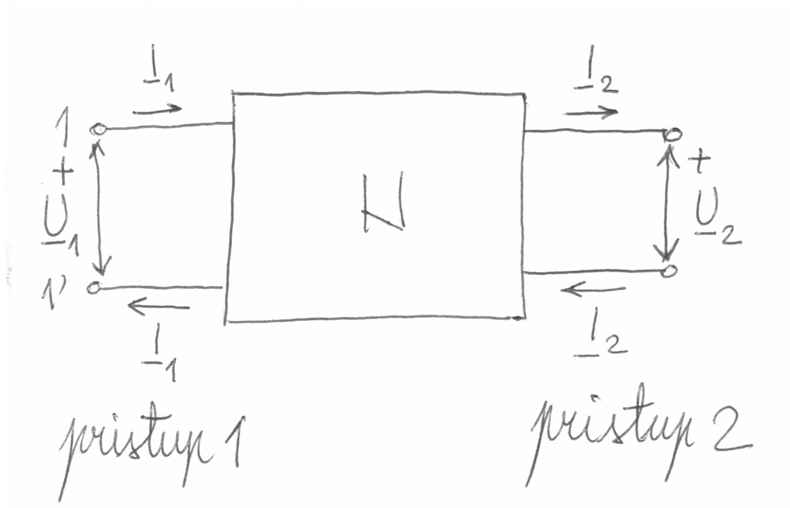
Mreže sa dva pristupa

18. novembar 2015

Mreža sa dva pristupa je električna mreža sa dva para priključaka kojima se povezuje sa drugim mrežama (kolima), Slika 1. Dva priključka čine pristup ako je struja kroz jedan priključak jednaka struji kroz drugog priključka, ali su im smjerovi suprotni. Često se jedan pristup smatra ulaznim, a drugi izlaznim pristupom.

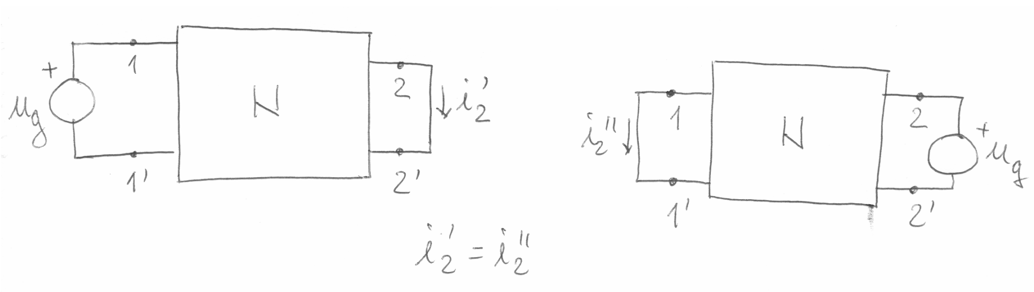


Slika 1: Mreža sa dva pristupa.

Mreže sa dva pristupa se u Teoriji električnih kola koriste za modelovanje dijelova električnih mreža u slučajevima kada nisu od značaja vrijednosti struja i napona unutar mreže sa dva pristupa, već samo na njenim pristupima. Električni filtri, tranzistori, operacioni pojačavači, transformatori, itd. predstavljaju primjere mreža sa dva pristupa.

Mreže sa dva pristupa mogu biti pasivne i aktivne. Ako je ulazna snaga mreže u svakom trenutku nenegativna, mreža je pasivna. Ako je ulazna snaga mreže jednaka nuli, mreža je bez gubitaka. Mreža koja nije pasivna, naziva se aktivna. Svaka linearna mreža sa četiri priključka, bez nezavisnih generatora, za koju su zadovoljeni uslovi jednakosti struje kroz priključke može se posmatrati kao pasivna mreža sa dva pristupa. Ukoliko mreža sadrži nezavisne generatore ona je aktivna. Posmatraćemo linearne, vremenski nepromjenljive pasivne mreže sa dva pristupa u ustaljenom prostoperiodičnom režimu.

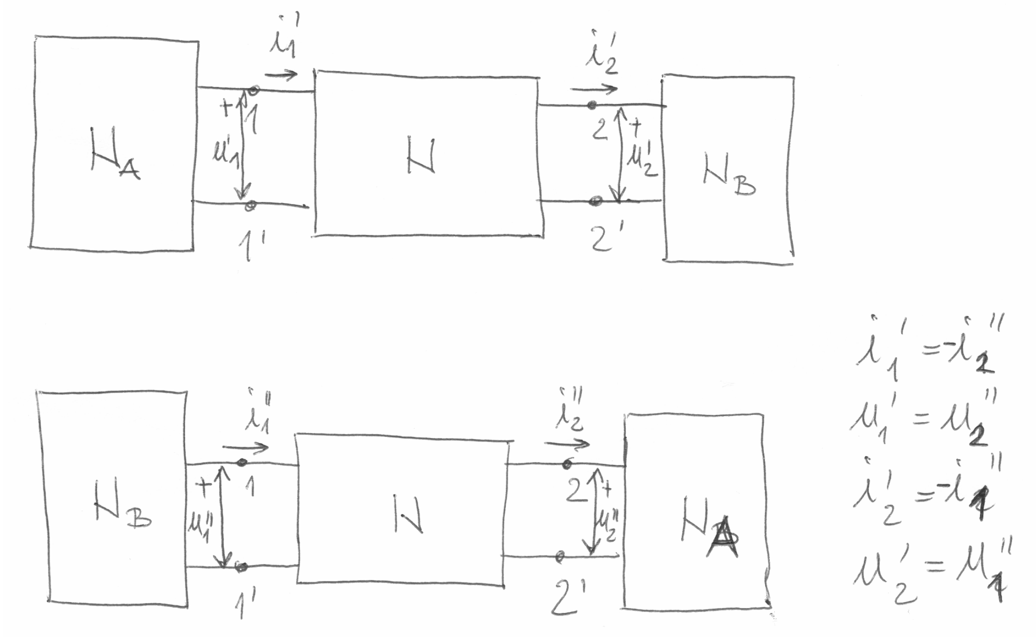
Dvije dodatne, značajne, osobine mreža sa dva pristupa su *recipročnost* i *simetričnost*. Recipročnost je posljedica teoreme reciprociteta i za mrežu sa dva pristupa kažemo da je recipročna ako je, kada se pobuda dovede na prvi pristup mreže, odziv mreže na drugom pristupu jednak odzivu koji se dobija kada se zamijene pristupi na koje se dovodi pobuda, odnosno, posmatra odziv. Kao ilustraciju, posmatrajmo linearnu mrežu sa dva pristupa koja se na jednom pristupu pobuđuje naponskim generatorom, kao na Slici. Neka je odziv mreže struja kroz kratko spojen drugi pristup. Ako je, kada se mreža pobuđuje istim naponskim generatorom spojenim na drugi pristup, struja kroz kratko spojen prvi pristup jednaka odzivu u prvom slučaju kažemo da je mreža recipročna. Analogno se recipročnost mreže može provjeriti ako se kao pobuda koristi strujni generator, a kao odziv posmatra napon na otvorenom pristupu. Linearne pasivne mreže su uvijek recipročne.



Slika 2: Recipročnost mreže sa dva pristupa.

Ako se zamjenom pristupa mreže ne promijene naponi i struje u ostatku kola, kažemo da je mreža simetrična. Posmatrajmo primjer na Slici. U prvom slučaju je na prvi pristup mreže N vezana mreža sa jednim pristupom N_A, a na drugi pristup mreža sa jednim pristupom N_B. Ako, nakon zamijene pristupa na koji su vezane mreže N_A i N_B, naponi i struje na pristupima ostanu isti, mreža N je simetrična. Drugim riječima, sistem jednačina koji opisuje mrežu ostaje isti ako se zamijene uloge naponima i strujama na pristupima. Praktično u svim slučajevima simetrična mreža sa dva pristupa mora biti i recipročna. Jedini izuzetak je negativni konvertor impedanse[1].

[1]Revisitation of Reciprocity of Linear Resistive k-Ports
Reciprocity and Anti-Reciprocity Revisited



Slika 3: Simetričnost mreže sa dva pristupa.

1 Model mreže sa dva pristupa

Matematički model mreže sa dva pristupa predstavlja vezu između napona i struja na pristupima mreže. Mreža je karakterisana sa četiri *parametra* čije su vrijednosti kompleksni brojevi.

1.1 z-parametri

Ako se naponi na pristupima mreži izraze u funkciji struja pristupa dobija se z-sistem jednačina

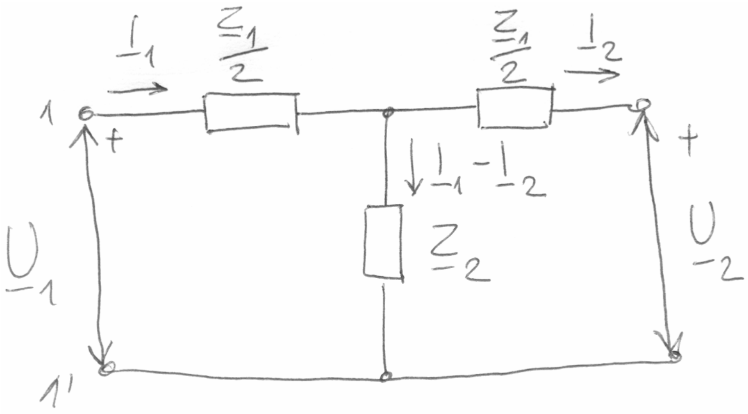
$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{z}_{12}\left(-\underline{I}_2\right), \\ \underline{U}_2 &= \underline{z}_{21}\underline{I}_2 + \underline{z}_{22}\left(-\underline{I}_2\right), \end{aligned} \tag{1}$$

ili, u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{z}_{11} & \underline{z}_{12} \\ \underline{z}_{21} & \underline{z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Parametri mreže sa dva pristupa se mogu odrediti postavljanjem i transformacijom jednačina koje opisuju mrežu po KZN i KZS. Kao primjer posma-

Two-port ideal power transferitors: a unified introduction to ideal transformer and gyrator



Slika 4: Simetrična T-mreža

trajmo simetričnu T-mrežu prikazanu na Slici. Po KZN je moguće napisati jednačine

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{2}\underline{I}_1 + \underline{Z}_2\left(\underline{I}_1 - \underline{I}_2\right),$$
$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2\left(\underline{I}_1 - \underline{I}_2\right) + \frac{\underline{Z}_1}{2}\left(-\underline{I}_2\right),$$

odnosno, nakon preuređivanja,

$$\underline{U}_1 = \left(\frac{\underline{Z}_1}{2} + \underline{Z}_2\right)\underline{I}_1 + \underline{Z}_2\left(-\underline{I}_2\right),$$
$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2\underline{I}_1 + \left(\frac{\underline{Z}_1}{2} + \underline{Z}_2\right)\left(-\underline{I}_2\right).$$

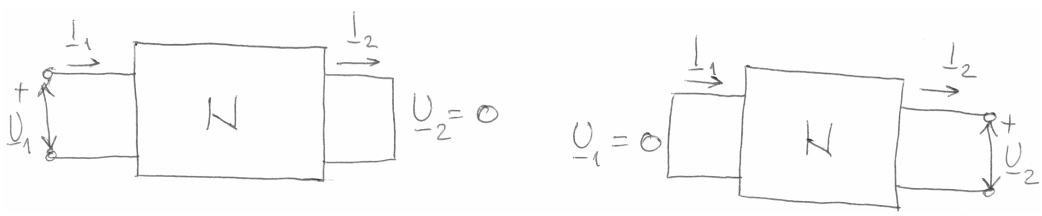
Matrica z-parametara je, dakle,

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\underline{Z}_1}{2} + \underline{Z}_2\right) & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \left(\frac{\underline{Z}_1}{2} + \underline{Z}_2\right) \end{bmatrix}.$$

z-parametri imaju dimenzije impedansi i mogu se jednostavnije izračunati na sljedeći način. Ako su izlazni krajevi mreže otvoreni, $\underline{I}_2 = 0$, onda je

$$\underline{z}_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\Big|_{\underline{I}_2=0}, \tag{3}$$

$$\underline{z}_{21} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\Big|_{\underline{I}_2=0}. \tag{4}$$



Slika 5: Izračunavanje z-parametara

Dakle, parametar $\underline{z}_{11}$ je ulazna impedansa mreže sa dva pristupa pri otvorenom izlaznom pristupu, a parametar $\underline{z}_{21}$ se naziva *transimpedansa* zato što daje vezu između napona na izlazu i struje na ulazu mreže.

Kada su ulazni krajevi mreže otvoreni, $\underline{I}_1 = 0$, onda je

$$\underline{z}_{12} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}|_{\underline{I}_1=0}, \tag{5}$$

$$\underline{z}_{22} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}|_{\underline{I}_1=0}. \tag{6}$$

Parametar $\underline{z}_{12}$ je takođe transrezistansa, a parametar $\underline{z}_{22}$ je izlazna impedansa mreže sa dva pristupa pri otvorenom ulaznom pristupu.

Uslov recipročnosti mreže sa dva pristupa korištenjem z-parametara je

$$\underline{z}_{12} = \underline{z}_{21}, \tag{7}$$

a ako je zadovoljen i uslov

$$\underline{z}_{11} = \underline{z}_{22}, \tag{8}$$

mreža je simetrična.

1.2 y-parametri

Ako se struje na pristupima mreže izraze u funkciji napona, dobijamo y-sistem jednačina

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{y}_{12}\underline{U}_2, \\ -\underline{I}_2 &= \underline{y}_{21}\underline{U}_2 + \underline{y}_{22}\underline{U}_2, \end{aligned} \tag{9}$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y}_{11} & \underline{y}_{12} \\ \underline{y}_{21} & \underline{y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

y-parametri imaju dimenzije admitansi i mogu se izračunati na sljedeći način. Neka su izlazni krajevi mreže kratko spojeni, $\underline{U}_2 = 0$. Tada je

$$\underline{y}_{11} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}|_{\underline{U}_2=0}, \tag{11}$$

$$\underline{y}_{21} = \frac{-\underline{I}_2}{\underline{U}_1}|_{\underline{U}_2=0}. \tag{12}$$

Kada su ulazni krajevi mreže kratko spojeni, $\underline{U}_1 = 0$, imamo

$$\underline{y}_{12} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}|_{\underline{U}_1=0}, \tag{13}$$

$$\underline{y}_{22} = \frac{-\underline{I}_2}{\underline{U}_2}|_{\underline{U}_1=0}. \tag{14}$$

Parametar $\underline{y}_{11}$ je ulazna admitansa mreže pri kratko spojenim izlaznim krajevima, a parametar $\underline{y}_{22}$ je izlazna admitansa mreže pri kratko spojenim ulaznim krajevima. Parametri $\underline{y}_{12}$ i $\underline{y}_{21}$ su predstavljaju prenosne admitanse ili transadmitanse.

U recipročnoj mreži sa dva pristupa vrijedi

$$\underline{y}_{12} = \underline{y}_{21}, \tag{15}$$

a u simetričnoj još i

$$\underline{y}_{11} = \underline{y}_{22}. \tag{16}$$

1.3 a-parametri

Ako se napon i struja na ulaznom pristupu izraze u funkciji napona i struje na izlaznom pristupu, mreža je karakterisana *a-parametrima* ili *prenosnim parametrima*

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{a}_{11}\underline{U}_2 + \underline{a}_{12}\underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{a}_{21}\underline{U}_2 + \underline{a}_{22}\underline{I}_2, \end{aligned} \tag{17}$$

odnosno, u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Elementi matrice a-parametara na glavnoj dijagonali su bez dimenzije, a elementi na sporednoj dijagonali imaju dimenzije impedanse i admitanse, respektivno. Vrijednosti a-parametara se mogu odrediti stavljanjem $\underline{U}_2 = 0$ i $\underline{I}_2 = 0$, slično kao za z- i y-parametre.

U recipročnoj mreži je

$$\det \mathbf{a} = 1, \tag{19}$$

a u simetričnoj vrijedi i

$$\underline{a}_{11} = \underline{a}_{22}. \tag{20}$$

1.4 b-parametri

Ako se napon i struja na izlaznom pristupu izraze u funkciji napona i struje na ulaznom pristupu, mreža je karakterisana *b-parametrima*

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{b}_{11}\underline{U}_1 + \underline{b}_{12}\underline{I}_1, \\ \underline{I}_2 &= \underline{b}_{21}\underline{U}_1 + \underline{b}_{22}\underline{I}_1, \end{aligned} \tag{21}$$

odnosno, u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}_{11} & \underline{b}_{12} \\ \underline{b}_{21} & \underline{b}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Elementi na glavnoj dijagonali nemaju dimenzije, a elementi na sporednoj dijagonali imaju dimenzije impedanse i admitanse, respektivno. Vrijednosti b-parametara se mogu odrediti stavljanjem $\underline{U}_1 = 0$ i $\underline{I}_1 = 0$, slično kao za z- i y-parametre.

U recipročnoj mreži je

$$\det \mathbf{b} = 1, \tag{23}$$

a u simetričnoj vrijedi i

$$\underline{b}_{11} = \underline{b}_{22}. \tag{24}$$

1.5 h-parametri

Kada se napon na ulaznom i struja na izlaznom pristupu mreže izraze u funkciji struje na ulaznom i napona na izlaznom pristupu, mreža je opisana hibridnim, h-parametrima

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{h}_{11}\underline{I}_1 + \underline{h}_{12}\underline{U}_2, \\ -\underline{I}_2 &= \underline{h}_{21}\underline{I}_1 + \underline{h}_{22}\underline{U}_2, \end{aligned} \tag{25}$$

odnosno u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{h}_{11} & \underline{h}_{12} \\ \underline{h}_{21} & \underline{h}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Elementi matrice h-parametara na glavnoj dijagonali imaju dimenzije impedanse i admitanse, respektivno, a nedijagonalni elementi su bez dimenzije. Vrijednosti h-parametara se mogu odrediti stavljanjem $\underline{I}_1 = 0$ i $\underline{U}_2 = 0$.

Uslov recipročnosti je

$$\underline{h}_{12} = -\underline{h}_{21}, \tag{27}$$

a za simetričnost treba da vrijedi i

$$\det \mathbf{h} = 1 \tag{28}$$

Česta primjena h-parametara je u elektronici u modelu bipolarnog tranzistora za male signale.

1.6 g-parametri

Drugi skup hibridnih parametara, g-parametri, dobija se kada se kao nezavisne veličine usvoje napon na ulaznom i struja na izlaznom pristupu mreže

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{g}_{11}\underline{U}_1 + \underline{g}_{12}\left(-\underline{I}_2\right), \\ \underline{U}_2 &= \underline{g}_{21}\underline{U}_1 + \underline{g}_{22}\left(-\underline{I}_2\right), \end{aligned} \tag{29}$$

odnosno, u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{g}_{11} & \underline{g}_{12} \\ \underline{g}_{21} & \underline{g}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Elementi matrice g-parametara na glavnoj dijagonali imaju dimenzije admitanse i impedanse, respektivno, a na elementi na sporednoj dijagonali su bez dimenzije. Vrijednosti g-parametara se mogu odrediti pri kratko spojenom ulaznom pristupu, $\underline{U}_1 = 0$ i pri otvorenom izlaznom pristupu $\underline{I}_2 = 0$.

Uslov recipročnosti je

$$\underline{g}_{12} = -\underline{g}_{21}, \tag{31}$$

a da bi mreža bila simetrična treba da vrijedi i

$$\det \mathbf{g} = 1. \tag{32}$$

1.7 Veze između parametara

Sve navedene reprezentacije električne mreže sa dva pristupa su međusobno ekvivalentne, tako da je moguće uspostaviti veze između različitih skupova parametara. Na primjer, ukoliko je matrica z-parametara mreže sa dva pristupa regularna, onda iz jednačina (2) i (10) slijedi veza između z- i y-parametara mreže sa dva pristupa

$$\mathbf{y} = \mathbf{z}^{-1}. \tag{33}$$

Analogno, ukoliko je matrica h-parametara regularna, onda iz jednačina (26) i (30) slijedi veza

$$\mathbf{g} = \mathbf{h}^{-1}. \tag{34}$$

Konačno, ako je matrica a-parametara regularna, iz jednačina (18) i (22) slijedi

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}^{-1}. \tag{35}$$

Sve veze između različitih skupova parametara sumarizovane su u Tabeli.

Za neke mreže sa dva pristupa nisu definisani određeni skupovi parametara pa samim tim nije moguća ni konverzija parametara. Kao primjer posmatrajmo idealni transformator prikazan na Slici. Za idealni transformator moguće je odrediti matricu a-parametara

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}.$$

Postoje još i matrice b, h- i g-parametara, ali ne postoje matrice z- i y-parametara.

2 Osnovne veze mreža sa dva pristupa

Ulazni i izlazni priključci mreže sa dva pristupa mogu da se povežu redno ili paralelno tako da možemo razlikovati četiri načina povezivanja mreža:

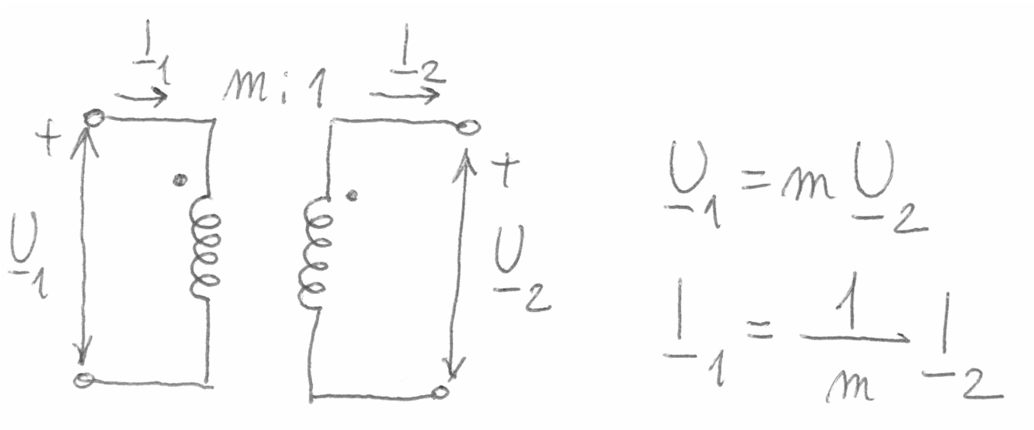
- redno-redna veza,
- paralelno-paralelna veza,
- redno-paralelna veza i
- paralelno-redna veza.

Pored ovih načina povezivanja mreže sa dva pristupa se mogu povezati i kaskadno.

RELACIJE IZMEĐU RAZLIČITIH PARAMETARA ČETVEROPOLA

	Y	Z	a	b	g	h
Y	$\begin{matrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Z_{22}}{\lvert Z\rvert} & \frac{Z_{12}}{\lvert Z\rvert} \\ \frac{Z_{12}}{\lvert Z\rvert} & \frac{Z_{11}}{\lvert Z\rvert} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{B} & \frac{1}{B} \\ \frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-b_{11}}{b_{12}} & \frac{-1}{b_{12}} \\ \frac{-1}{b_{12}} & \frac{-b_{22}}{b_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\lvert g\rvert}{g_{22}} & \frac{g_{21}}{g_{22}} \\ \frac{g_{21}}{g_{22}} & \frac{1}{g_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & \frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\lvert h\rvert}{h_{11}} \end{matrix}$
Z	$\begin{matrix} \frac{Y_{22}}{\lvert Y\rvert} & \frac{Y_{12}}{\lvert Y\rvert} \\ \frac{Y_{12}}{\lvert Y\rvert} & \frac{Y_{11}}{\lvert Y\rvert} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A}{C} & \frac{1}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-b_{22}}{b_{21}} & \frac{-1}{b_{21}} \\ \frac{-1}{b_{21}} & \frac{-b_{11}}{b_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{g_{11}} & \frac{g_{21}}{g_{11}} \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & \frac{\lvert g\rvert}{g_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\lvert h\rvert}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ \frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$
a	$\begin{matrix} \frac{Y_{22}}{Y_{12}} & \frac{1}{Y_{12}} \\ \frac{\lvert Y\rvert}{Y_{12}} & \frac{Y_{11}}{Y_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Z_{11}}{Z_{12}} & \frac{\lvert Z\rvert}{Z_{12}} \\ \frac{1}{Z_{12}} & \frac{Z_{22}}{Z_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$	$\begin{matrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{g_{21}} & \frac{g_{22}}{g_{21}} \\ \frac{g_{11}}{g_{21}} & \frac{\lvert g\rvert}{g_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\lvert h\rvert}{h_{21}} & \frac{h_{11}}{h_{21}} \\ \frac{h_{22}}{h_{21}} & \frac{1}{h_{21}} \end{matrix}$
b	$\begin{matrix} \frac{Y_{11}}{Y_{12}} & \frac{-1}{Y_{12}} \\ \frac{-\lvert Y\rvert}{Y_{12}} & \frac{Y_{22}}{Y_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Z_{22}}{Z_{12}} & \frac{-\lvert Z\rvert}{Z_{12}} \\ \frac{-1}{Z_{12}} & \frac{Z_{11}}{Z_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} D & -B \\ -C & A \end{matrix}$	$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\lvert g\rvert}{g_{21}} & \frac{g_{22}}{g_{12}} \\ \frac{g_{11}}{g_{12}} & \frac{1}{g_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{21}} & \frac{h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{h_{22}}{h_{12}} & \frac{\lvert h\rvert}{h_{21}} \end{matrix}$
g	$\begin{matrix} \frac{\lvert Y\rvert}{Y_{22}} & \frac{-Y_{12}}{Y_{22}} \\ \frac{Y_{12}}{Y_{22}} & \frac{1}{Y_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{Z_{11}} & \frac{-Z_{12}}{Z_{11}} \\ \frac{Z_{12}}{Z_{11}} & \frac{\lvert Z\rvert}{Z_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C}{A} & \frac{-1}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{B}{A} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-b_{21}}{b_{22}} & \frac{-1}{b_{22}} \\ \frac{1}{b_{22}} & \frac{-b_{12}}{b_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h_{22}}{\lvert h\rvert} & \frac{h_{12}}{\lvert h\rvert} \\ \frac{h_{21}}{\lvert h\rvert} & \frac{h_{11}}{\lvert h\rvert} \end{matrix}$
h	$\begin{matrix} \frac{1}{Y_{11}} & \frac{-Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{12}}{Y_{11}} & \frac{\lvert Y\rvert}{Y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\lvert Z\rvert}{Z_{22}} & \frac{-Z_{12}}{Z_{22}} \\ \frac{Z_{12}}{Z_{22}} & \frac{1}{Z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B}{D} & \frac{-1}{D} \\ \frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-b_{21}}{b_{11}} & \frac{1}{b_{11}} \\ \frac{-1}{b_{11}} & \frac{-b_{12}}{b_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{g_{22}}{\lvert g\rvert} & \frac{g_{21}}{\lvert g\rvert} \\ \frac{g_{12}}{\lvert g\rvert} & \frac{g_{11}}{\lvert g\rvert} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$

Slika 6: Veze između parametara.



Slika 7: Idealni transformator kao mreža sa dva pristupa.

2.1 Redno-redna veza

Redno-redna veza dvije mreže prikazana je na Slici. Pošto su i ulazni i izlazni priključci vezani redno, ulazne, odnosno, izlazne struje obje mreže su jednake

$$\underline{I}_1 = \underline{I}'_1 = \underline{I}''_1, \tag{36}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}'_2 = \underline{I}''_2. \tag{37}$$

Napon na ulazu je

$$\underline{U}_1 = \underline{U}'_1 + \underline{U}''_1, \tag{38}$$

a na izlazu

$$\underline{U}_2 = \underline{U}'_2 + \underline{U}''_2. \tag{39}$$

Obje mreže možemo predstaviti njihovim z-parametrima

$$\begin{aligned} \underline{U}'_1 &= \underline{z}'_{11}\underline{I}'_1 + \underline{z}'_{12}\left(-\underline{I}'_2\right), \\ \underline{U}'_2 &= \underline{z}'_{21}\underline{I}'_2 + \underline{z}'_{22}\left(-\underline{I}'_2\right), \end{aligned} \tag{40}$$

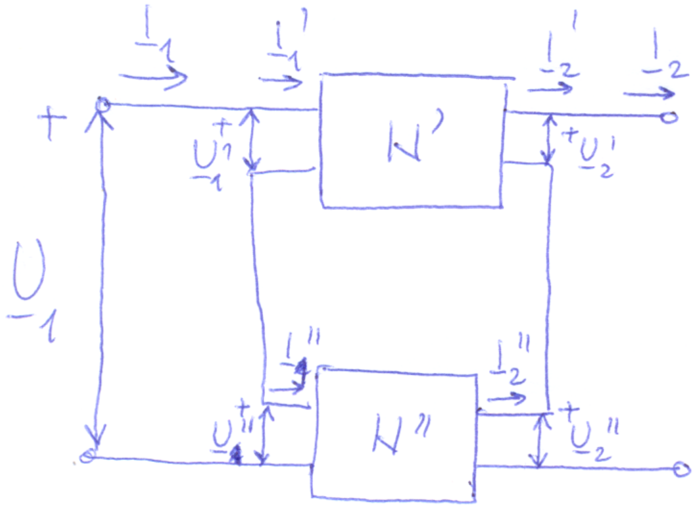
i

$$\begin{aligned} \underline{U}''_1 &= \underline{z}''_{11}\underline{I}''_1 + \underline{z}''_{12}\left(-\underline{I}''_2\right), \\ \underline{U}''_2 &= \underline{z}''_{21}\underline{I}'_2 + \underline{z}''_{22}\left(-\underline{I}''_2\right). \end{aligned} \tag{41}$$

Naponi na ulazu i izlazu mreže su sada oblika

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \left(\underline{z}'_{11} + \underline{z}''_{11}\right)\underline{I}_1 + \left(\underline{z}'_{12} + \underline{z}''_{12}\right)\left(-\underline{I}_2\right), \\ \underline{U}_2 &= \left(\underline{z}'_{21} + \underline{z}''_{21}\right)\underline{I}_1 + \left(\underline{z}'_{22} + \underline{z}''_{22}\right)\left(-\underline{I}_2\right). \end{aligned} \tag{42}$$

Dakle, matrica z-parametara redno-redne veze jednaka je zbiru matrica z-parametara mreža od kojih je sastavljena mreža. Ova osobina važi ukoliko je zadovoljen Brunov test (uslov regularnosti) za redno-rednu vezu mreža.



Slika 8: Redna veza mreža sa dva pristupa.

2.2 Paralelno-paralelna veza

Ako su mreže povezane tako da su ulazni i izlazni naponi obje mreže jednaki,

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1' = \underline{U}_1'', \tag{43}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_2' = \underline{U}_2'', \tag{44}$$

onda se radi o paralelno-paralelnoj vezi, Slika. U ovom slučaju su ulazna i izlazna struja rezultujuće mreže

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1' + \underline{I}_1'', \tag{45}$$

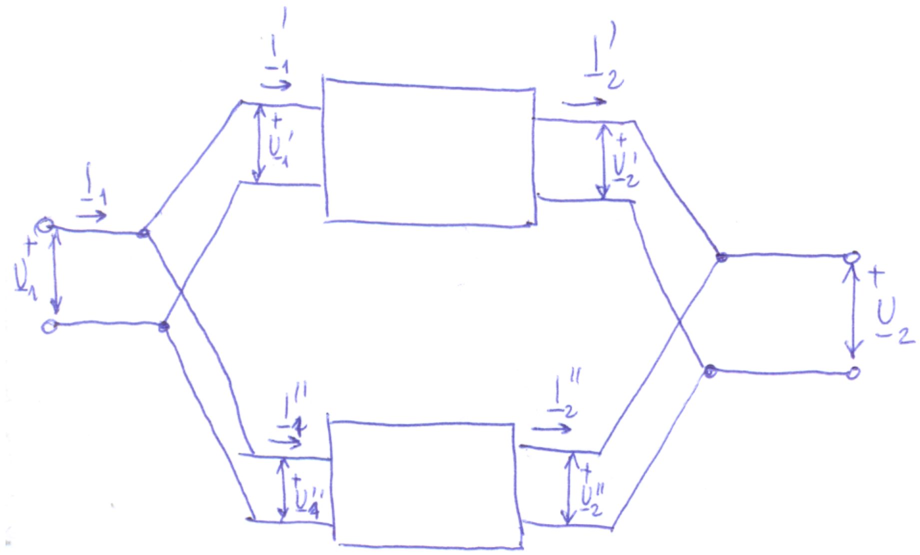
$$\underline{I}_2 = \underline{I}_2' + \underline{I}_2''. \tag{46}$$

Ako mreže predstavimo y-parametrima

$$\begin{aligned} \underline{I}_1' &= \underline{y}_{11}'\underline{U}_1' + \underline{y}_{12}'\underline{U}_2', \\ -\underline{I}_2' &= \underline{y}_{21}'\underline{U}_2' + \underline{y}_{22}'\underline{U}_2', \end{aligned} \tag{47}$$

i

$$\begin{aligned} \underline{I}_1'' &= \underline{y}_{11}''\underline{U}_1'' + \underline{y}_{12}''\underline{U}_2'', \\ -\underline{I}_2'' &= \underline{y}_{21}''\underline{U}_2'' + \underline{y}_{22}''\underline{U}_2''. \end{aligned} \tag{48}$$



Slika 9: Paralelna veza mreža sa dva pristupa.

Sada je

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \left(\underline{y}'_{11} + \underline{y}''_{11}\right)\underline{U}_1 + \left(\underline{y}'_{12} + \underline{y}''_{12}\right)\underline{U}_2, \\ -\underline{I}_2 &= \left(\underline{y}'_{21} + \underline{y}''_{21}\right)\underline{U}_2 + \left(\underline{y}'_{22} + \underline{y}''_{22}\right)\underline{U}_2. \end{aligned} \tag{49}$$

Matrica y-parametara paralelno-paralelne veze dvije mreže sa dva pristupa jednaka je zbiru matrica y-parametara pojedinih mreža pod uslovom da je zadovoljen Brunov test (uslov regularnosti) za paralelno-paralelnu vezu mreža.

2.3 Redno-paralelna veza

Ako su ulazi mreža vezani redno, a izlazi paralelno dobija se redno-paralelna veza dvije mreže, Slika. U ovom slučaju su jednake ulazne struje mreža

$$\underline{I}_1 = \underline{I}'_1 = \underline{I}''_1, \tag{50}$$

kao i izlazni naponi

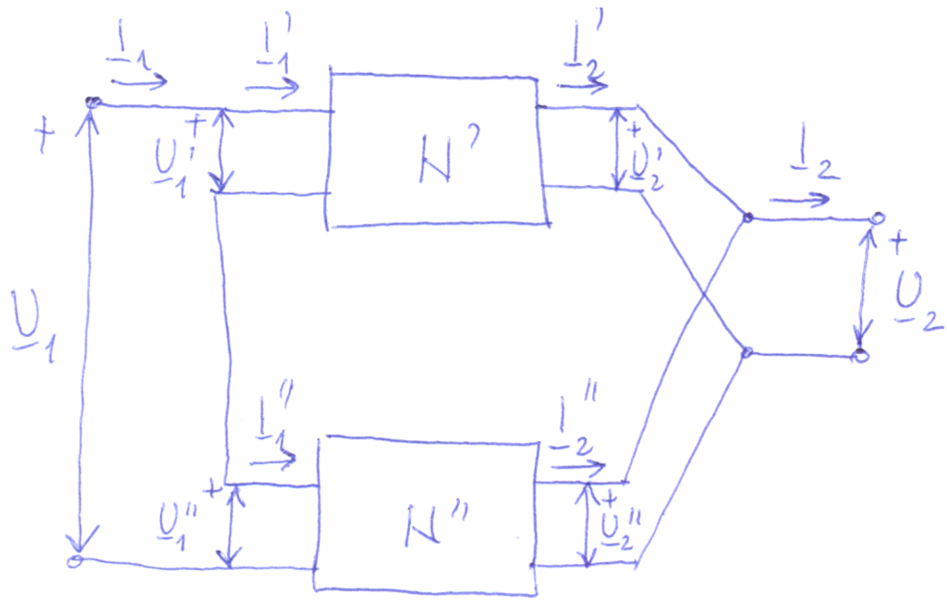
$$\underline{U}_2 = \underline{U}'_2 = \underline{U}''_2. \tag{51}$$

Za ulazne napone vrijedi

$$\underline{U}_1 = \underline{U}'_1 + \underline{U}''_1, \tag{52}$$

a za izlazne struje

$$\underline{I}_2 = \underline{I}'_2 + \underline{I}''_2. \tag{53}$$



Slika 10: Redno-paralelna veza mreža sa dva pristupa.

Ako mreže predstavimo njihovim h-parametrima

$$\begin{aligned} \underline{U}_1' &= \underline{h}_{11}'\underline{I}_1' + \underline{h}_{12}'\underline{U}_2', \\ -\underline{I}_2' &= \underline{h}_{21}'\underline{I}_1' + \underline{h}_{22}'\underline{U}_2', \end{aligned} \tag{54}$$

i

$$\begin{aligned} \underline{U}_1'' &= \underline{h}_{11}''\underline{I}_1'' + \underline{h}_{12}''\underline{U}_2'', \\ -\underline{I}_2'' &= \underline{h}_{21}''\underline{I}_1'' + \underline{h}_{22}''\underline{U}_2', \end{aligned} \tag{55}$$

Sada je

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \left(\underline{h}_{11}' + \underline{h}_{11}''\right)\underline{I}_1 + \left(\underline{h}_{12}' + \underline{h}_{12}''\right)\underline{U}_2, \\ -\underline{I}_2 &= \left(\underline{h}_{21}' + \underline{h}_{21}''\right)\underline{I}_1 + \left(\underline{h}_{22}' + \underline{h}_{22}''\right)\underline{U}_2. \end{aligned} \tag{56}$$

Matrica h-parametara redno-paralelne veze dvije mreže sa dva pristupa jednaka je zbiru matrica h-parametara pojedinih mreža, pod uslovom da je Brunov test zadovoljen za redno vezivanje ulaza i paralelno vezivanje izlaza mreža.

2.4 Paralelno-redna veza

Ako su ulazi mreža vezani paralelno, a njihovi izlazi redno, dobija se paralelno-redna veza dvije mreže, Slika. Ulazni naponi mreža su jednaki

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1' = \underline{U}_1'', \tag{57}$$

kao i izlazne struje

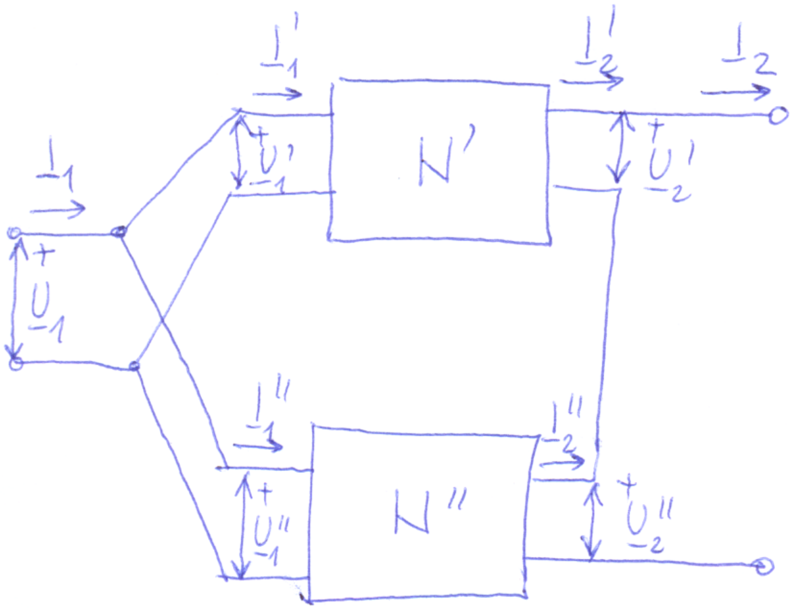
$$\underline{I}_2 = \underline{I}_2' = \underline{I}_2''. \tag{58}$$

Za ulazne struje vrijedi

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1' + \underline{I}_1'', \tag{59}$$

a za izlazne napone

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_2' + \underline{U}_2''. \tag{60}$$



Slika 11: Paralelno-redna veza mreža sa dva pristupa.

Ako mreže predstavimo njihovim g-parametrima

$$\begin{aligned} \underline{I}_1' &= \underline{g}_{11}'\underline{U}_1' + \underline{g}_{12}'\left(-\underline{I}_2'\right), \\ \underline{U}_2' &= \underline{g}_{21}'\underline{U}_1' + \underline{g}_{22}'\left(-\underline{I}_2'\right), \end{aligned} \tag{61}$$

i

$$\begin{aligned} \underline{I}_1'' &= \underline{g}_{11}''\underline{U}_1'' + \underline{g}_{12}''\left(-\underline{I}_2''\right), \\ \underline{U}_2'' &= \underline{g}_{21}''\underline{U}_1'' + \underline{g}_{22}''\left(-\underline{I}_2''\right), \end{aligned} \tag{62}$$

Sada je

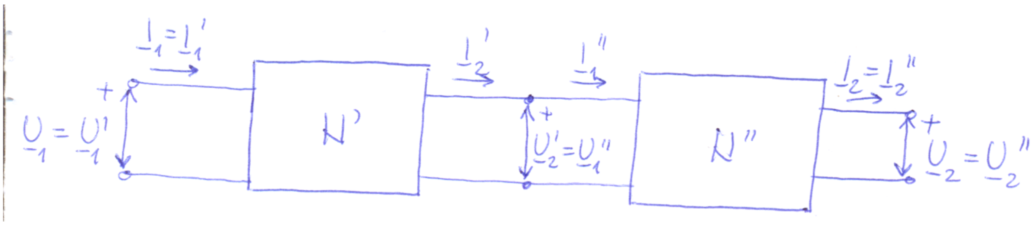
$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \left(\underline{g}_{11}' + \underline{g}_{11}''\right)\underline{U}_1 + \left(\underline{g}_{12}' + \underline{g}_{12}''\right)\left(-\underline{I}_2\right), \\ \underline{U}_2 &= \left(\underline{g}_{21}' + \underline{g}_{21}''\right)\underline{U}_1 + \left(\underline{g}_{22}' + \underline{g}_{22}''\right)\left(-\underline{I}_2'\right). \end{aligned} \tag{63}$$

Matrica g-parametara paralelno-redne veze dvije mreže sa dva pristupa jednaka je zbiru matrica g-parametara pojedinih mreža, pod uslovom da je zadovoljen Brunov test (uslov regularnosti veze).

2.5 Kaskadna veza

Vezivanjem izlaznog pristupa jedne mreže na ulazni druge dobija se kaskadna veza dvije mreže, kao što je prikazano na Slici. U ovom slučaju vrijedi

$$
\begin{aligned}
\underline{U}_1 &= \underline{U}_1', \\
\underline{I}_1 &= \underline{I}_1', \\
\underline{U}_1'' &= \underline{U}_2', \\
\underline{I}_1'' &= \underline{I}_2', \\
\underline{U}_2 &= \underline{U}_2'', \\
\underline{I}_2 &= \underline{I}_2''.
\end{aligned}
\tag{64}
$$



Slika 12: Kaskadna veza mreža sa dva pristupa.

Ako mreže predstavimo njihovim a-parametrima u matričnom obliku

$$
\begin{bmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{I}_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{11}' & \underline{a}_{12}' \\ \underline{a}_{21}' & \underline{a}_{22}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2' \\ \underline{I}_2' \end{bmatrix}. \tag{65}
$$

i

$$
\begin{bmatrix} \underline{U}_1'' \\ \underline{I}_1'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{11}'' & \underline{a}_{12}'' \\ \underline{a}_{21}'' & \underline{a}_{22}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2'' \\ \underline{I}_2'' \end{bmatrix}. \tag{66}
$$

dobijamo

$$
\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{11}' & \underline{a}_{12}' \\ \underline{a}_{21}' & \underline{a}_{22}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a}_{11}'' & \underline{a}_{12}'' \\ \underline{a}_{21}'' & \underline{a}_{22}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}. \tag{67}
$$

Dakle, matrica a-parametara kaskadne veze dvije mreže jednaka je proizvodu matrica a-parametara pojedinih mreža

$$
\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2. \tag{68}
$$

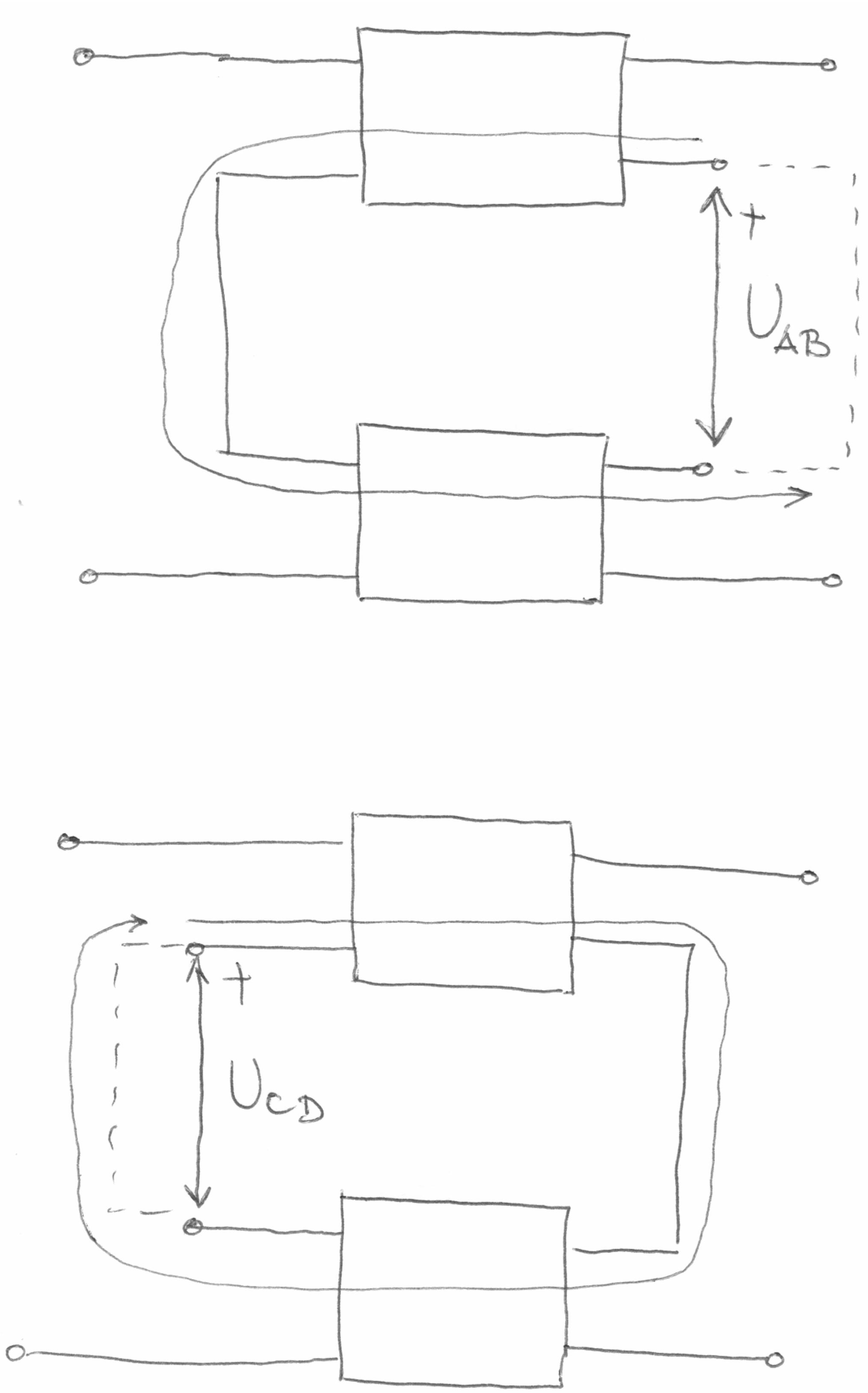
2.6 Brunov test

Relacije izvedene za parametre mreža dobijenih rednim i paralelnim vezivanjem pristupa važe ako je vezivanje mreža regularno, tj. ako vezivanjem mreža odnos pristupa pojedinih mreža nije narušen. U tom slučaju za pristupe pojedinih mreža je zadovoljen uslov da je struja koja kroz jedan priključak pristupa ulazi u mrežu jednaka struji koja kroz drugi priključak izlazi iz mreže. Ovo se može provjeriti korištenjem *Brunovog testa*[2] na sljedeći način. U slučaju redne veze mreža, jedan par pristupa se vezuje redno dok se drugi pristup na svakoj od mreža ostavlja otvoren, kao što je prikazano na Slici. Ukoliko su naponi $\underline{U}_{AB}$, odnosno, $\underline{U}_{AC}$ jednaki nuli, vezivanje je regularno i matrica z-parametara ekvivalentne mreže je jednaka zbiru matrica z-parametara pojedinih mreža. Ukoliko neki od napona $\underline{U}_{AB}$ ili $\underline{U}_{AC}$ nije jednak nuli onda će povezivanjem otvorenih pristupa u električno kolo teći struja kao što je prikazano na Slici i, za pojedine mreže, će biti narušen uslov da je struja koja ulazi u mrežu kroz jedan priključak jednaka struji koja izlazi iz mreže kroz drugi priključak. U ovom slučaju se mogu izračunati z-parametri rezultujuće mreže sa dva pristupa, ali oni, u opštem slučaju, nisu jednaki zbiru z-parametara pojedinih mreža. Ovo je ilustrovano na primjeru redne veze dvije T-mreže prikazanom na Slici. U ovom slučaju Brunov test nije zadovoljen i vidi se da struje kroz priključke pojedinih mreža, nakon njihovog rednog povezivanja, nisu jednake. Pri testiranju regularnosti redne veze mreža koriste se otvoreni pristupi zato što se, u ovom slučaju, koriste z-parametri za čije izračunavanje se koriste otvoreni pristupi.

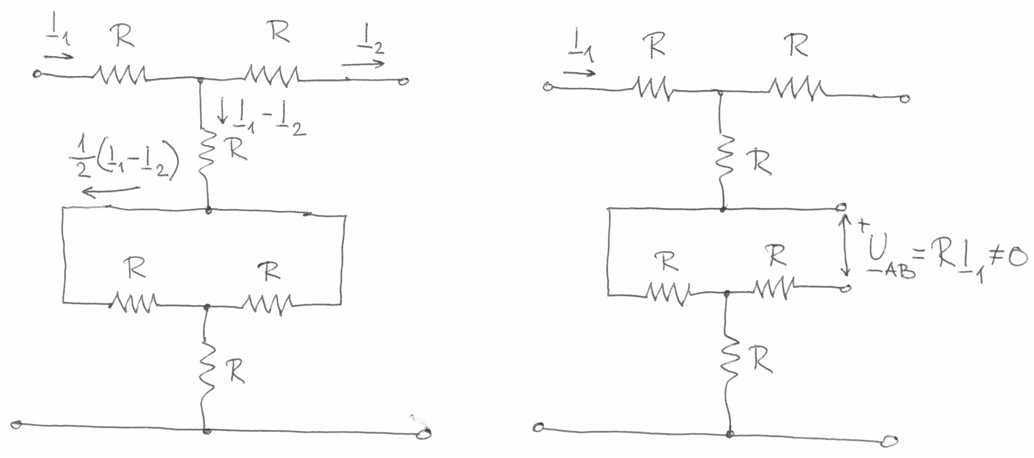
U slučaju paralelne veze mreža jedan par pristupa se vezuje paralelno dok se drugi pristup na svakoj od mreža kratko spaja, kao što je prikazano na Slici. Ako su naponi $\underline{U}_{AB}$ i $\underline{U}_{AC}$ jednaki nuli vezivanje je regularno i matrica y-parametara ekvivalentne mreže je jednaka zbiru matrica y-parametara pojedinih mreža. Ukoliko neki od napona $\underline{U}_{AB}$ ili $\underline{U}_{AC}$ nije jednak nuli nakon povezivanja pristupa u kolo teći će struja kako je naznačeno na Slici i, za pojedine mreže, biće narušen uslov da je struja koja ulazi u mrežu kroz jedan priključak jednaka struji koja izlazi iz mreže kroz drugi priključak. U ovom slučaju se mogu izračunati y-parametri rezultujuće mreže ali oni neće, u opštem slučaju, biti jednaki zbiru y-parametara pojedinih mreža. Pri testiranju regularnosti paralelne veze mreža koriste se kratko spojeni pristupi pojedinih mreža zato što se za izračunavanje y-parametara koriste kratko spojeni pristupi.

U slučajevima redno-paralelne i paralelno-redne veze mreža primjenjuju se testovi kod kojih se jedan pristup povezuje redno, odnosno, paralelno, a drugi se kratko spaja, odnosno, ostavlja otvoren, respektivno, kako bismo

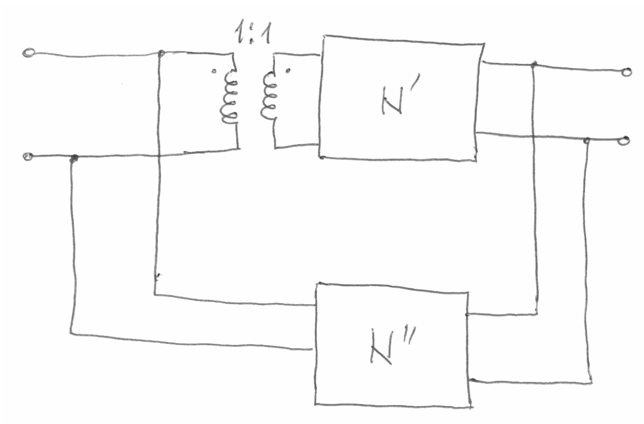
[2] On Brune's Tests



Slika 13: Brunov test za rednu vezu mreža.



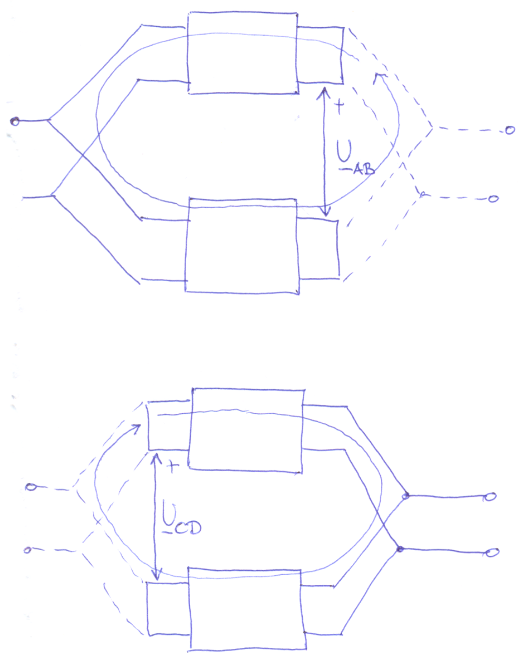
Slika 14: Redna veza dvije T-mreže ne zadovoljava Brunov test.



Slika 15: Regularizacija veze pomoću idealnog transformatora.

provjerili da li je očuvano ponašanje pristupa pojedinih mreža, a time i njihovi h- i g-parametri.

Ako se ustanovi da veza mreža nije regularna jer će se pojaviti struje, kako je opisano, moguće je spriječiti proticanje tih struja korištenjem idealnog transformatora sa prenosnim brojem $m = 1$, kao što je prikazano na Slici za slučaj paralelne veze.



Slika 16: Brunov test za paralelnu vezu mreža.

3 Sekundarni parametri mreža sa dva pristupa

Do sada opisani skupovi parametara mreža sa dva pristupa poznati su i pod nazivom *primarni parametri*. Mrežu sa dva pristupa je moguće opisati i *sekundarnim parametrima* – ulaznim impedansama i prenosnim koeficijentima mreže[3]. Posmatraćemo mrežu sa dva pristupa opisanu a-parametrima i zatvorenu impedansom $\underline{Z}_2$, Slika 17a. Ulazna impedansa ove mreže je jednaka

$$\underline{Z}_1' = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{a}_{11}\underline{U}_2 + \underline{a}_{12}\underline{I}_2}{\underline{a}_{21}\underline{U}_2 + \underline{a}_{22}\underline{I}_2}. \tag{69}$$

Pošto je $\underline{U}_2 = \underline{Z}_2\underline{I}_2$, imamo

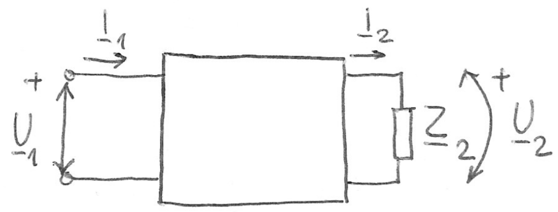
$$\underline{Z}_1' = \frac{\underline{a}_{11}\underline{Z}_2 + \underline{a}_{12}}{\underline{a}_{21}\underline{Z}_2 + \underline{a}_{22}}. \tag{70}$$

Ako je ulazni pristup mreže zatvoren impedansom $\underline{Z}_1$, kao na Slici 17b, ulazna impedansa posmatrano sa izlaznog pristupa je

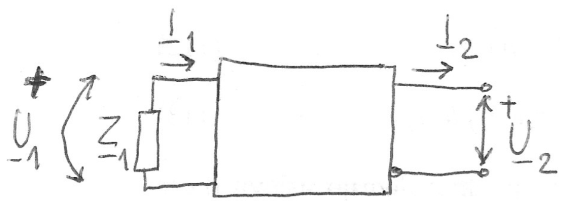
$$\underline{Z}_2' = \frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_2} = \frac{\underline{a}_{22}\underline{U}_1 - \underline{a}_{12}\underline{I}_1}{\underline{a}_{21}\underline{U}_1 - \underline{a}_{11}\underline{I}_1} = \frac{\underline{a}_{22}\underline{Z}_1 + \underline{a}_{12}}{\underline{a}_{21}\underline{Z}_1 + \underline{a}_{11}}, \tag{71}$$

[3]Koriste se i termini prenosna konstanta (iako se radi o veličini zavisnoj od frekvencije), prenosna funkcija, prenosni parametar.

pri čemu je iskorišteno da je $\underline{U}_1 = -\underline{Z}_1\underline{I}_1$.



(a)



(b)

Slika 17: Ulazne impedanse mreže sa dva pristupa.

Transmitansa napona je odnos kompleksnih napona na ulazu i izlazu mreže

$$\underline{M} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \underline{a}_{11} + \underline{a}_{12}\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} = \underline{a}_{11} + \frac{\underline{a}_{12}}{\underline{Z}_2}. \tag{72}$$

Transmitansa struja je odnos kompleksnih struja na ulazu i izlazu mreže

$$\underline{N} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \underline{a}_{21}\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} + \underline{a}_{22} = \underline{a}_{21}\underline{Z}_2 + \underline{a}_{22}. \tag{73}$$

Prenosni koeficijent za napone je definisan kao

$$\underline{\Gamma}_u = \ln\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \ln\underline{M} = \ln\left(\underline{a}_{11} + \frac{\underline{a}_{12}}{\underline{Z}_2}\right). \tag{74}$$

Pošto je

$$\underline{\Gamma}_u = \ln\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \ln\frac{U_1 e^{j\theta_1}}{U_2 e^{j\theta_2}} = \ln\frac{U_1}{U_2} + j\left(\theta_1 - \theta_2\right) = A_u + jB_u, \tag{75}$$

možemo definisati *funkciju slabljenja napona*

$$A_u = \ln\frac{U_1}{U_2} \tag{76}$$

i *faznu funkciju napona*

$$B_u = \theta_1 - \theta_2. \tag{77}$$

Prenosni koeficijent za struje se definiše kao

$$\underline{\Gamma}_i = \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \ln \underline{N} = \ln \left(\underline{a}_{21} \underline{Z}_2 + \underline{a}_{22}\right). \tag{78}$$

Pošto je

$$\underline{\Gamma}_i = \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \ln \frac{I_1 e^{j\psi_1}}{I_2 e^{j\psi_2}} = \ln \frac{I_1}{I_2} + j\left(\psi_1 - \psi_2\right) = A_i + jB_i, \tag{79}$$

možemo definisati *funkciju slabljenja struja*

$$A_i = \ln \frac{I_1}{I_2} \tag{80}$$

i *faznu funkciju struja*

$$B_i = \psi_1 - \psi_2. \tag{81}$$

Konačno, *prenosni koeficijent mreže* je aritmetička sredina prenosnih koeficijenata za napone i struje

$$\underline{\Gamma} = \frac{1}{2}\left(\underline{\Gamma}_u + \underline{\Gamma}_i\right) = \ln \sqrt{\underline{MN}} = \ln \underline{T}, \tag{82}$$

gdje je

$$\underline{T} = \sqrt{\underline{MN}}, \tag{83}$$

transmitansa mreže. Prenosni koeficijent mreže se može napisati u obliku

$$\underline{\Gamma} = \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{U}_1 \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \underline{I}_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} + j\frac{1}{2}\left[\left(\theta_1 - \theta_2\right) + \left(\psi_1 - \psi_2\right)\right] = A + jB, \tag{84}$$

gdje je

$$A = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{S_1}{S_2}, \tag{85}$$

funkcija slabljenja mreže izražena kao odnos prividnih snaga na ulazu i izlazu mreže, a

$$B = \frac{1}{2}\left[\left(\theta_1 - \theta_2\right) + \left(\psi_1 - \psi_2\right)\right] \tag{86}$$

je *fazna funkcija* mreže. Očigledno je

$$A = \frac{1}{2}\left(A_u + A_i\right), \tag{87}$$

$$B = \frac{1}{2}\left(B_u + B_i\right). \tag{88}$$

Vrijednosti faznih funkcija imaju dimenziju ugla i daju se u radijanima ili stepenima. Vrijednosti funkcija slabljenja dobijene datim izrazima nemaju dimenziju jer se izračunavaju kao odnos veličina iste dimenzije, ali se tipično izražavaju u neperima (Np).

U datim izrazima za funkcije slabljenja se prirodni logaritam može zamijeniti dekadnim i u tom slučaju se dobija vrijednost slabljenja izražena u decibelima (dB)

$$A = 10 \log \frac{S_1}{S_2} [\mathrm{dB}]. \tag{89}$$

Funkcije slabljenja napona i struje su sada

$$A_u = 20 \log \frac{U_1}{U_2} [\mathrm{dB}], \tag{90}$$

$$A_i = 20 \log \frac{I_1}{I_2} [\mathrm{dB}]. \tag{91}$$

Pošto je

$$\ln x = \ln 10 \log x,$$

vrijednost slabljenja u decibelima jednaka je vrijednosti slabljenja u Neperima pomnoženoj sa 8,686.

Prednosti prelaska na logaritamsku skalu za reprezentaciju slabljenja se ogledaju u kompaktnijoj reprezentaciji veličina koje imaju veliki dinamički opseg i u transformaciji multiplikativne veze u aditivnu. Prenosni koeficijent kaskadne veze mreža sa dva pristupa jednak je zbiru prenosnih koeficijenata pojedinih mreža. Pored toga, vrijednosti funkcije slabljenja su relativne u odnosu na referentnu vrijednost pa su pogodne za opisivanje ljudske percepcije pri čemu se kao referentna vrijednost obično uzima prag osjetljivosti.

3.1 Imaž i iterativne impedanse

Imaž impedansa mreže sa dva pristupa, posmatrano sa prvog pristupa, $\underline{Z}_{im1}$, je ulazna impedansa mreže kada je drugi pristup zatvoren imaž impedansom za taj pristup, $\underline{Z}_{im2}$, i obrnuto. U opštem slučaju imaž impedanse za dva pristupa nisu jednake. Iz (70) i (71) slijedi

$$\underline{Z}_{im1} = \frac{\underline{a}_{11}\underline{Z}_{im2} + \underline{a}_{12}}{\underline{a}_{21}\underline{Z}_{im2} + \underline{a}_{22}}, \tag{92}$$

$$\underline{Z}_{im2} = \frac{\underline{a}_{22}\underline{Z}_{im1} + \underline{a}_{12}}{\underline{a}_{21}\underline{Z}_{im1} + \underline{a}_{11}}. \tag{93}$$

Pošto je

$$\underline{a}_{21}\underline{Z}_{im1}\underline{Z}_{im2} + \underline{a}_{22}\underline{Z}_{im1} = \underline{a}_{11}\underline{Z}_{im2} + \underline{a}_{12}, \tag{94}$$

$$\underline{a}_{21}\underline{Z}_{im1}\underline{Z}_{im2} + \underline{a}_{11}\underline{Z}_{im2} = \underline{a}_{22}\underline{Z}_{im1} + \underline{a}_{12}. \tag{95}$$

Sabiranjem ovih jednačina dobija se

$$\underline{a}_{21}\underline{Z}_{im1}\underline{Z}_{im2} = \underline{a}_{12} \tag{96}$$

i smjenom u (94)

$$\underline{a}_{22}\underline{Z}_{im1} = \underline{a}_{11}\underline{Z}_{im2}. \tag{97}$$

Konačno, imaž impedanse su jednake

$$\underline{Z}_{im1} = \sqrt{\frac{\underline{a}_{11}\underline{a}_{12}}{\underline{a}_{21}\underline{a}_{22}}}, \tag{98}$$

$$\underline{Z}_{im2} = \sqrt{\frac{\underline{a}_{22}\underline{a}_{12}}{\underline{a}_{21}\underline{a}_{11}}}. \tag{99}$$

U ovim izrazima se uzima vrijednost kvadratnog korijena kod koje je realni dio pozitivan, tj. predstavlja otpornost pasivnog otpornika.

Imaž-impedanse mreže sa dva pristupa je moguće jednostavnije odrediti korištenjem ulaznih impedansi otvorene i kratko spojene mreže. Ulazne impedanse otvorene mreže su

$$\underline{Z}_{o1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}|_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{a}_{11}}{\underline{a}_{21}}, \tag{100}$$

$$\underline{Z}_{o2} = \frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_2}|_{\underline{I}_1=0} = \frac{\underline{a}_2 2}{\underline{a}_{21}}. \tag{101}$$

Ulazne impedanse kratko spojene mreže su

$$\underline{Z}_{k1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}|_{\underline{U}_2=0} = \frac{\underline{a}_{12}}{\underline{a}_{22}}, \tag{102}$$

$$\underline{Z}_{k2} = \frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_2}|_{\underline{U}_1=0} = \frac{\underline{a}_1 2}{\underline{a}_{11}}. \tag{103}$$

Imaž impedanse su sada

$$\underline{Z}_{im1} = \sqrt{\underline{Z}_{o1}\underline{Z}_{k1}}, \tag{104}$$

$$\underline{Z}_{im2} = \sqrt{\underline{Z}_{o2}\underline{Z}_{k2}}. \tag{105}$$

Ako je mreža sa dva pristupa zatvorena imaž impedansom $\underline{Z}_{im2}$, prenosna funkcija mreže (imaž prenosna funkcija) je

$$\begin{aligned}
\underline{\Gamma_{im}} &= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} + \ln\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\underline{a}_{11} + \frac{\underline{a}_{12}}{\underline{Z}_{im2}}\right) + \ln\left(\underline{a}_{21}\underline{Z}_{im2} + \underline{a}_{22}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\underline{a}_{11}\underline{a}_{21}\underline{Z}_{im2} + \underline{a}_{12}\underline{a}_{21} + \underline{a}_{11}\underline{a}_{22} + \frac{\underline{a}_{21}\underline{a}_{22}}{\underline{Z}_{im2}}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\underline{a}_{11}\underline{a}_{12}\underline{a}_{21}\underline{a}_{22}} + \underline{a}_{12}\underline{a}_{21} + \underline{a}_{11}\underline{a}_{22} + \sqrt{\underline{a}_{11}\underline{a}_{12}\underline{a}_{21}\underline{a}_{22}}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\underline{a}_{11}\underline{a}_{22}} + \sqrt{\underline{a}_{12}\underline{a}_{21}}\right)^2 = \\
&= \ln\left(\sqrt{\underline{a}_{11}\underline{a}_{22}} + \sqrt{\underline{a}_{12}\underline{a}_{21}}\right).
\end{aligned} \tag{106}$$

Pošto je

$$e^{\underline{\Gamma_{im}}} = \sqrt{\underline{a}_{11}\underline{a}_{22}} + \sqrt{\underline{a}_{12}\underline{a}_{21}} \tag{107}$$

i

$$e^{-\underline{\Gamma_{im}}} = \sqrt{\underline{a}_{11}\underline{a}_{22}} - \sqrt{\underline{a}_{12}\underline{a}_{21}}, \tag{108}$$

vrijedi

$$\operatorname{ch}\underline{\Gamma}_{im} = \sqrt{\underline{a}_{11}\underline{a}_{22}}. \tag{109}$$

Mreža sa dva pristupa je potpuno određena *imaž-parametrima*: $\underline{\Gamma}_{im}, \underline{Z}_{im1}$ i $\underline{Z}_{im2}$.

Ovdje bi bio koristan primjer, npr. imaž impedanse L-mreže, v. Wikipediju.

Iterativna impedansa mreže, $\underline{Z}_{it1}$, sa dva pristupa posmatrano u odnosu na prvi pristup je ulazna impedansa mreže kada je drugi pristup zatvoren istom impedansom $\underline{Z}_{it1}$, i obrnuto. Iterativna impedansa je ulazna impedansa beskonačno dugog niza kaskadno vezanih identičnih mreža. U opštem slučaju iterativne impedanse u odnosu na dva pristupa mreže nisu jednake. Jednakost iterativnih impedansi vrijedi u slučaju simetrične mreže.

Ako je mreža zatvorena iterativnom impedansom, $\underline{Z}_{it1}$, vrijedi

$$\underline{Z}_{it1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}, \tag{110}$$

pa je

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}. \tag{111}$$

Slijedi da su naponske i strujne prenosne funkcije mreže (iterativne prenosne funkcije) jednake

$$\underline{\Gamma}_{it} = \underline{\Gamma}_{u,it} = \underline{\Gamma}_{i,it}. \tag{112}$$

Mreža sa dva pristupa je potpuno određena *iterativnim parametrima*: $\underline{\Gamma}_{it}$, $\underline{Z}_{it1}$ i $\underline{Z}_{it2}$.

3.2 Sekundarni parametri simetričnih mreža

Za simetrične mreže važi $\det \mathbf{a} = 1$ i $\underline{a}_{11} = \underline{a}_{22}$ pa su imaž i iterativne impedanse mreže jednake i ta impedansa se zove *karakteristična impedansa* mreže

$$\underline{Z}_c = \underline{Z}_{im1} = \underline{Z}_{im2} = \underline{Z}_{it1} = \underline{Z}_{it2} = \sqrt{\frac{\underline{a}_{12}}{\underline{a}_{21}}}. \tag{113}$$

Dakle, ulazna impedansa simetrične mreže zatvorene njenom karakterističnom impedansom jednaka je karakterističnoj impedansi mreže.

Prenosna funkcija simetrične mreže sa dva pristupa zatvorene njenom karakterističnom impedansom je *karakteristična prenosna funkcija*

$$\underline{\Gamma}_c = \ln\left(\underline{a}_{11} + \sqrt{\underline{a}_{12}\underline{a}_{21}}\right). \tag{114}$$

Sada je

$$\operatorname{ch}\underline{\Gamma}_c = \underline{a}_{11}, \tag{115}$$

$$\operatorname{sh}\underline{\Gamma}_c = \sqrt{\underline{a}_{12}\underline{a}_{21}}. \tag{116}$$

Prva jednačina je poznata pod nazivom *Kempbelova jednačina*.

Sada je moguće izračunati a-parametre simetrične mreže sa dva pristupa u funkciji njenih karakterističnih parametara

$$\underline{a}_{11} = \underline{a}_{22} = \operatorname{ch}\underline{\Gamma}_c, \tag{117}$$

$$\underline{a}_{12} = \underline{Z}_c \operatorname{sh}\underline{\Gamma}_c, \tag{118}$$

$$\underline{a}_{21} = \frac{\operatorname{sh}\underline{\Gamma}_c}{\underline{Z}_c}. \tag{119}$$

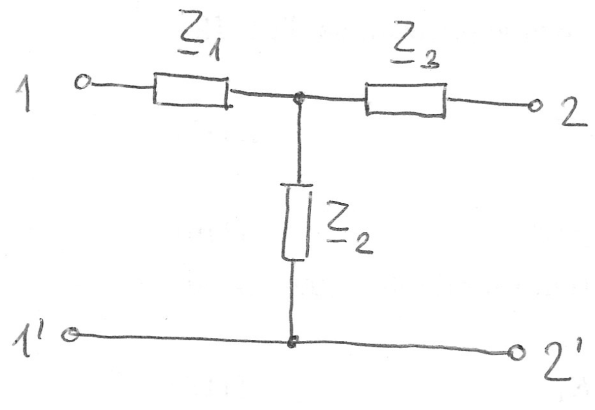
Ulazne impedanse otvorene i kratko spojene simetrične mreže su

$$\underline{Z}_o = \underline{Z}_c \operatorname{cth}\underline{\Gamma}_c, \tag{120}$$

$$\underline{Z}_c = \underline{Z}_c \operatorname{th}\underline{\Gamma}_c. \tag{121}$$

Karakteristična prenosna funkcija n kaskadno vezanih identičnih simetričnih mreža sa dva pristupa je jednaka

$$\underline{\Gamma}_{cn} = n\underline{\Gamma}_c. \tag{122}$$



Slika 18: T-mreža.

Karakteristična impedansa kaskade je jednaka karakterističnoj impedansi jedne mreže sa dva pristupa

$$\underline{Z}_{cn} = \underline{Z}_c. \tag{123}$$

3.3 Osnovne mreže sa dva pristupa

3.3.1 T-mreža

T-mreža sa dva pristupa prikazana je na Slici 18. Često se koristi i simetrična T-mreža kod koje je $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$. Z-parametri T-mreže su

$$\underline{z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2, \tag{124}$$

$$\underline{z}_{12} = \underline{z}_{21} = \underline{Z}_2, \tag{125}$$

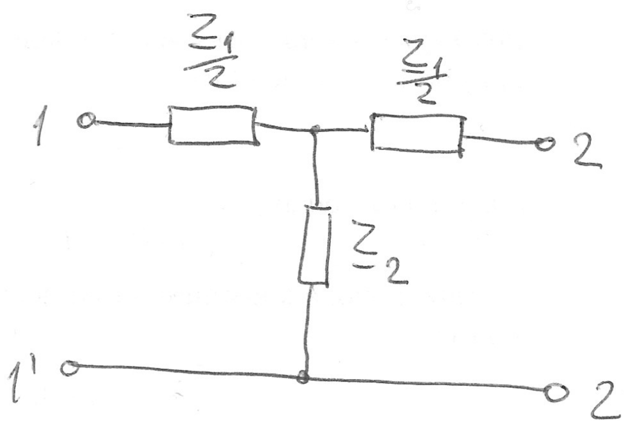
$$\underline{z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3. \tag{126}$$

Dvije mreže sa dva pristupa su *ekvivalentne* ako su im parametri jednaki. Dakle, elementi T-mreže ekvivalentne datoj mreži sa poznatim z-parametrima bi bili

$$\underline{Z}_1 = \underline{z}_{11} - \underline{z}_{12}, \tag{127}$$

$$\underline{Z}_2 = \underline{z}_{12}, \tag{128}$$

$$\underline{Z}_3 = \underline{z}_{22} - \underline{z}_{12}. \tag{129}$$



Slika 19: Simetrična T-mreža.

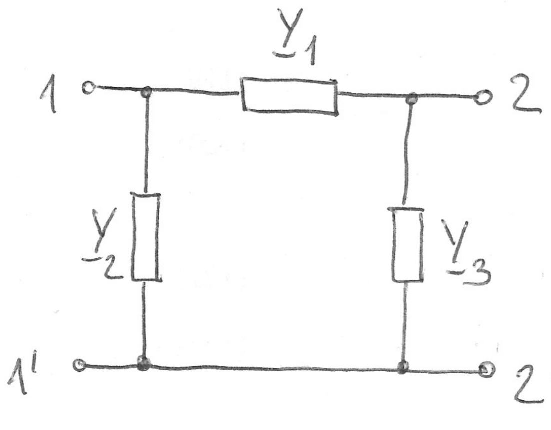
3.3.2 Π-mreža

Π-mreža sa dva pristupa je prikazana na Slici 20. Kod simetrične mreže je $\underline{Y}_2 = \underline{Y}_3$. Y-parametri Π-mreže su

$$\underline{y}_{11} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2, \tag{130}$$

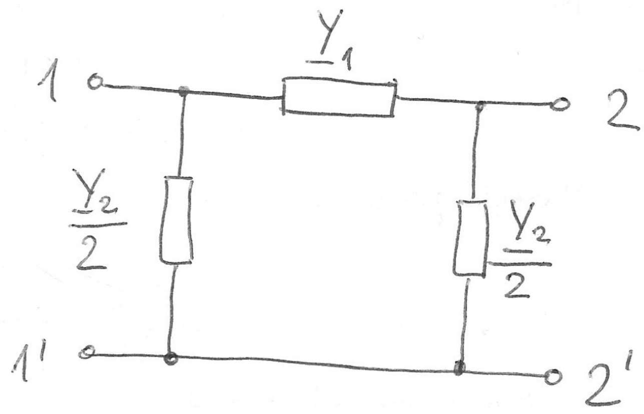
$$\underline{y}_{12} = \underline{y}_{21} = \underline{Y}_1, \tag{131}$$

$$\underline{y}_{22} = \underline{y}_{22} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_3. \tag{132}$$



Slika 20: Π-mreža.

Elementi Π-mreže ekvivalentne datoj mreži sa poznatim y-parametrima



Slika 21: Π-mreža.

su

$$\underline{Y}_1 = \underline{y}_{12}, \tag{133}$$

$$\underline{Y}_2 = \underline{y}_{11} - \underline{y}_{12}, \tag{134}$$

$$\underline{Y}_3 = \underline{y}_{22} - \underline{y}_{12}. \tag{135}$$

3.3.3 L-mreža

L-mreža sa dva pristupa je prikazana na Slici 22. Može se smatrati da je L-mreža dobijena vertikalnim presijecanjem simetrične T- ili Π-mreže. A-parametri mreže su

$$\underline{a}_{11} = 1 + \underline{Z}\underline{Y}, \tag{136}$$

$$\underline{a}_{12} = \underline{Z}, \tag{137}$$

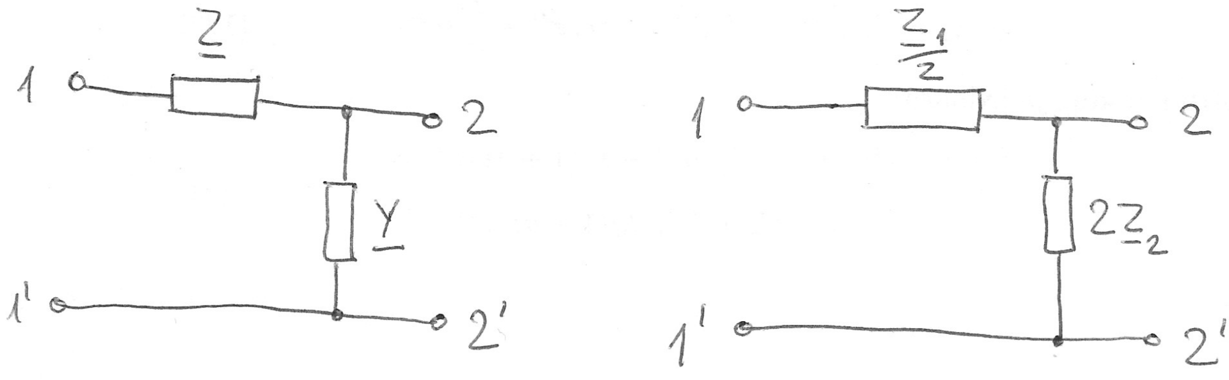
$$\underline{a}_{21} = \underline{Y}, \tag{138}$$

$$\underline{a}_{22} = 1. \tag{139}$$

Imaž impedanse L-mreže su

$$\underline{Z}_{im1} = \sqrt{\underline{Z}^2 + \frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}}, \tag{140}$$

$$\underline{Z}_{im2} = \frac{1}{\sqrt{\underline{Y}^2 + \frac{\underline{Y}}{\underline{Z}}}}. \tag{141}$$



Slika 22: L-mreža.

3.3.4 Rešetkasta mreža

Simetrična rešetkasta mreža je prikazana na Slici 23. Ulazna impedansa otvorene mreže je

$$\underline{Z}_o = \frac{\underline{Z}_a + \underline{Z}_b}{2}, \tag{142}$$

a ulazna impedansa kratko spojene mreže

$$\underline{Z}_k = 2\frac{\underline{Z}_a \underline{Z}_b}{\underline{Z}_a + \underline{Z}_b}. \tag{143}$$

Karakteristična impedansa mreže je

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_a \underline{Z}_b}, \tag{144}$$

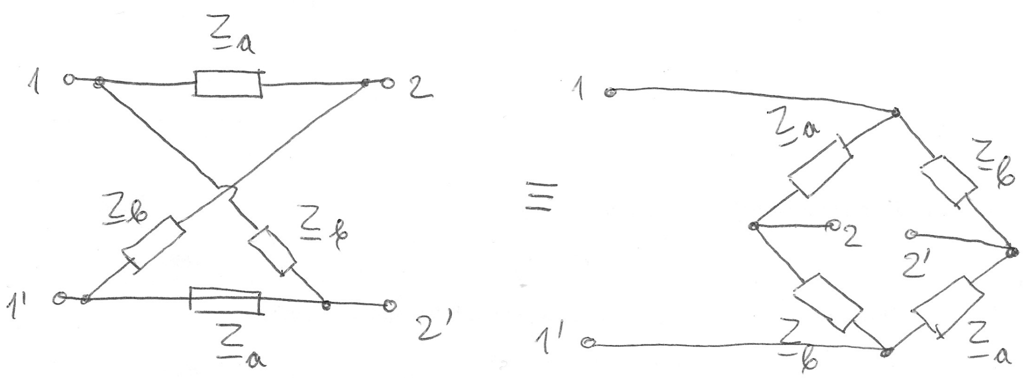
a karakteristična prenosna funkcija

$$\operatorname{th} \underline{\Gamma}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_o}}. \tag{145}$$

Na osnovu *Bartletove teoreme*, svaku simetričnu mrežu sa dva pristupa je moguće transformisati u rešetkastu mrežu. Simetričnu mrežu N najprije podijelimo u odnosu na ravan simetrije na dvije identične mreže sa dva pristupa $\frac{N}{2}$. Odredimo ulazne impedanse polovine mreže u pri otvorenom, $\underline{Z}_o$, i kratko spojenom, $\underline{Z}_k$ izlaznom pristupu. Impedanse rešetkaste mreže su sada

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_k, \tag{146}$$

$$\underline{Z}_b = \underline{Z}_o. \tag{147}$$



Slika 23: Rešetkasta mreža.