1 Određivanje odziva na prostoperiodičnu pobudu

1.1 Prostoperiodična pobuda

Prostoperiodične veličine predstavljamo trigonometrijskim funkcijama. Koristićemo kosinusnu funkciju, kao u primjeru

$$x\left(t\right) = X_m \cos\left(\omega t + \gamma\right). \tag{1}$$

U ovoj jednačini X_m je *amplituda*, odnosno, maksimalna vrijednost prostoperiodične veličine, ω *(kružna) učestanost/frekvencija*, a γ *početna faza* prostoperiodične veličine. *Period* prostoperiodične veličine je $T = \frac{2\pi}{\omega}$, a frekvencija $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$. Veličina $\omega t + \gamma$ je *trenutna faza* prostoperiodične veličine. Kružna učestanost je izvod trenutne faze po vremenu. Za karakterisanje prostoperiodičnih veličina često se koristi i njihove *efektivna vrijednost* (Root Mean Square – RMS)

$$X = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2\left(t\right) dt} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

Napon prostoperiodičnog naponskog generatora je oblika

$$u_g\left(t\right) = U_m \cos\left(\omega t + \theta\right) = \sqrt{2} U \cos\left(\omega t + \theta\right), \tag{3}$$

gdje su U_m i U, amplituda i efektivna vrijednost napona, respektivno. Struja prostoperiodičnog strujnog generatora je oblika

$$i_g\left(t\right) = I_m \cos\left(\omega t + \psi\right) = \sqrt{2} I \cos\left(\omega t + \psi\right), \tag{4}$$

gdje su I_m i I, amplituda i efektivna vrijednost struje, respektivno.

Fazna razlika između dvije prostoperiodične veličine jednaka je razlici njihovih trenutnih faza. Npr. fazna razlika napona i struje datih prethodnim izrazima je

$$\varphi = \left(\omega t + \theta\right) - \left(\omega t + \psi\right) = \theta - \psi. \tag{5}$$

Dakle, fazna razlika prostoperiodičnih veličina iste učestanosti ne zavisi od vremena već je u svakom trenutku jednaka razlici njihovih početnih faza. Vremenska razlika je

$$\tau = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\theta - \psi}{\omega}. \tag{6}$$

Ako je fazna razlika dvije prostoperiodične veličine nula onda su te veličine u *fazi*. Ako je fazna razlika $\varphi = \frac{\pi}{2}$, veličine su u *kvadraturi*.

Prostoperiodična pobuda koja se uključuje u kolo u trenutku $t = 0$ se može prikazati kao

$$u_g(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \theta)\, h(t), \tag{7}$$

odnosno,

$$i_g(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \psi)\, h(t). \tag{8}$$

1.2 Kompleksna eksponencijalna pobuda

Kompleksna eksponencijalna funkcija je oblika

$$\underline{x}(t) = \underline{X}_m e^{\underline{s}t}. \tag{9}$$

Veličina $\underline{X}_m = X_m e^{j\gamma}$ se naziva *kompleksna amplituda*, a $\underline{s} = \sigma + j\omega$ *kompleksna učestanost*.

Ova pobuda je povezana sa prostoperiodičnom pobudom jer je

$$\underline{x}(t) = \underline{X}_m e^{\underline{s}t} = X_m e^{\sigma t}\left[\cos(\omega t + \gamma) + j\sin(\omega t + \gamma)\right]. \tag{10}$$

Prostoperiodičnu veličinu

$$x(t) = \sqrt{2}X\cos(\omega t + \gamma), \tag{11}$$

možemo predstaviti korištenjem kompleksne eksponencijalne funkcije kao

$$x(t) = \Re\left\{\sqrt{2}\underline{X}e^{j\omega t}\right\}, \tag{12}$$

gdje je $\underline{X} = Xe^{j\gamma}$.

1.3 Određivanje odziva na prostoperiodičnu pobudu

Neka se u RC kolu prikazanom na Slici 1 bez akumulisane energije u trenutku $t = 0$ uključuje prostoperiodični generator napona

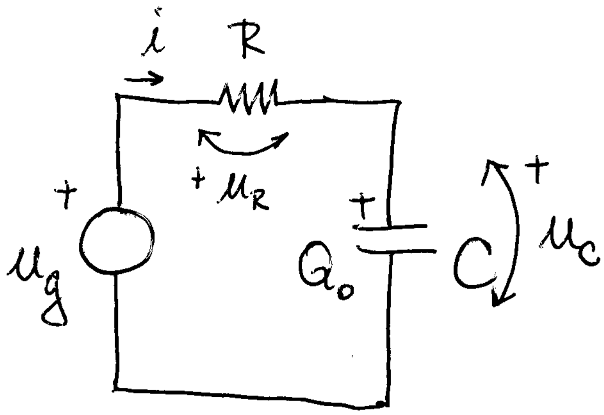
$$u_g(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \theta)\, h(t). \tag{13}$$

Diferencijalna jednačina za napon na kondenzatoru je ranije izvedena

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{1}{RC}u_g, \tag{14}$$

odnosno,

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{\sqrt{2}U}{RC}\cos(\omega t + \theta)\, h(t). \tag{15}$$



Slika 1: Redno RC kolo.

Homogeno rješenje jednačine za $t > 0$ je

$$u_{Ch}(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}. \tag{16}$$

Partikularno rješenje pretpostavljamo u istom obliku kao pobuda za $t > 0$

$$u_{Cp} = \sqrt{2}U_C \cos(\omega t + \theta_C) = \sqrt{2}U_C \cos(\omega t + \theta - \varphi), \tag{17}$$

gdje je $\varphi = \theta - \theta_C$ fazni pomak.

Uvrštavanjem u diferencijalnu jednačinu imamo

$$-\sqrt{2}\omega U_C \sin(\omega t + \theta - \varphi) + \frac{\sqrt{2}U_C}{RC}\cos(\omega t + \theta - \varphi) = \frac{\sqrt{2}U}{RC}\cos(\omega t + \theta), \tag{18}$$

odnosno,

$$\begin{aligned} -\omega U_C \sin(\omega t + \theta)\cos\varphi + \omega U_C \cos(\omega t + \theta)\sin\varphi + \\ + \frac{U_C}{RC}\cos(\omega t + \theta)\cos\varphi + \frac{U_C}{RC}\sin(\omega t + \theta)\sin\varphi = \\ = \frac{U}{RC}\cos(\omega t + \theta). \end{aligned} \tag{19}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz $\cos(\omega t + \theta)$ i $\sin(\omega t + \theta)$ dobijamo

$$-\omega U_C \cos\varphi + \frac{U_C}{RC}\sin\varphi = 0 \tag{20}$$

$$\omega U_C \sin\varphi + \frac{U_C}{RC}\cos\varphi = \frac{U}{RC}. \tag{21}$$

Iz prve jednačine se dobija

$$\varphi = \operatorname{arctg}\omega RC. \tag{22}$$

Kvadriranjem i sabiranjem jednačina se dobija

$$U_C = \frac{\frac{U}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}. \tag{23}$$

Partikularno rješenje je, dakle,

$$u_{Cp}(t) = \sqrt{2}\frac{U}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t + \theta - \varphi). \tag{24}$$

Kompletan odziv je sada

$$u_C(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} + \sqrt{2}\frac{U}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t + \theta - \varphi). \tag{25}$$

Konstantu integracije pronalazimo iz početnog uslova $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$

$$K + \sqrt{2}\frac{U}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\theta - \varphi) = 0, \tag{26}$$

pa je

$$K = -\sqrt{2}\frac{U}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\theta - \varphi). \tag{27}$$

Konačno, kompletan odziv je

$$\begin{aligned} u_C(t) = {} & -\sqrt{2}\frac{U}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\theta - \varphi)\, e^{-\frac{t}{RC}} + \\ & + \sqrt{2}\frac{U}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t + \theta - \varphi). \end{aligned} \tag{28}$$

Grafik napona na kondenzatoru je prikazan na Slici. Vidimo da nakon dovoljno dugog vremena sopstveni odziv kola iščezava i odziv kola je određen samo prinudnim odzivom.

Opisani način za određivanje partikularnog odziva je vrlo dugotrajan i podložan greškama. Elegantniji način za određivanje partikularnog odziva je zasnovan na korištenju kompleksnih predstavnika prostoperiodičnih veličina.

Kako bismo odredili prinudni odziv kola za $t > 0$ posmatrali smo pobudu u obliku

$$u_g(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \theta). \tag{29}$$

Korištenjem kompleksnih eksponencijalnih funkcija, pobuda se može napisati u obliku

$$\begin{aligned} u_g(t) &= \Re\left\{\sqrt{2}Ue^{j(\omega t+\theta)}\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}Ue^{j(\omega t+\theta)} + \sqrt{2}Ue^{-j(\omega t+\theta)}\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}Ue^{j\theta}e^{j\omega t} + \sqrt{2}Ue^{-j\theta}e^{-j\omega t}\right] = \\ &= \underline{u}_{g1}(t) + \underline{u}_{g2}(t), \end{aligned} \tag{30}$$

gdje je

$$\underline{u}_{g1}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{U}e^{j\omega t}, \tag{31}$$

$$\underline{U} = Ue^{j\theta}, \tag{32}$$

$$\underline{u}_{g2}(t) = \underline{u}^*_{g1}(t). \tag{33}$$

Prinudni odziv se sada može računati primjenom teoreme superpozicije

$$u_{Cp}(t) = \underline{u}_{Cp1}(t) + \underline{u}_{Cp2}(t) = \Re\left\{\sqrt{2}\underline{U}_C e^{j\omega t}\right\}, \tag{34}$$

pri čemu je

$$\underline{u}_{Cp1}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{U}_C e^{j\omega t}, \tag{35}$$

$$\underline{U}_C = U_C e^{j\theta_C}, \tag{36}$$

$$\underline{u}_{Cp2}(t) = \underline{u}^*_{Cp1}(t). \tag{37}$$

Odziv, $\underline{u}_{Cp1}(t)$ na $\underline{u}_{g1}(t)$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\underline{U}_C j\omega e^{j\omega t} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{RC}\underline{U}_C e^{j\omega t} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{RC}\underline{U}e^{j\omega t}. \tag{38}$$

Da bi jednačina bila zadovojena za svako $t > 0$, imajući u vidu da za konačnu vrijednost t eksponencijalni član ne može biti jednak nuli dobijamo algebarsku jednačinu

$$j\omega\underline{U}_C + \frac{1}{RC}\underline{U}_C = \frac{1}{RC}\underline{U}. \tag{39}$$

Njenim rješavanjem određujemo kompleksni napon $\underline{U}_C$

$$\underline{U}_C = \frac{\frac{1}{RC}\underline{U}_C}{j\omega + \frac{1}{RC}} = \frac{\underline{U}}{1 + j\omega RC}. \tag{40}$$

Prinudni odziv je

$$\begin{aligned} u_{Cp}(t) &= \Re\left\{\sqrt{2}\frac{\underline{U}}{1+j\omega RC}e^{j\omega t}\right\} = \\ &= \Re\left\{\sqrt{2}\frac{U}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}e^{j(\theta-\varphi)}\right\} = \\ &= \sqrt{2}\frac{U}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos(\omega t+\theta-\varphi), \end{aligned} \tag{41}$$

gdje je $\varphi = \operatorname{arctg}\omega RC$. Vidimo da je dobijeni rezultat identičan rezultatu dobijenom direktnim rješavanjem.

Određivanje prinudnog odziva kola na prostoperiodičnu pobudu može se dodatno pojednostavniti korištenjem nekoliko jednostavnih pravila. Za kompleksni napon $\underline{U}$ kažemo da je kompleksni predstavnik napona $u(t) = \Re\left\{\sqrt{2}\underline{U}e^{j\omega t}\right\}$ i pišemo

$$u \leftrightarrow \underline{U}. \tag{42}$$

Za kompleksne predstavnike vrijedi *pravilo linearnosti.* Ako je

$$u_1 \leftrightarrow \underline{U}_1, \tag{43}$$

$$u_2 \leftrightarrow \underline{U}_2, \tag{44}$$

onda je

$$k_1u_1 + k_2u_2 \leftrightarrow k_1\underline{U}_1 + k_2\underline{U}_2, \tag{45}$$

za svako k_1 i k_2. Ovo pravilo slijedi iz linearnosti operatora određivanja realnog dijela kompleksnog broja.

Pravilo izvoda. Ako je

$$u \leftrightarrow \underline{U}, \tag{46}$$

onda je

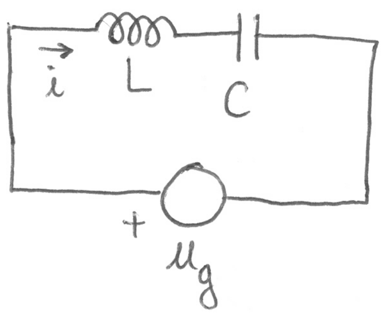
$$\frac{du}{dt} \leftrightarrow j\omega\underline{U}. \tag{47}$$

Pravilo integrala. Ako je

$$u \leftrightarrow \underline{U}, \tag{48}$$

onda je

$$\int_{-\infty}^{t} u(t')\,dt' \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}\underline{U}. \tag{49}$$



Slika 2: Redno LC kolo.

Sada su karakteristike osnovnih elemenata kola

$$u_R = Ri_R \leftrightarrow \underline{U}_R = R\underline{I}_R, \tag{50}$$

$$u_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} u_C\left(t'\right)dt' \leftrightarrow \underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\underline{U}_C, \tag{51}$$

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} \leftrightarrow \underline{U}_L = j\omega L. \tag{52}$$

Demonstriraćemo korištenje ovih pravila na određivanju odziva u rednom LC kolu prikazanom na Slici 2. U kolu djeluje prostoperiodični generator napona $u_g\left(t\right) = \sqrt{2}U_g \cos\left(\omega t + \theta\right) h\left(t\right)$. U trenutku $t = 0$ u kolu nije bilo akumulisane energije.

Neka su kompleksni predstavnici napona generatora i napona na kondenzatoru u kolu

$$\begin{aligned} u_g &\leftrightarrow \underline{U}_g, \\ i &\leftrightarrow \underline{I}. \end{aligned}$$

Na osnovu KZN i pravila koja vrijede za kompleksne predstavnike imamo

$$j\omega L\underline{I} + \frac{1}{j\omega C}\underline{I} = \underline{U}_g.$$

Odavde je

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_g}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}},$$

pa je partikularni odziv

$$i_p\left(t\right) = \sqrt{2}\frac{U_g}{Z}\cos\left(\omega t + \theta + \pi/2\right),$$

gdje je $Z = \omega L - \frac{1}{\omega C}$. Naravno, ovaj rezultat važi pod uslovom da je $Z \neq 0$, odnosno, $\omega \neq \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Razmotrimo detaljnije slučaj kada ovaj uslov nije ispunjen, tj. kada je $\omega^2 = \frac{1}{LC}$. Diferencijalna jednačina kojom je opisano ovo kolo je

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{L} \frac{du_g}{dt}.$$

Karakteristična jednačina je oblika

$$\underline{s}^2 + \frac{1}{LC} = 0,$$

a sopstvene učestanosti su imaginarne

$$\underline{s}_{1,2} = \pm j \frac{1}{LC} = \pm j \omega_0.$$

Homogeno rješenje jednačine je

$$i_h\left(t\right) = K_1 \cos \omega_0 t + K_2 \sin \omega_0 t.$$

Dakle, ako je učestanost pobude različita od sopstvene učestanosti mreže, kompletan odziv je jednak

$$i\left(t\right) = \left[K_1 \cos \omega_0 t + K_2 \sin \omega_0 t + \sqrt{2} \frac{U_g}{Z} \cos\left(\omega t + \theta + \pi/2\right)\right] h\left(t\right).$$

Integracione konstante su

$$\begin{aligned} K_1 &= -\frac{\sqrt{2} U_g}{Z} \sin \theta, \\ K_2 &= \frac{\sqrt{2} \omega U_g \cos \theta}{\omega_0} \left(\frac{1}{\omega L} - \frac{1}{Z}\right) = -\frac{\sqrt{2} \omega_0 U_g}{\omega Z} \cos \theta. \end{aligned}$$

Jednostavnosti radi, ako je početna faza pobudnog napona jednaka nuli $\theta = 0$, struja u kolu je

$$\begin{aligned} i\left(t\right) &= \left[-\frac{\sqrt{2} \omega_0 U_g}{\omega Z} \sin \omega_0 t + \frac{\sqrt{2} U_g}{Z} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right] h\left(t\right) = \\ &= \frac{\sqrt{2} U_g}{Z} \left(-\frac{\omega_0}{\omega} \sin \omega_0 t + \sin \omega t\right) h\left(t\right). \end{aligned}$$

Grafik struje u kolu u ovom slučaju prikazan je na Slici.

Ako je $\omega = \omega_0$ gornji izraz je neodređen. U slučaju kada je učestanost pobude jednaka sopstvenoj učestanosti mreže, partikularno rješenje je oblika

$$i_p(t) = K_1 t \cos\omega_0 t + K_2 t \sin\omega_0 t. \tag{53}$$

U ovom slučaju, nažalost, ne možemo koristiti kompleksne predstavnike za određivanje partikularnog odziva zato što on nije prostoperiodična funkcija. Do rezultata se, u ovom slučaju, može doći primjenom L'Hospitalovog pravila na izraz za struju u kolu. Diferenciranjem po ω dobijamo

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}U_g}{2\omega_0 L}\left(\sin\omega_0 t + \omega_0 t \cos\omega_0 t\right).$$

Grafik struje u kolu u ovom slučaju prikazan je na Slici.

1.4 Kompleksna funkcija mreže

Iz prethodnih primjera dolazimo do zaključka da će, kada se kolo pobuđuje prostoperiodičnim generatorom, prinudni odziv u kolu biti prostoperiodičan sa istom učestanošću kao i pobuda, dok će njegova amplituda i faza zavisiti od učestanosti pobudnog generatora. Neka se kolo pobuđuje kompleksnim prostoperiodičnim generatorom oblika

$$\underline{x}(t) = \underline{X}_m e^{j\omega t}. \tag{54}$$

Prinudni odziv u tom slučaju je oblika

$$\underline{y}_p(t) = \underline{Y}_m e^{j\omega t}. \tag{55}$$

Kompleksna funkcija mreže je količnik prinudnog odziva na kompleksnu prostoperiodičnu pobudu i kompleksne prostoperiodične pobude

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{y}_p(t)}{\underline{x}(t)} = \frac{\underline{Y}_m e^{j\omega t}}{\underline{X}_m e^{j\omega t}} = \frac{\underline{Y}_m}{\underline{X}_m}. \tag{56}$$

Pošto kompleksna funkcija mreže karakteriše prinudni odziv kola u zavisnosti od frekvencije pobudnog signala, koristi se i termin *frekvencijska karakteristika kola.*

Za RC kolo kompleksna funkcija mreže u odnosu na napon na kondenzatoru je oblika

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{U}_C}{\underline{U}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}. \tag{57}$$

Ako kompleksnu funkciju mreže prikažemo u polarnom obliku

$$\underline{G}(j\omega) = G(j\omega)\, e^{j\Phi(\omega)}, \tag{58}$$

gdje su

$$G(j\omega) = |\underline{G}(j\omega)||, \tag{59}$$

i

$$\Phi(\omega) = \arg \underline{G}(j\omega), \tag{60}$$

vidimo da njen moduo određuje amplitudu izlaznog signala pa se naziva *amplitudna karakteristika mreže*, a argument utiče na fazu izlaznog signala pa se naziva *fazna karakteristika mreže.*

Amplidutna i fazna karakteristika rednog RC kola su

$$G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \tag{61}$$

$$\Phi(j\omega) = -\operatorname{arctg} \omega RC \tag{62}$$

i prikazane su na Slici.

1.5 Generalisana kompleksna funkcija mreže

Ako kompleksna frekvencija pobudnog generatora ima i realni dio, tj. ako je oblika kompleksne eksponencijalne pobude

$$\underline{x}(t) = \underline{X}_m e^{\underline{s}t}, \tag{63}$$

gdje je

$$\underline{s} = \sigma + j\omega, \tag{64}$$

prinudni odziv će biti oblika

$$\underline{y}_p(t) = \underline{Y}_m e^{\underline{s}t}. \tag{65}$$

Generalisana kompleksna funkcija mreže je količnik prinudnog odziva na kompleksnu eksponencijalnu pobudu i kompleksne eksponencijalne pobude

$$\underline{G}(\underline{s}) = \frac{\underline{y}_p(t)}{\underline{x}(t)} = \frac{\underline{Y}_m e^{\underline{s}t}}{\underline{X}_m e^{\underline{s}t}} = \frac{\underline{Y}_m}{\underline{X}_m}. \tag{66}$$

Za generalisanu kompleksnu funkciju mreže koristi se i termin *funkcija prenosa mreže.*

Generalisana kompleksna funkcija rednog RC kola je

$$\underline{G}(\underline{s}) = \frac{1}{1 + \underline{s}RC}. \tag{67}$$

Kompleksna funkcija mreže je specijalni slučaj generalisane kompleksne funkcije mreže za $\underline{s} = j\omega$

$$\underline{G}(j\omega) = \underline{G}(\underline{s})|_{\underline{s}=j\omega}. \tag{68}$$