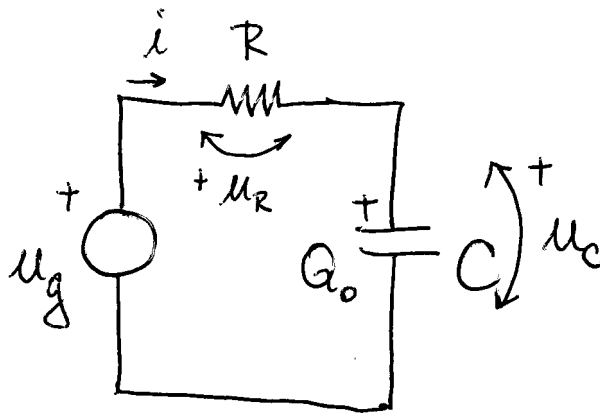
Slika 2: Složeno kolo koje je moguće transformisati u redno RC kolo.

U trenutku $t = 0$, zatvaranjem prekidača P u kolo se uključuje generator konstantnog napona $u_g(t) = U_g$. Zbog vremenske nepromjenljivosti kola, trenutak $t = 0$ može biti proizvoljno izabran. U trenutku zatvaranja prekidača kondenzator je bio opterećen količinom naelektrisanja $Q_0 = CU_0$. Drugim riječima, u kondenzatoru je bila akumulirana energija koju je određena naponom U_0 na kondenzatoru u trenutku uključivanja pobude. Ovo se može napisati u obliku

$$u_C(0^-) = U_0. \quad (6)$$

Nakon zatvaranja prekidača kolo je prikazano na Slici 3. Za ovo kolo je moguće napisati jednačinu prema KZN

$$u_R + u_C = u_g, \quad t > 0. \quad (7)$$



Slika 3: Redno RC kolo nakon zatvaranja prekidača.

Karakteristike elemenata su date sa

$$u_R = Ri \quad (8)$$

$$i = C \frac{du_C}{dt}. \quad (9)$$

Smjenom u (7) dobija se

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u_g, \quad t > 0. \quad (10)$$

Uobičajeno je da koeficijent uz izvod najvišeg reda bude jednak jedinici

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{1}{RC} u_g, \quad t > 0. \quad (11)$$

Diferencijalna jednačina (11) povezuje ulaznu u_g i izlaznu u_C veličinu u RC kolu i naziva se *relacija ulaz-izlaz* (RUI).

Dobijena diferencijalna jednačina je nehomogena linearna diferencijalna jednačina prvog reda sa konstantnim koeficijentima. Red jednačine odgovara redu kola. Jednačina je diferencijalna zato što je njome opisana linearna mreža. Vremenska nepromjenljivost mreže rezultuje jednačinom sa konstantnim koeficijentima.

Ako u (7) izrazimo u_C

$$u_C = u_g - u_R,$$

i zamijenimo u (11), nakon sređivanja dobijamo

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC} u_R = \frac{du_g}{dt}, \quad t > 0. \quad (12)$$

Analogno, ako diferenciramo (11) i imajući u vidu karakteristiku kondenzatora dobijamo

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = \frac{1}{R} \frac{du_g}{dt}, \quad t > 0. \quad (13)$$

Sve tri diferencijalne jednačine imaju slične osobine.

Riješićemo jednačinu (11). Rješenje linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima je oblika

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t), \quad t > 0, \quad (14)$$

gdje je $u_{Ch}(t)$ rješenje homogene diferencijalne jednačine, a $u_{Cp}(t)$ partikularno rješenje diferencijalne jednačine.

Homogena diferencijalna jednačina je oblika

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = 0. \quad (15)$$

To je diferencijalna jednačina kojom je opisano ponašanje kola u kojem je ne djeluje pobudni generator. Rješenje homogene diferencijalne jednačine je oblika

$$u_{Ch}(t) = Ke^{\underline{s}t}, \quad (16)$$

gdje su K i \underline{s} konstante koje treba odrediti. Pošto je (16) rješenje (15) imamo

$$\begin{aligned} \frac{d(Ke^{\underline{s}t})}{dt} + \frac{1}{RC}Ke^{\underline{s}t} &= 0 \\ K\underline{s}e^{\underline{s}t} + K\frac{1}{RC}e^{\underline{s}t} &= 0. \end{aligned}$$

Trivijalno rješenje koje se dobija za $K = 0$ nije od interesa pa slijedi da mora biti zadovoljena jednačina

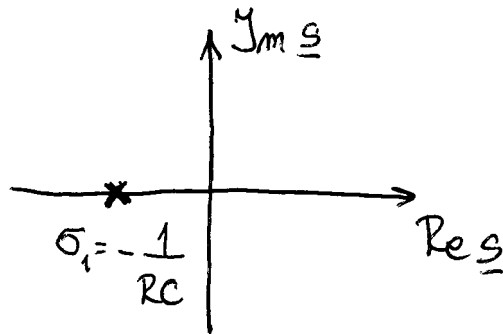
$$\underline{s} + \frac{1}{RC} = 0. \quad (17)$$

Jednačina (17) se naziva *karakteristična* jednačina diferencijalne jednačine (15). Ona je ujedno i karakteristična jednačina nehomogene diferencijalne jednačine (11). Veličina $\tau = RC$ ima prirodu vremena i naziva se *vremenska konstanta kola*. Interesantno je uočiti da se ista karakteristična jednačina dobija polazeći od bilo koje od jednačina koje opisuju ovo kolo.

Rješenje karakteristične jednačine je *karakteristična učestanost* kola

$$\underline{s} = \sigma_1 = -\frac{1}{RC}. \quad (18)$$

Pošto je karakteristična učestanost kompleksna veličina uobičajeno je da se njihov položaj predstavlja u kompleksnoj ravni. Na Slici 4 je prikazan položaj



Slika 4: Položaj sopstvene učestanosti RC kola za $R > 0$ i $C > 0$.

karakteristične učestanosti u kompleksnoj ravni za slučaj pasivnih elemenata, tj. $R > 0$ i $C > 0$.

Sada je rješenje homogene jednačine

$$u_{Ch}(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}.$$

Rješenje homogene jednačine se naziva i *sopstveni odziv* kola pošto ne zavisi od pobude već samo od osobina kola i akumulisane energije. Vrijednost konstante K ćemo odrediti kasnije.

Partikularno rješenje diferencijalne jednačine (11) se naziva i *prinudni odziv* kola jer je posljedica djelovanja pobudnog generatora. Partikularno rješenje ćemo pretpostaviti u istom obliku koji ima i pobuda za $t > 0$

$$u_{Cp} \equiv U_p = \text{const.}$$

Partikularno rješenje mora da zadovolji jednačinu (11) pa imamo

$$\frac{dU_p}{dt} + \frac{1}{RC}U_p = U_g.$$

Oдавde je partikularno rješenje

$$U_p = U_g.$$

Opšti oblik odziva kola je

$$u_C(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} + U_g, t > 0. \quad (19)$$

Da bismo odredili vrijednost konstante K iskoristićemo početni uslov za napon na kondenzatoru

$$u_C(0^-) = U_0. \quad (20)$$

Pošto je, zbog postojanja otpornika R , struja u kolu ograničena, zadovoljen je uslov teoreme o neprekidnosti napona na kondenzatoru pa je početni uslov

$$u_C(0^+) = u_C(0) = u_C(0^-). \quad (21)$$

Iz (19) imamo

$$u_C(0) = K + U_g,$$

pa je

$$K = U_0 - U_g.$$

Konačno, *kompletan odziv* RC kola na uključenje konstantne naponske pobude je

$$u_C(t) = (U_0 - U_g) e^{-\frac{t}{RC}} + U_g, \quad t \geq 0. \quad (22)$$

Ostale veličine u kolu se mogu odrediti rješavanjem odgovarajućih diferencijalnih jednačina, ali jednostavnije je da se iskoristi dobijeni izraz za u_C i jednačine (7) i (8). Iz (7) imamo

$$u_R(t) = (U_g - U_0) e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t > 0.$$

Struja u kolu je jednaka

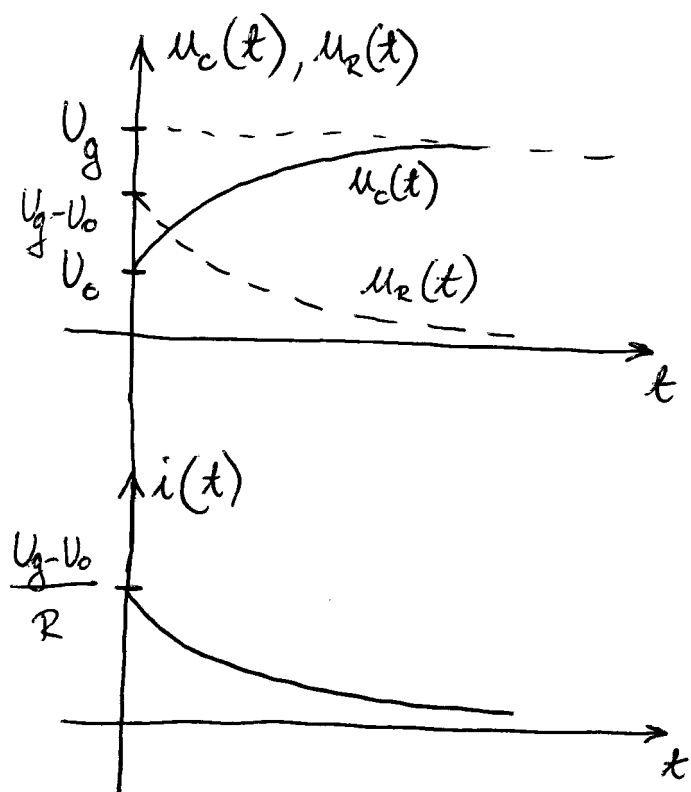
$$i(t) = \frac{(U_g - U_0)}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t > 0.$$

Dobijeni izrazi su opšti, tj. važe i za pasivna i za aktivna kola. U nastavku ćemo više pažnje posvetiti slučaju kada su elementi u kolu pasivni, tj. kada je $R > 0$ i $C > 0$. Na Slici 5 su prikazani grafici ovih veličina za slučaj kada je $U_g > U_0 > 0$, a na Slici 6 za slučaj kada je $U_0 > U_g > 0$.

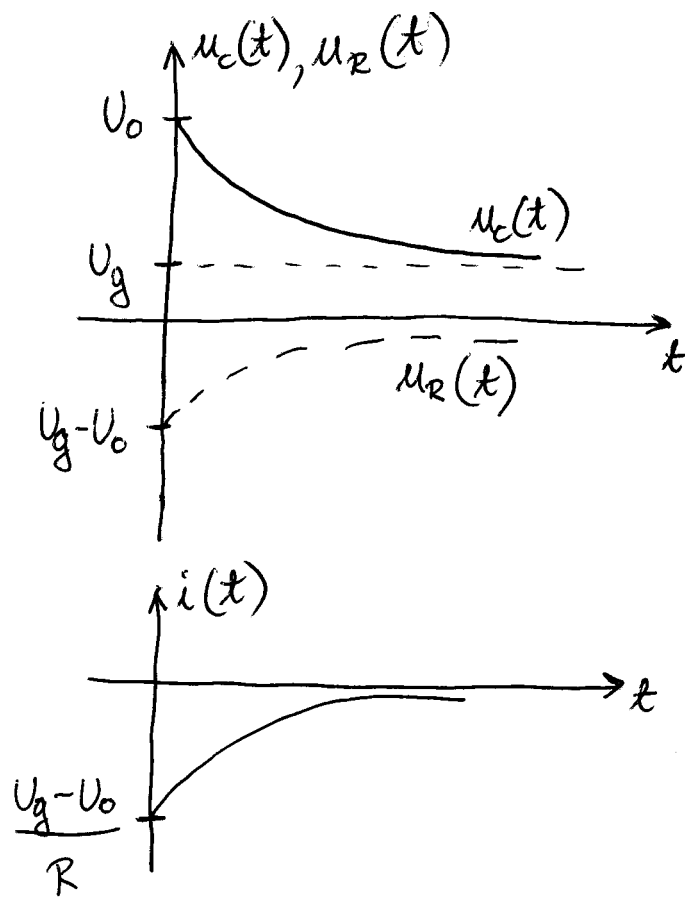
Vidimo da u pasivnom kolu, kada $t \rightarrow \infty$, napon $u_C(t)$ teži U_g , tj. odzivom kola dominira prinudni odziv. Tada je u kolu završen *prelazni režim* i uspostavljeno je *ustaljeno stanje*. Teorijski, ovo se dešava nakon beskonačno mnogov vremena, ali, sa praktičnog stanovišta, može se smatrati da je ustaljeno stanje dostignuto kada sopstveni odziv kola postane mali u odnosu na prinudni odziv. U inženjerskoj praksi uobičajeno je da se smatra da je ustaljeno stanje u kolu dostignuto kada je od uključnja pobude proteklo vrijeme jednako 3 do 5 vremenskih konstanti kola.

2.1.1 Odziv kola bez akumulisane energije

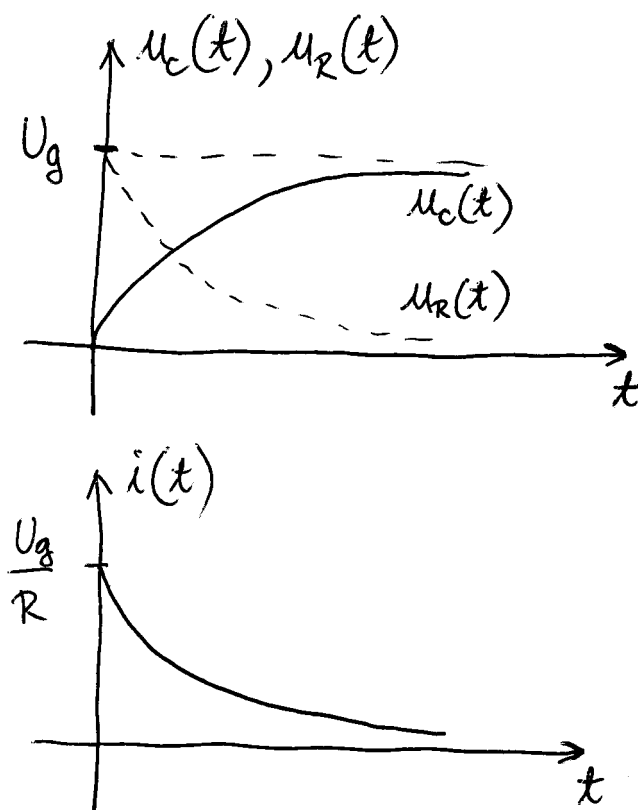
Pretpostavimo sada da u kolu nije bilo akumulisane energije i da je u trenutku $t = 0$, zatvaranjem prekidača P , u kolo uključen naponski generator.



Slika 5: Grafici odziva u pasivnom RC kolu za $U_g > U_0 > 0$.



Slika 6: Grafici odziva u pasivnom RC kolu $U_0 > U_g > 0$.



Slika 7: Odziv rednog RC kola bez akumulisane energije.

Diferencijalna jednačina kojom je opisano kolo je i u ovom slučaju (11). Jedina razlika je u tome što je sada početni uslov jednak nuli

$$u_C(0^-) = 0.$$

Postupak rješavanja diferencijalne jednačine je identičan prethodno izloženom. Iz (22) odzivi kola su

$$u_C(t) = U_g \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), \quad t \geq 0, \quad (23)$$

$$u_R(t) = U_g e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t > 0, \quad (24)$$

$$i(t) = \frac{U_g}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t > 0. \quad (25)$$

Grafici ovih veličina su prikazani na Slici 7.

Razmotrimo razmjenu energije u ovom kolu. Izlazna snaga generatora je

$$p_g(t) = u_g(t) i(t) = \frac{U_g^2}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t > 0. \quad (26)$$

Energija koju generator predaje kolu u intervalu $[0, t]$ je

$$w_g(0, t) = \int_0^t \frac{U_g^2}{R} e^{-\frac{t'}{RC}} dt' = \frac{U_g^2}{R} RC \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = CU_g^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right). \quad (27)$$

Ulazna snaga otpornika je

$$p_R(t) = u_R(t) i(t) = Ri^2(t) = \frac{U_g^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}}. \quad (28)$$

Energija koja se gubi u otporniku u intervalu $[0, t]$ je

$$w_R(0, t) = \int_0^t \frac{U_g^2}{R} e^{-\frac{2t'}{RC}} dt' = \frac{U_g^2}{R} \frac{RC}{2} \left(1 - e^{-\frac{2t}{RC}}\right) = \frac{CU_g^2}{2} \left(1 - e^{-\frac{2t}{RC}}\right). \quad (29)$$

Ulazna snaga kondenzatora je

$$p_C(t) = u_C(t) i(t) = \frac{U_g^2}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = \frac{U_g^2}{R} \left(e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{2t}{RC}}\right). \quad (30)$$

Pošto je kondenzator u $t = 0$ bio neopterećen, energija koja se akumulira u kondenzatoru je

$$w_C(0, t) = \int_0^t \frac{U_g^2}{R} \left(e^{-\frac{t'}{RC}} - e^{-\frac{2t'}{RC}}\right) dt' = \quad (31)$$

$$= CU_g^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) - \frac{CU_g^2}{2} \left(1 - e^{-\frac{2t}{RC}}\right) = \quad (32)$$

$$= \frac{CU_g^2}{2} \left(1 - 2e^{-\frac{t}{RC}} + e^{-\frac{2t}{RC}}\right) = \quad (33)$$

$$= \frac{Cu_C^2(t)}{2}. \quad (34)$$

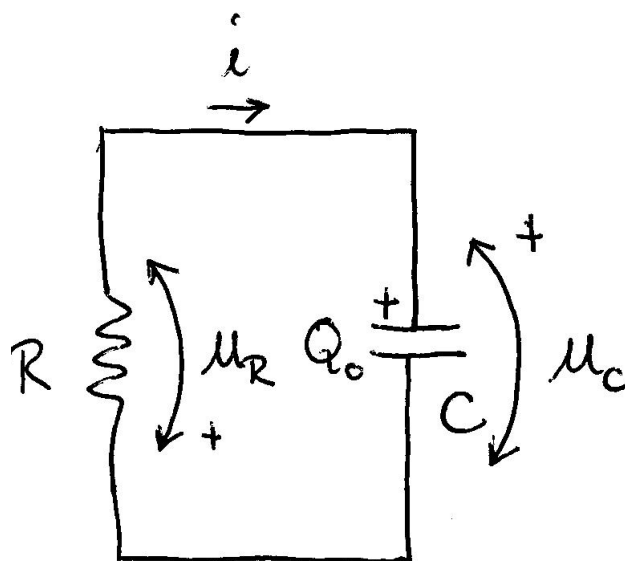
Vidimo da vrijedi

$$w_g(0, t) = w_R(0, t) + w_C(0, t), \quad t > 0, \quad (35)$$

tj. energija koju generator predaje kolu se troši na rad na uspostavljanju električnog kola u kondenzatoru i energiju koja se gubi u otporniku.

Kada $t \rightarrow \infty$, odnosno kada se završi prelazni režim, ukupna energija koja je akumulirana u kondenzatoru je jednaka

$$W_C = \frac{CU_g^2}{2}. \quad (36)$$



Slika 8: RC kolo sa akumulisanom energijom.

2.1.2 Odziv na akumulisanu energiju

Ako u kolu ne djeluje generator, ali u trenutku formiranja kola postoji akumulisana energija u kondenzatoru, pojavice se odziv kola na akumulisanu energiju. Ovaj slucaj odgovara kolu na Slici 8. Diferencijalna jednačina kojom je opisano ovo kolo može se dobiti iz (11) za $u_g(t) = 0$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = 0, t > 0. \quad (37)$$

Ova jednačina je ekvivalentna homogenoj jednačini (15). Postupak njenog rješavanja je identičan postupku rješavanja jednačine (15) s tom razlikom što se vrijednost konstante određuje odmah jer je partikularno rješenje jednako nuli. U ovom primjeru nećemo ponovo rješavati diferencijalnu jednačinu već ćemo odzive u kolu odrediti na osnovu odziva u opštem slucaju

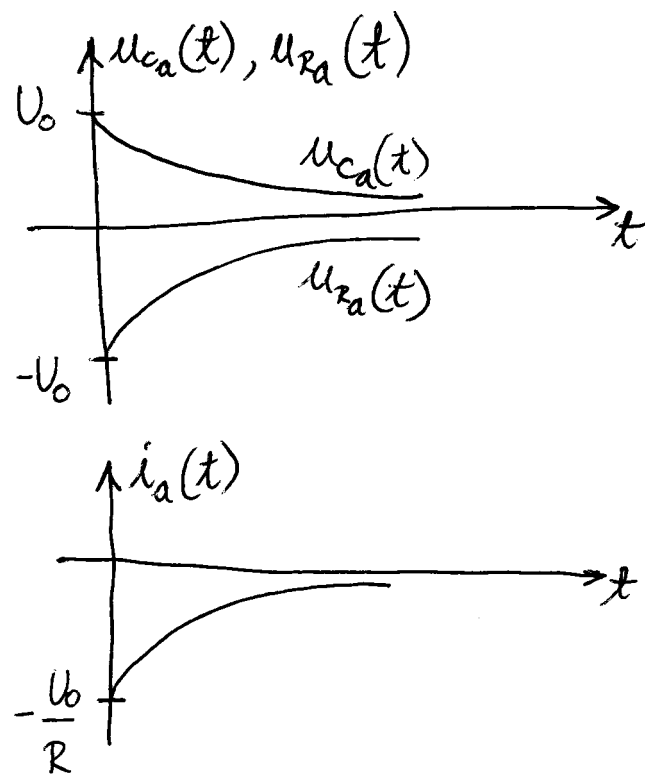
$$u_{Ca}(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}, t \geq 0, \quad (38)$$

$$u_{Ra}(t) = -U_0 e^{-\frac{t}{RC}}, t > 0, \quad (39)$$

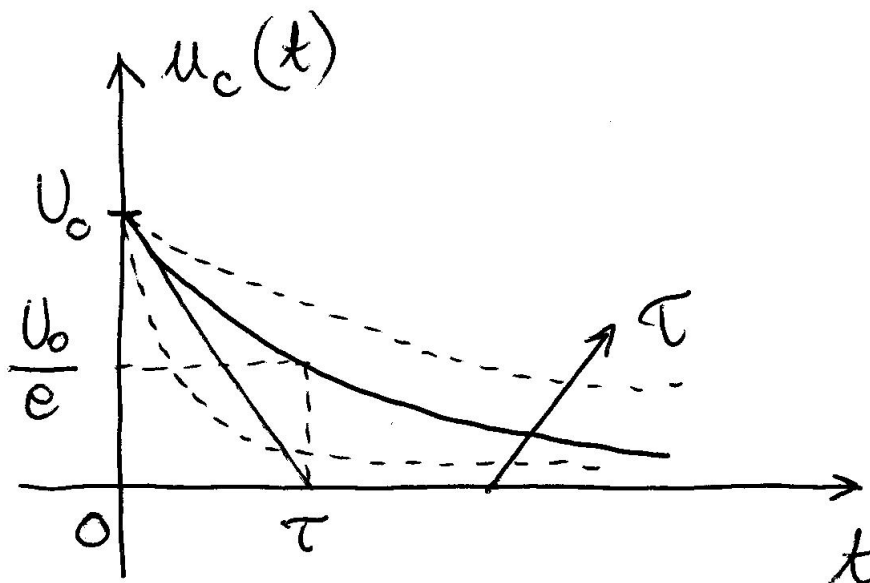
$$i_a(t) = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, t > 0, \quad (40)$$

gdje je indeksom a naznačeno da se radi o odzivu na akumulisanu energiju. Grafici ovih veličina prikazani su na Slici 9.

Na Slici su prikazani grafici napona $u_C(t)$ za različite vrijednosti vremenske konstante $\tau = RC$. Vidimo da brzina promjene napona na kondenzatoru



Slika 9: Odziv RC kola na akumulisanu energiju.



Slika 10: Grafici napona na kondenzatoru za različite vrijednosti vremenske konstante.

zavisi od vrijednosti vremenske konstante. Vrijednost vremenske konstante jednaka je dužini intervala u kojem napon na kondenzatoru padne na $\frac{1}{e}$ od svoje početne vrijednosti. To je mjesto na kojem tangenta na eksponencijalnu krivu u tački $t = 0$ siječe vremensku osu. Pošto je $e^{-3} = 0,05$, nakon tri vremenske konstante napon na kondenzatoru iznosi 5% početne vrijednosti, a nakon pet vremenskih konstanti napona na kondenzatoru je manji od 1% od početne vrijednosti, jer je $e^{-5} = 0,007$. U većini praktičnih primjena može se smatrati da je nakon pet vremenskih konstanti prelazni proces završen i da je napon na kondenzatoru dosegao svoju konačnu vrijednost.

Razmotrimo bilans energija u ovom slučaju. Energija akumulirana u kondenzatoru (energija električnog polja) iznosi

$$W_C = \frac{CU_0^2}{2}. \quad (41)$$

Ulazna snaga otpornika za $t > 0$ je

$$p_R(t) = u_{Ra}(t) i_a(t) = Ri_a^2(t) = RU_0^2 e^{-\frac{2t}{RC}}. \quad (42)$$

Energija koja se gubi na otporniku u intervalu $[0, t]$ je

$$w_R(0, t) = \int_0^t RU_0^2 e^{-\frac{2t'}{RC}} dt' = \frac{CU_0^2}{2} (1 - e^{-\frac{2t}{RC}}). \quad (43)$$

Kada $t \rightarrow \infty$ energija koja je izgubljena na otporniku iznosi

$$W_R = \frac{CU_0^2}{2} = W_C \quad (44)$$

i jednaka je energiji koja je bila akumulirana u kondenzatoru.

2.1.3 Ukupan odziv kola

Vidjeli smo da je kompletan odziv RC kola u opštem slučaju određen jednačinom (22)

$$u_C(t) = (U_0 - U_g) e^{-\frac{t}{RC}} + U_g, \quad t \geq 0. \quad (45)$$

Preuređivanjem ove jednačine

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} + U_g \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), \quad t \geq 0. \quad (46)$$

Vidimo da prvi dio kompletnog odziva odgovara odzivu na akumuliranu energiju, a drugi dio odzivu na uključenje pobude pri čemu je akumulirana energija u kolu jednaka nuli

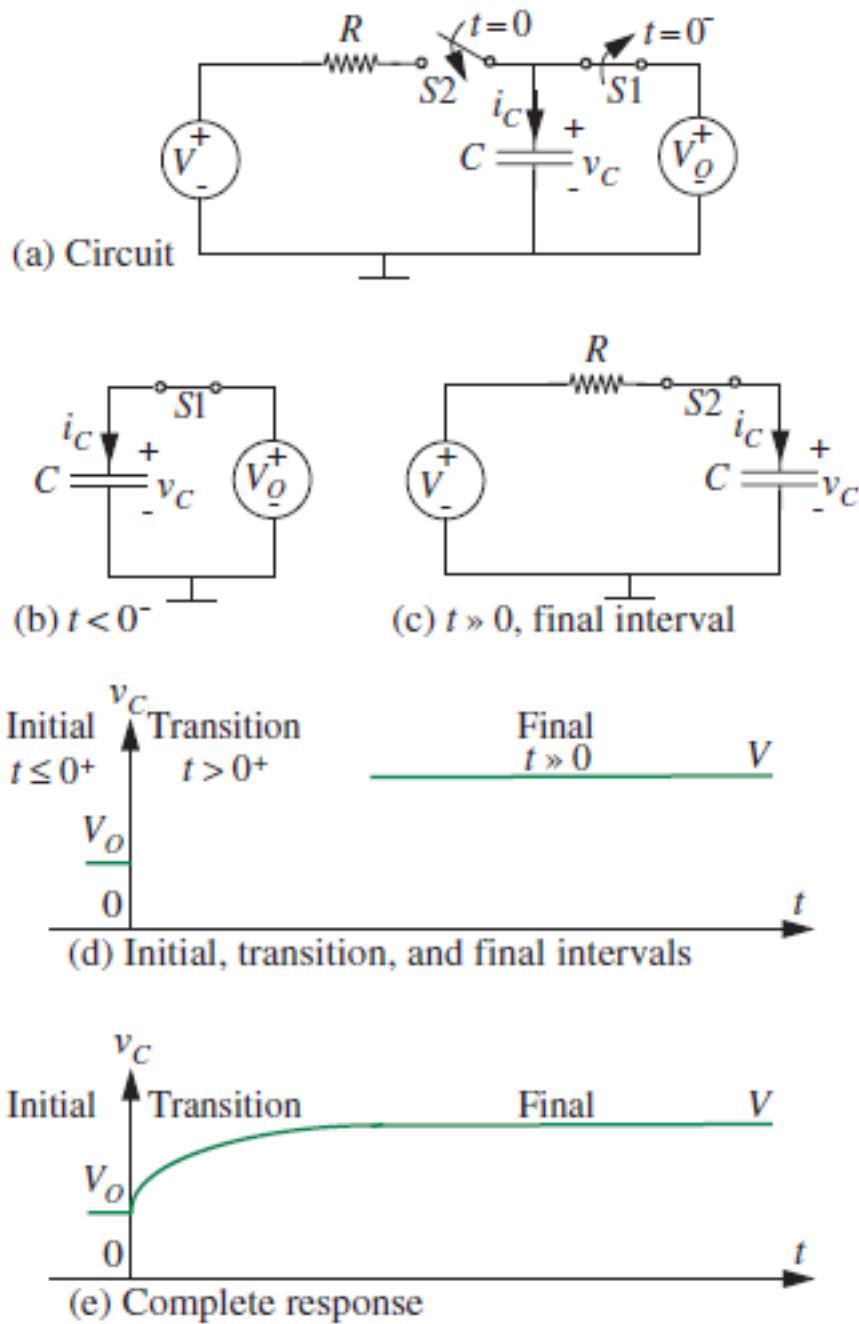
$$u_C(t) = u_{Ca}(t) + u_{Ce}(t). \quad (47)$$

Ova osobina odziva ukazuje na to da je moguće kompletan odziv linearnog kola odrediti metodom superpozicije. U tom slučaju je potrebno posebno odrediti odziv kola na akumuliranu energiju, pri isključenom generatoru, a zatim i odziv kola na uključenje pobude pri čemu je akumulirana energija u kolu jednaka nuli.

2.1.4 Intuitivna analiza

Prethodna analiza daje model za jednostavno određivanje odziva u rednom RC kolu. Posmatrajmo kolo na Slici 11. Pretpostavimo da je $U_g > U_0$. Na osnovu prethodne analize podijelićemo odziv na tri dijela: (i) početni dio, za $t \leq 0^+$, (ii) prelazni režim, za $t \geq 0^+$ i (iii) ustaljeno stanje, za $t \gg 0^+$.

U početnom dijelu odziva, za $t < 0^-$, prekidač P_1 je otvoren, a P_2 zatvoren. Napon na kondenzatoru iznosi U_0 , a struja kroz otpornik i kondenzator je jednaka nuli. Zatim se, još uvijek u početnom dijelu odziva, u trenutku $t = 0^-$ otvara prekidač P_2 . U slučaju idealnog kondenzatora napon na njemu je i dalje U_0 . Kada se u trenutku $t = 0$ zatvori prekidač P_1 u kolo se uključuje generator U_g . Pošto je napon generatora konačan i u kolu postoji otpornik R , ispunjen je uslov teoreme o neprekidnosti napona na kondenzatoru tako da je početni uslov u kolu $u_c(0^+) = U_0$.



Slika 11: Određivanje odziva u rednom RC kolu.

U ustaljenom stanju, za $t \gg 0$, u kolu je završen prelazni proces. Pošto u kolu djeluje generator konstantnog napona, kondenzator je u potpunosti napunjen i struja u kolu je jednaka nuli. U tom slučaju napon na kondenzatoru je, prema KZN, jednak U_g . U praksi možemo smatrati da je ustaljeno stanje nastalo za $t > 5RC$.

U prelaznom režimu napon na kondenzatoru se mijenja od U_0 do U_g . Zbog teoreme o neprekidnosti napona na kondenzatoru ova promjena ne može biti skokovita. Iz prethodnog odjeljka, znamo da se napon na kondenzatoru mijenja eksponencijalno sa vremenskom konstantom $\tau = RC$. Veličina može eksponencijalno da raste $(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ ili opada $e^{-\frac{t}{RC}}$. U ovom slučaju vrijednost napona eksponencijalno raste od U_0 do U_g pa je, za $t \geq 0$, oblika

$$u_C(t) = U_g + (U_0 - U_g) \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

U opštem slučaju, odziv (napon ili struja) $y(t)$, u kolu prvog reda se može odrediti kao

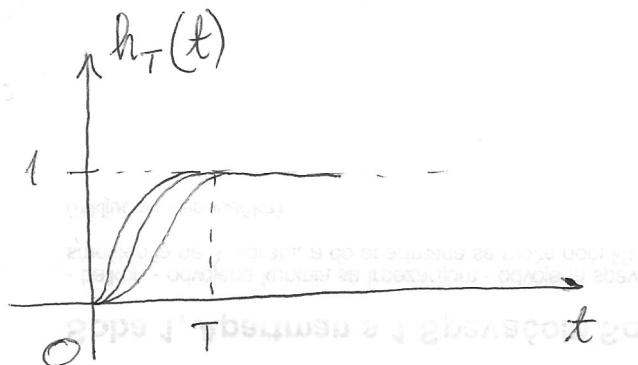
$$y(t) = y(\infty) + [y(0^+) - y(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} = \quad (48)$$

$$= y(0^+) e^{-\frac{t}{\tau}} + y(\infty) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad (49)$$

gdje su $y(0^+)$ i $y(\infty)$ početna i konačna vrijednost veličine y , respektivno, a τ je vremenska konstanta kola.

2.2 Opšti slučaj određivanja odziva u kolu prvog reda

Linearno vremenski nepromjenljivo kolo prvog reda se može opisati linearnom diferencijalnom jednačinom prvog reda sa konstantnim koeficijentima. Postupak rješavanja proizvoljne linearne diferencijalne jednačine prvog reda sa konstantnim koeficijentima prati korake opisane u slučaju određivanja odziva rednog RC kola. Dakle, opšte rješenje se traži kao zbir homogenog i partikularnog rješenja jednačine. Pretpostavljajući da homogeno rješenje ima oblik eksponencijalne funkcije i uvrštavajući u homogenu diferencijalnu jednačinu dobijamo karakterističnu jednačinu iz koje određujemo sopstvenu učestanost kola. Pretpostavljamo da je partikularno rješenje jednačine istog oblika kao pobuda i rješavamo jednačinu pod pretpostavkom da je od uključivanja pobude prošlo dovoljno vremena da se u mreži uspostavi ustaljeno stanje. Konačno, konstanta integracije se određuje iz zadatih početnih uslova.



Slika 12: Niz odskočnih funkcija.

2.3 Hevisajdova pobuda

U prethodnom odjeljku smatrali smo da se zatvaranjem prekidača u trenutku $t = 0$ u kolo uključuje naponski generator konstantnog napona. Realni element koji može trenutno prekinuti ili uspostaviti vezu u kolu ne postoji pa Hevisajdova funkcija predstavlja idealizovani model koji se može posmatrati kao granična vrijednost realnih odskočnih funkcija kao na Slici 12,

$$h(t) = \lim_{T \rightarrow 0} h_T(t), \quad (50)$$

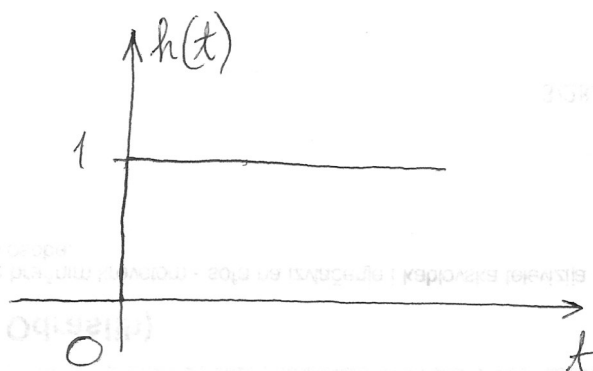
niza funkcija za koje vrijedi

$$h_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > T \end{cases}, \quad (51)$$

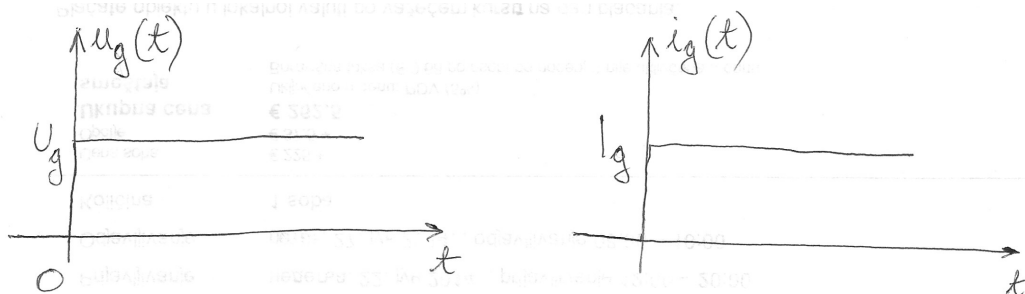
a u intervalu $0 < t < T$ funkcija je neprekidna i ima vrijednosti između 0 i 1. Međutim, ako je vrijeme uključnja T mnogo kraće od vremenske konstante kola ono se može zanemariti i smatramo da je uključenje pobude trenutno. Dakle, za Hevisajdovu funkciju $h(t)$ vrijedi

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}. \quad (52)$$

Za $t = 0$ Hevisajdova funkcija uzima sve vrijednosti između 0 i 1, čime formalno prestaje biti funkcija. Iz ovog razloga često se koristi termin *generalizovana funkcija* ili *distribucija*. Grafik Hevisajdove funkcije prikazan je na Slici 13. U literaturi se sreću i varijante Hevisajdove funkcije koje su definisane za $t = 0$.



Slika 13: Hevisajdova funkcija.



Slika 14: Hevisajdov naponski i strujni generator.

Hevisajdova funkcija je bezdimenzionalna veličina. Uključivanje naponskog generatora kao na Slici 14 se može modelovati Hevisajdovom (odskočnom) pobudom

$$u_g(t) = U_g h(t), \quad (53)$$

a uključivanje strujnog generatora

$$i_g(t) = I_g h(t). \quad (54)$$

Uključivanje generatora u trenutku $t = t_0$ se može modelovati *pomjerenom Hevisajdovom funkcijom*

$$h(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases}. \quad (55)$$

Korisno je pomenuti Hevisajdovu funkciju okrenutu u vremenu

$$h(-t) = \begin{cases} 1, & t < 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}. \quad (56)$$

Odziv kola bez akumulisane energije na Hevisajdovu pobudu podijeljen vrijednošću skoka pobude naziva se *indiciona funkcija kola*. Koristi se još i termin odskočni odziv kola. Kolo je u potpunosti karakterisano svojom indicionom funkcijom. Kasnije ćemo vidjeti da je, ukoliko je poznata indiciona funkcija, moguće odrediti odziv kola na proizvoljnu pobudu. Indiciona funkcija zavisi od veličine koja je izabrana za odziv kola.

Za redno RC kolo indiciona funkcija u odnosu na napon u_C je

$$f_{u_C}(t) = \frac{u_C(t)}{U_g} = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) h(t). \quad (57)$$

U gornjoj jednačini Hevisajdova funkcija ukazuje na činjenicu da je vrijednost indicione funkcije za $t < 0$ jednaka nuli. Pošto se odziv u kolu javlja tek kada se uključi pobuda radi se o *kauzalnom* kolu. Ako se odziv u kolu javlja prije uključivanja pobude, radi se o *nekauzalnom* kolu.

Pravougaoni impuls je funkcija koja ima nenultu vrijednost samo u intervalu (t_1, t_2) konačnog trajanja

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1 \\ 1, & t_1 < t < t_2 \\ 0, & t > t_2 \end{cases}. \quad (58)$$

Ako napon naponskog generatora ima oblik pravougaonog impulsa kao na Slici 15 on se može predstaviti pomoću Hevisajdovih funkcija

$$u(t) = U_g h(t - t_1) - U_g h(t - t_2),$$

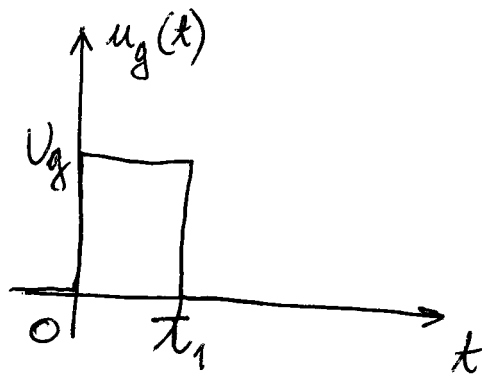
što je ilustrovano na Slici 16. U tom slučaju možemo smatrati da se kolo pobuđuje rednom vezom naponskih generatora napona $u_{g1}(t) = U_g h(t - t_1)$ i $u_{g2}(t) = U_g h(t - t_2)$ povezanih kao na Slici.

Posmatrajmo odziv rednog RC kola bez akumulisane energije na pravougaoni impuls prikazan na Slici. Ekvivalentna šema je prikazana na Slici. Pošto je kolo linearno, odziv u kolu možemo naći korištenjem teoreme superpozicije. Pretpostavimo da u kolu djeluje samo generator $u_{g1} = U_g h(t)$. Odziv je sada jednak odzivu na konstatnu pobudu koja je uključena u trenutku $t = 0$ i dat je jednačinom (23)

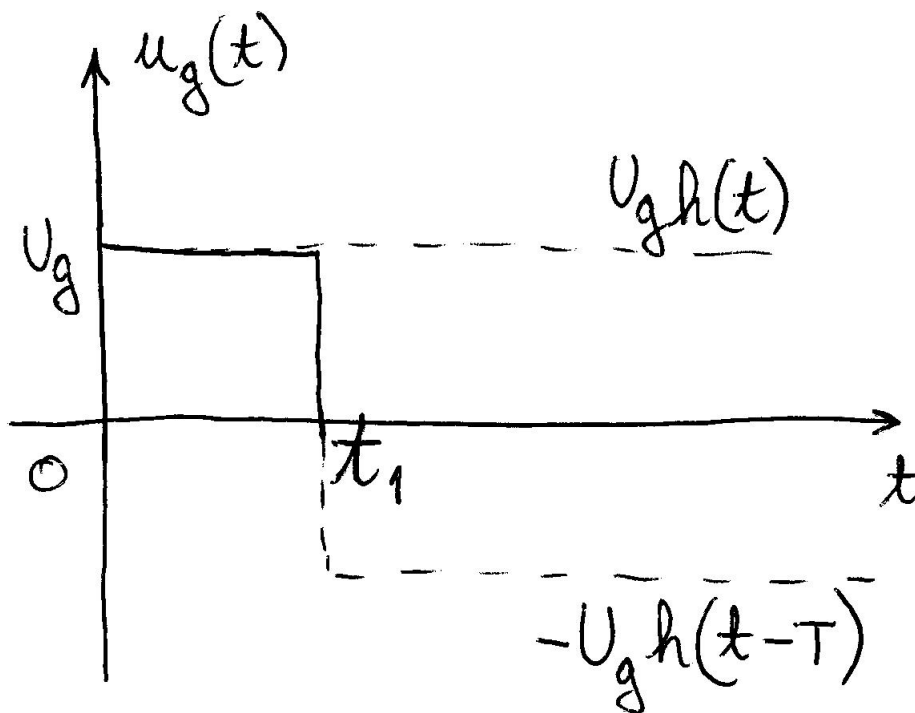
$$u_{C1}(t) = U_g \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), t \geq 0.$$

Kada u kolu djeluje samo generator $u_{g2} = -U_g h(t - t_1)$, na osnovu osobine vremenske nepromjenljivosti, odziv je jednak

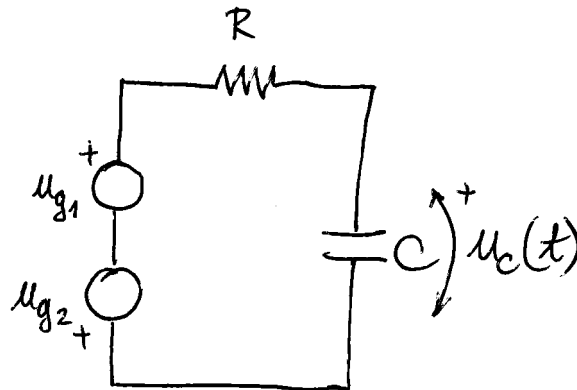
$$u_{C2}(t) = -U_g \left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{RC}}\right), t \geq t_1.$$



Slika 15: Pravougaoni impuls.



Slika 16: Reprezentacija pravougaonog impulsa pomoću Hevisajdovih pobuda.



Slika 17: Generisanje pravougaonog impulsa pomoću dva odskočna generatora.

Kompletan odziv je jednak superpoziciji ova dva odziva

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= u_{C1}(t) + u_{C2}(t) = \\
 &= \begin{cases} U_g \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), & 0 \leq t < t_1 \\ U_g \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) - U_g \left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{RC}}\right), & t \geq t_1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} U_g \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), & 0 \leq t < t_1 \\ U_g \left(e^{\frac{t_1}{RC}} - 1\right) e^{-\frac{t}{RC}}, & t \geq t_1 \end{cases} .
 \end{aligned}$$

Ovo se može napisati i u obliku

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= U_g \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) h(t) - U_g \left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{RC}}\right) h(t-t_1) = \\
 &= U_g f(t) - U_g f(t-t_1),
 \end{aligned}$$

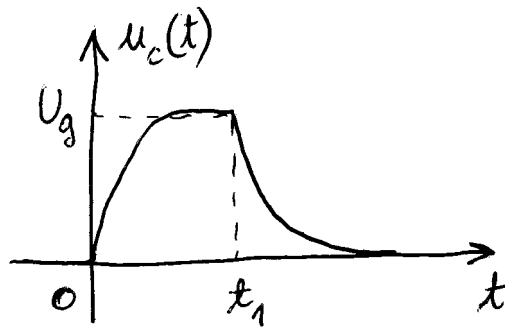
gdje je $f(t)$ indiciona funkcija kola.

Za dovoljno dugačak impuls $t_1 > 5RC$ možemo smatrati da se prelazni režim u kolu završio u toku trajanja impulsa pa odziv ima oblik kao na Slici 18. Za kraći impuls prelazni režim u kolu se ne završi već se u kolu javlja odziv na energiju akumulisanu tokom trajanja impulsa kao na Slici 19. Zanimljiv je poseban slučaj kada je $t_1 \ll RC$. Tada se drugi član u jednačini (11) može zanemariti pa imamo

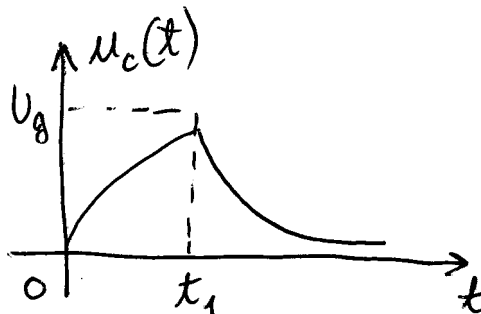
$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{RC} u_g, \quad t > 0.$$

Rješenje ove diferencijalne jednačine je

$$u_C(t) = u_C(0^+) + \frac{1}{RC} \int_0^t u_g(t') dt'.$$



Slika 18: Odziv rednog RC kola na pravougaoni impuls dužine $t_1 > 5RC$.



Slika 19: Odziv rednog RC kola na pravougaoni impuls dužine $t_1 < 3RC$.

Dakle, kolo se ponaša kao integrator i odziv je prikazan na Slici 20.

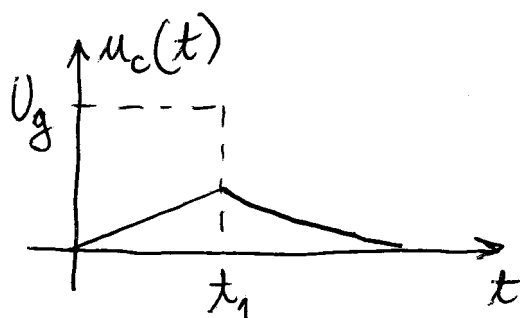
2.4 Impulsna pobuda

Kada se trajanje impulsa smanjuje, uz jednovremeno povećavanje njegove amplitude, pri čemu se površina ispod funkcije održava konstantnom, kao na Slici 21, u graničnoj vrijednosti dobija se Dirakova (jedinična impulsna, delta) funkcija $\delta(t)$. U ovom graničnom procesu, tačan oblik impulsa nije bitan. Dirakova funkcija je definisana izrazom

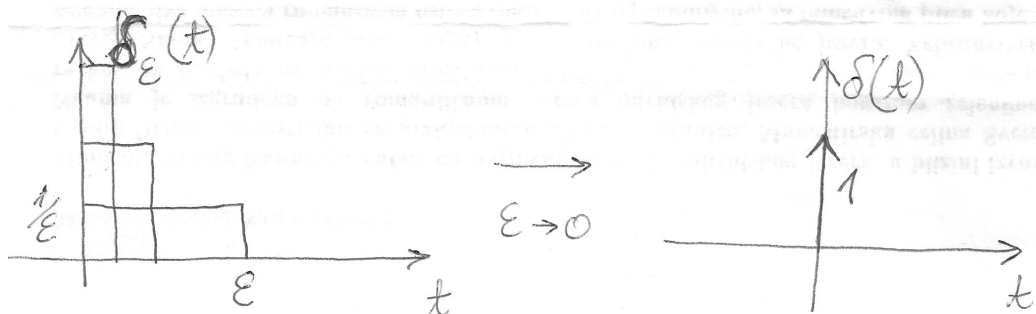
$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad (59)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Grafički se Dirakova funkcija predstavlja kao na Slici 21. Dirakova funkcija formalno nije funkcija pa se u matematici često koriste i termini *generalisana funkcija* i *distribucija*. Površina ispod Dirakove funkcije je jednaka jedinici – *jačina udara* Dirakove funkcije je jednaka jedinici. Pošto je vrijednost



Slika 20: Odziv rednog RC kola na pravougaoni impuls dužine $t_1 \ll RC$.



Slika 21: Dirakova funkcija

Dirakove funkcije nula za $t \neq 0$ onda vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1. \quad (60)$$

Neka je $f(t)$ neprekidna funkcija. Tada vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0). \quad (61)$$

Ova osobina se naziva *osobina odabiranja* Dirakove funkcije i u teoriji distribucija predstavlja definiciju Dirakove funkcije. Na osnovu osobine odabiranja Dirakove funkcije slijedi da je za funkciju $f(t)$ neprekidnu u $t = 0$

$$f(t) \delta(t) = f(0) \delta(t). \quad (62)$$

Posmatrajmo sada kratak pravougaoni impuls trajanja T i amplitude $1/T$. Ovaj impuls se može napisati u obliku

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}h(t) - \frac{1}{T}h(t - T). \quad (63)$$

Granična vrijednost niza pravougaonih impulsa kada $T \rightarrow 0$ je Dirakova funkcija

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \delta_T(t) = \quad (64)$$

$$= \lim_{T \rightarrow 0} \left[\frac{1}{T} h(t) - \frac{1}{T} h(t - T) \right] = \quad (65)$$

$$= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{h(t) - h(t - T)}{T} = \quad (66)$$

$$= \frac{dh(t)}{dt}. \quad (67)$$

Dakle, Dirakova funkcija je jednaka izvodu Hevisajdove funkcije. Vrijedi i inverzna relacija

$$h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t') dt'. \quad (68)$$

Pošto je Hevisajdova funkcija bezdimenziona veličina, Dirakova funkcija ima dimenziju frekvencije, odnosno, recipročna je vremenu.

Neka je dato kolo na Slici 22. Pretpostavimo da u kolu nema akumulisane energije i da pobudni generator ima oblik Hevisajdove funkcije $u_g(t) = Uh(t)$. Prema KZN diferencijalna jednačina kojom je opisano ovo kolo za $t > 0$ je

$$u_C = u_g.$$

U ovom slučaju napon na kondenzatoru je

$$u_C = Uh(t)$$

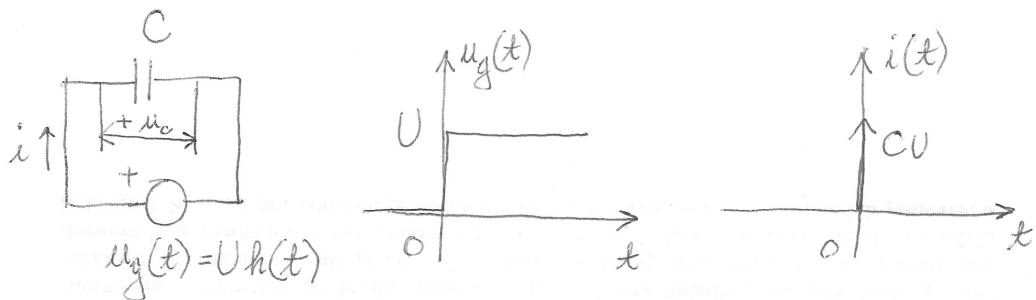
i skokovito se mijenja u trenutku $t = 0$. Struja u kolu je jednaka

$$\begin{aligned} i &= C \frac{du_C}{dt} = \\ &= C \frac{du_g}{dt} = \\ &= CU\delta(t). \end{aligned}$$

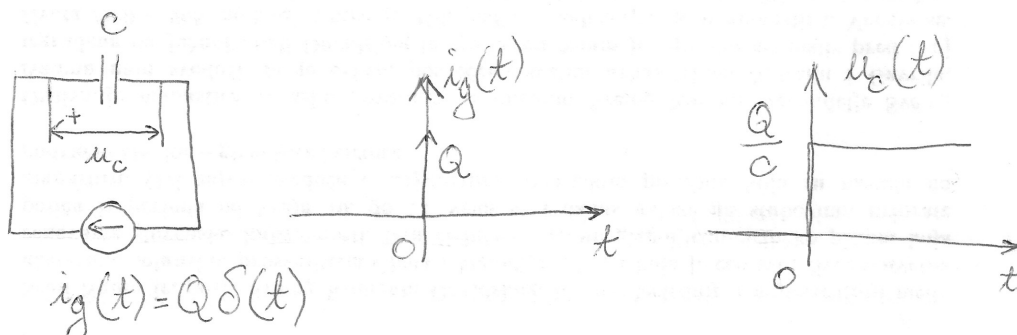
Dakle, u trenutku $t = 0$ struja je beskonačnog intenziteta pa se i napon na kondenzatoru mogao promijeniti skokovito. Količina naelektrisanja koju generator prenese kondenzatoru za $t > 0$ je jednaka $Q = CU$.

Neka se sada kolo sa kondenzatorom pobuđuje idealnim strujnim generatorom čija struja ima oblik Dirakove funkcije $i_g(t) = Q\delta(t)$, kao što je prikazano na Slici 23. Pretpostavimo da u kolu nema akumulisane energije. Jačina udara pobude jednaka je integralu pobude, odnosno,

$$\int_{-\infty}^{\infty} i_g(t') dt' = Q \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t') dt' = Q. \quad (69)$$



Slika 22: Kondenzator priključen na odskočni naponski generator.



Slika 23: Kondenzator priključen na impulsni strujni generator.

Jačina udara pobude u ovom slučaju je jednaka Q .

Pošto u kolu nema akumulisane energije, napon na kondenzatoru za $t > 0$ je

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} i_g(t') dt' = \frac{1}{C} Q \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t') dt' = \frac{1}{C} Q h(t).$$

Dakle, impulsni strujni generator jačine udara Q će prenijeti količinu naelektrisanja Q kulona kondenzatoru, uzrokujući skok napona na $\frac{Q}{C}$. Dakle, kao što slijedi iz teoreme kontinuiteta, da bi se napon na kondenzatoru skokovito promijenio, struja u kolu mora biti beskonačnog intenziteta.

Analogno vrijedi za promjenu struje kalema. Impulsni naponski generator jačine udara Φ će izazvati fluks od Φ vebera u kalem, uzrokujući skok struje na $\frac{\Phi}{L}$.

Pobudni generator čiji je napon, odnosno, struja oblika Dirakovog impulsa nije moguće realizovati. Međutim, u slučajevima kada je pobudni impuls vrlo kratkog trajanja u odnosu na vremensku konstantu kola, Dirakov impuls predstavlja koristan matematički model koji značajno pojednostavljuje analizu kola.

2.5 Određivanje odziva na impulsnu pobudu

Neka je pobuda u linearnom vremenski nepromjenljivom kolu, bez akumulisane energije, oblika

$$u_{gT}(t) = U_g T \delta_T(t) = U_g T \frac{h(t) - h(t-T)}{T}. \quad (70)$$

Već je pokazano da je u tom slučaju odziv jednak

$$u_T(t) = U_g T \delta_T(t) = U_g T \frac{f(t) - f(t-T)}{T}. \quad (71)$$

Kada $T \rightarrow 0$ uz $U_g T = \Phi = \text{const}$, pobuda teži impulsnoj funkciji $u_g(t) = U_g T \delta(t) = \Phi \delta(t)$. Zanimljivo je primjetiti da jačina udara pobude ima dimenziju proizvoda napona i vremena, odnosno fluksa. Razlog za ovo je, kao što je pomenuto u prethodnom odjeljku, što bi impulsni naponski generator izazvao fluks od Φ vebera u kalemu, odnosno, skok struje od $\frac{\Phi}{L}$. U tom slučaju odziv je

$$u(t) = \lim_{T \rightarrow 0} u_T(t) = \lim_{T \rightarrow 0} U_g \delta_T(t) = U_g T \frac{f(t) - f(t-T)}{T} = U_g T \frac{df(t)}{dt}, \quad (72)$$

odnosno,

$$u(t) = \Phi \frac{df(t)}{dt}. \quad (73)$$

Količnik odziva na impulsnu pobudu (pri nultim početnim uslovima) i jačine udara impulsne pobude naziva se *Grinova* funkcija mreže

$$g(t) = \frac{u(t)}{\Phi}, \quad (74)$$

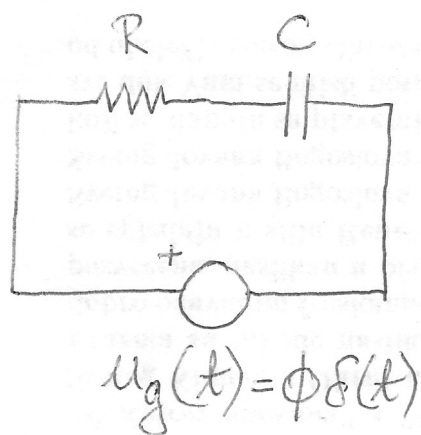
Iz (72) vidimo da je Grinova funkcija mreže jednaka izvodu njene indicione funkcije

$$g(t) = \frac{df(t)}{dt}. \quad (75)$$

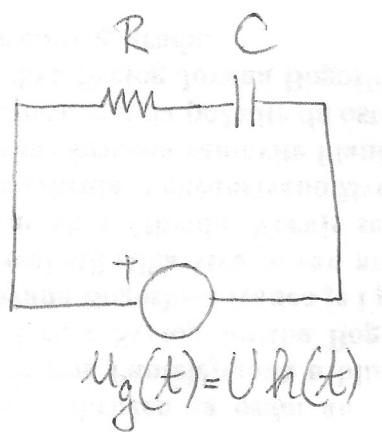
Posmatrajmo redno RC kolo prikazano na Slici 24 u kojem djeluje impulsni naponski generator napona $u_g(t) = \Phi \delta(t)$. Odredimo Grinovu funkciju ovog kola za napon na kondenzatoru.

Zadatak je moguće riješiti na više načina. Prvi način je posredno određivanje Grinove funkcije, korišćenjem indicione funkcije kola. Da bismo odredili indicionu kola, pretpostavimo da je napon naponskog generatora oblika $u_g(t) = U_g h(t)$, kao na Slici 25 i da u kolu nema akumulisane energije $u_C(0^-) = 0$. Diferencijalna jednačina za napon na kondenzatoru je

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{1}{RC} u_g, \quad t > 0.$$



Slika 24: Redno RC kolo pobuđeno impulsnim generatorom.



Slika 25: Redno RC kolo pobuđeno Hevisajdovim generatorom.

Rješenje ove jednačine je oblika

$$u_C(t) = u_C h(t) + u_C p(t).$$

Već je pokazano da je homogeno rješenje

$$u_{Ch}(t) = K e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Partikularno rješenje dobijamo posmatrajući diferencijalnu jednačinu za $t > 0$. Tada je pobuda konstantna pa i rješenje dobijamo u istom obliku

$$u_{Cp}(t) \equiv U_p = U_g.$$

Dakle, opšte rješenje je

$$u_C(t) = U_g + K e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t > 0.$$

Vrijednost konstante K dobijamo iz početnog uslova za napon $u_C(0^+)$. Pošto je, zbog konačnog skoka napona generatora i konačne vrijednosti otpornosti, struja u kolu ograničena, zadovoljen je uslov teoreme kontinuiteta i $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$. U ovom slučaju kažemo da je komutacija u kolu *regularna*. Odavde se dobija

$$K = -U_g,$$

pa je

$$u_C(t) = U_g \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) h(t).$$

Indiciona funkcija kola je

$$f(t) = \frac{u_C(t)}{U_g} = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) h(t).$$

Sada se Grinova funkcija može izračunati kao

$$g(t) = \frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} h(t) + \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \delta(t).$$

Na osnovu osobine odabiranja Dirakove funkcije drugi član sume je jednak nuli pa imamo konačno

$$g(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} h(t).$$

Zadatak je moguće riješiti i direktno, rješavanjem diferencijalne jednačine

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{\Phi}{RC} \delta(t),$$

uz početni uslov $u_C(0^-) = 0$.

Homogeno rješenje je ponovo

$$u_{Ch}(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}.$$

Pošto je pobuda jednaka nuli za $t > 0$ onda je partikularno rješenje takođe jednako nuli

$$u_{Cp}(t) = 0.$$

Dakle, opšte rješenje je

$$u_C(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}h(t).$$

Vrijednost konstante K se pronalazi iz početnih uslova. Međutim, pošto u kolu djeluje impulsni generator, vrijednost napona, a time i struje u kolu u trenutku $t = 0$ je beskonačna pa ne vrijedi teorema kontinuiteta i $u_C(0^+) \neq u_C(0^-)$. Komutacija u kolu je *neregularna*.

Uvrštavanjem opšteg rješenja u diferencijalnu jednačinu dobija se

$$-\frac{K}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}h(t) + Ke^{-\frac{t}{RC}}\delta(t) + \frac{K}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}h(t) = \frac{\Phi}{RC}\delta(t),$$

odakle slijedi

$$K = \frac{\Phi}{RC}$$

pa je Grinova funkcija

$$g(t) = \frac{u_C(t)}{\Phi} = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}h(t).$$