

Vodovi

25. novembar 2015

Kada je talasna dužina signala reda veličine fizičkih dimenzija komponenta električnog kola više ne možemo smatrati da se vrijednosti napona i struja u svakoj tački kola uspostavljaju trenutno već moramo uzeti u obzir i efekte prostiranja elektromagnetnih talasa. U ovom slučaju se radi o mreži sa raspodijeljenim parametrima. Detaljna analiza mreža sa raspodijeljenim parametrima zahtijeva korištenje Maksvelovih jednačina elektromagnetnog polja. Međutim, kada se radi o signalima frekvencija do reda 10 GHz, moguće je analizu prostiranja signala po vodovima značajno uprostiti.

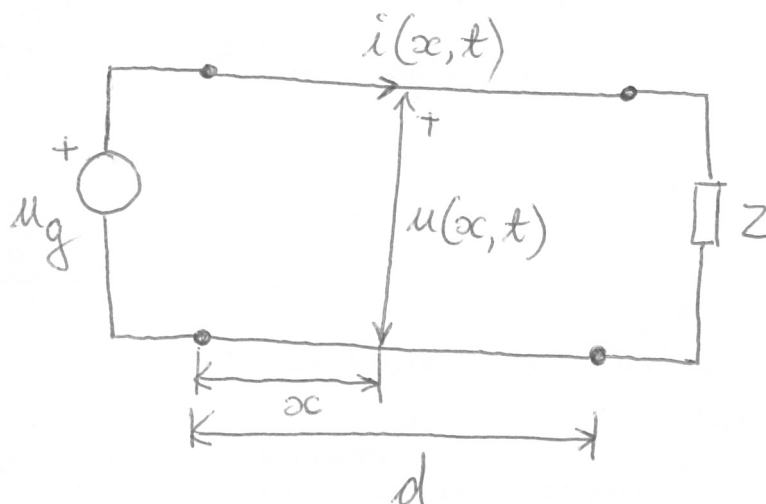
Prostiranje signala po vodovima je dio inženjerske discipline koja se naziva mikrotalasna tehnika i bavi se proučavanjem, analizom i projektovanjem uređaja namijenjenih za rad na visokim frekvencijama, odnosno, sa signalima malih talasnih dužina. Okvirno se mikrotalasima smatraju elektromagnetne oscilacije u frekvencijskom opsegu od 300 MHz do 300 GHz. Talasne dužine u slobodnom prostoru koje odgovaraju ovim frekvencijama su između 1 m i 1 mm. Primjene mikrotalasne tehnike su u oblastima bežičnih telekomunikacija (mobilna telefonija, bežične računarske mreže, satelitske telekomunikacije), sistema za globalno pozicioniranje, radarskih sistema, itd. S obzirom na to da se električne mreže u mikrotalasnoj tehnici više ne mogu posmatrati kao mreže sa koncentrisanim parametrima, realizacija mikrotalasnih uređaja zahtijeva drugačije elemente i postupke realizacije.

U sisteme za vođenje elektromagnetnih talasa spadaju: slobodan prostor, vodovi i talasovodi. U Teoriji električnih kola ograničićemo razmatranje na vodove (transmisionne linije). Vodovi se sastoje od najmanje dva provodnika. Česti primjeri vodova su dvožični i koaksijalni vodovi koji se koriste na nižim frekvencijama, a značajni su i trakasti vodovi sačinjeni od metalnih traka i folija na dielektričnom supstratu. Trakasti vodovi su značajni za realizaciju mikrotalasnih integrisanih kola.

1 Jednačine telegrafičara

Posmatraćemo homogen dvoprovodnički vod, kao na Slici 1. Homogen vod ima iste geometrijske i fizičke osobine na svakom presjeku. U tom slučaju mogu se uvesti podužni parametri voda:

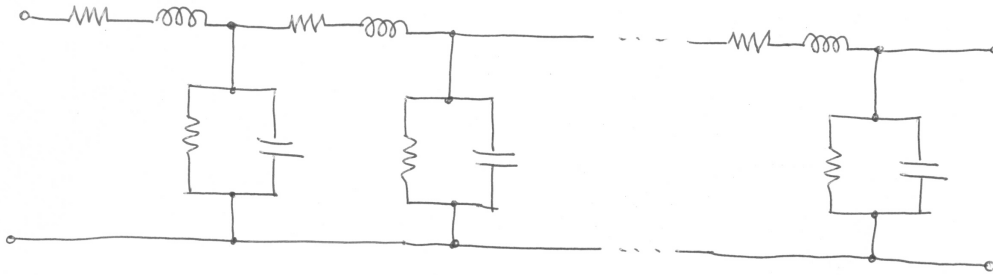
- r - podužna otpornost (Ω/m),
- l - podužna induktivnost (H/m),
- c - podužna kapacitivnost (F/m) i
- g - podužna odvodnost (S/m).



Slika 1: Dvoprovodnički vod. Napon i struja na određenom mjestu navodu zavise od udaljenosti od generatora i vremena.

Podužna otpornost modeluje gubitke u provodnicima, a podužna odvodnost gubitke u dielektriku između provodnika. Podužna induktivnost je posljedica sopstvene induktivnosti provodnika, a podužna kapacitivnost modeluje kapacitivne efekte koji se javljaju između dva provodnika. Podužna induktivnost i kapacitivnost povezane su sa brzinom prostiranja elektromagnetnih talasa navodu

$$v^2 = \frac{1}{lc}. \quad (1)$$



Slika 2: Model voda kaskadnom vezom mreža sa koncentrisanim parametrima.

Brzina prostiranja talasa na vodu jednaka je brzini prostiranja ravanskog talasa u neograničenoj sredini sa parametrima ϵ i μ

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (2)$$

Uvode se još podužna impedansa

$$\underline{z} = r + j\omega l \quad (3)$$

i podužna admitansa

$$\underline{y} = g + j\omega c. \quad (4)$$

Homogen dvoprovodnički vod se može predstaviti kaskadnom vezom mreža sa koncentrisanim parametrima kao na Slici 2. Svaka mreža na slici predstavlja model sekcije voda dužine Δx kao što je prikazano na Slici 3. Ovaj model dobro opisuje sekciju voda kada $\Delta x \rightarrow 0$.

Neka su napon i struja na presjeku voda na udaljenosti x od njegovog početka i u trenutku t jednaki $u(x, t)$ i $i(x, t)$, respektivno. Prema Kirhofovima zakonima za kolo na Slici 4 vrijedi

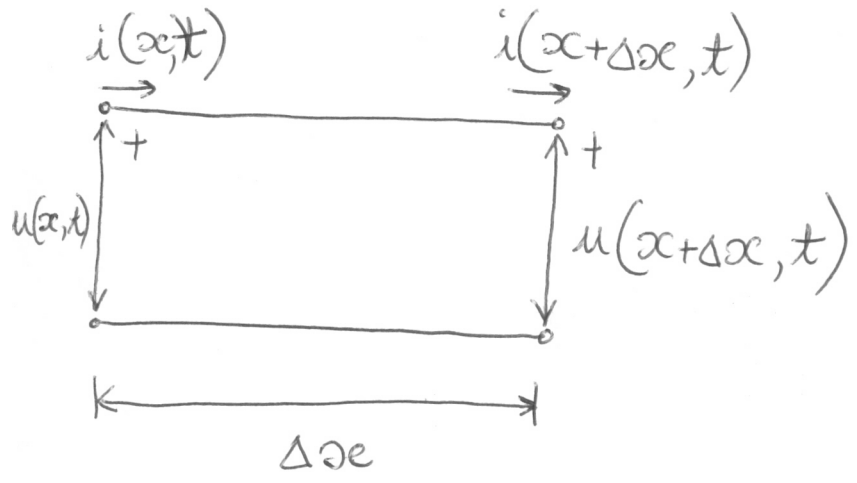
$$u(x, t) - u(x + \Delta x, t) = r\Delta x i(x, t) + l\Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}, \quad (5)$$

$$i(x, t) - i(x + \Delta x, t) = g\Delta x u(x, t) + c\Delta x \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}. \quad (6)$$

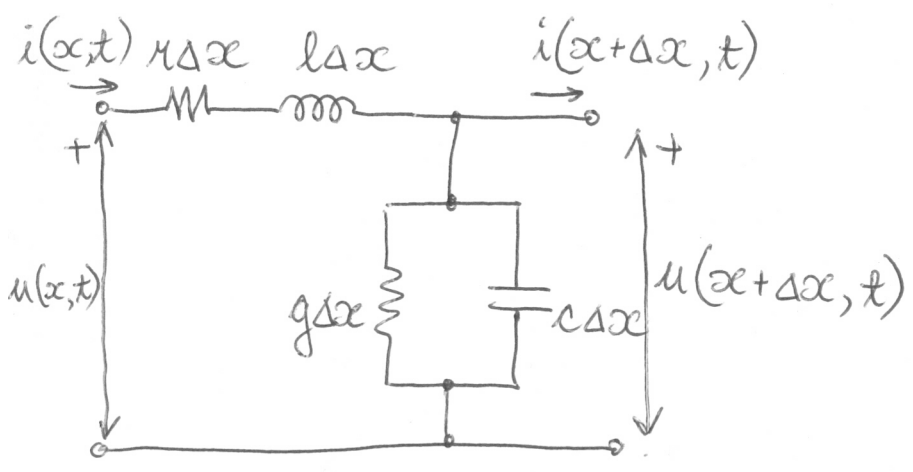
Aproksimacijom pomoću Tejlorovog reda kada $\Delta x \rightarrow 0$ dobijamo

$$u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Delta x, \quad (7)$$

$$i(x + \Delta x, t) = i(x, t) + \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} \Delta x. \quad (8)$$



Slika 3: Sekcija voda.



Slika 4: Model sekcije voda.

Sada je

$$-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = ri(x, t) + l \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}, \quad (9)$$

$$-\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = gu(x, t) + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}. \quad (10)$$

Ove jednačine predstavljaju model voda u vremenskom domenu. Prvi put ih je izveo Oliver Hevisajd za telegrafске vodove pa su poznate pod nazivom *jednačine telegrafičara*. Uobičajeno je da se razdvoje jednačine po naponu i struji. Diferenciranjem prve jednačine po x , a druge po t i sređivanjem dobijamo

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = rgu + (rc + gl) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + lc \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}. \quad (11)$$

Analogno, diferenciranjem prve jednačine po t , a druge po x i sređivanjem, dobijamo

$$\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} + rgi + (rx + gl) \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + lc \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2}. \quad (12)$$

1.1 Kompleksne jednačine prostiranja

Jednačine telegrafičara su u opštem slučaju teške za rješavanje. Međutim, u praktično značajnom slučaju ustaljenog prostoperiodičnog režima, moguće je iskoristiti kompleksne reprezentacije napona i struja na vodu. Pretpostavimo da su napon i struja na vodu u obliku

$$u(x, t) = \sqrt{2}U(x) \cos(\omega t + \theta(x)), \quad (13)$$

$$i(x, t) = \sqrt{2}I(x) \cos(\omega t + \psi(x)). \quad (14)$$

Primjetimo da su amplituda i početna faza prostoperiodičnog napona i struje zavisni od položaja na vodu. Kompleksni predstavnici su takođe funkcije prostorne koordinate

$$u(x, t) \leftrightarrow U(x) e^{j\theta(x)} = \underline{U}(x) = \underline{U}, \quad (15)$$

$$i(x, t) \leftrightarrow I(x) e^{j\psi(x)} = \underline{I}(x) = \underline{I}. \quad (16)$$

U nastavku ćemo, radi jednostavnijeg pisanja, podrazumijevati da su vrijednosti kompleksnih predstavnika napona i struje funkcije vremenske promjenljive x i nećemo to naglašavati. Kompleksni predstavnici parcijalnih izvoda

napona i struje po vremenu su

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \leftrightarrow j\omega \underline{U}(x) = j\omega \underline{U}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \leftrightarrow \frac{d\underline{U}(x)}{dx} = \frac{d\underline{U}}{dx}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \leftrightarrow j\omega \underline{I}(x) = j\omega \underline{I}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} \leftrightarrow \frac{d\underline{I}(x)}{dx} = \frac{d\underline{I}}{dx}. \quad (20)$$

Jednačine prostiranja u kompleksnom obliku su sada

$$-\frac{d\underline{U}}{dx} = (r + j\omega l) \underline{I} = \underline{zI}, \quad (21)$$

$$-\frac{d\underline{I}}{dx} = (g + j\omega c) \underline{U} = \underline{yU}, \quad (22)$$

odnosno,

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \underline{zyU}, \quad (23)$$

$$\frac{d^2 \underline{I}}{dx^2} = \underline{zyI}. \quad (24)$$

Veličina

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{zy}} = \alpha + j\beta, \quad (25)$$

naziva se koeficijent prostiranja. Njen realni dio α je koeficijent slabljenja, a imaginarni β fazni koeficijent.

Jednačine prostiranja su sada

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} - \underline{\gamma}^2 \underline{U} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{d^2 \underline{I}}{dx^2} - \underline{\gamma}^2 \underline{I} = 0. \quad (27)$$

Ovo su talasne jednačine za talase napona i struje na vodu. Rješenja ovih jednačina su oblika

$$\underline{U} = \underline{C}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{C}_2 e^{\underline{\gamma}x}, \quad (28)$$

$$\underline{I} = \underline{C}_3 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{C}_4 e^{\underline{\gamma}x}. \quad (29)$$

Pošto iz (22) slijedi

$$\underline{I} = -\frac{1}{\underline{Z}} \frac{d\underline{U}}{dx} = \underline{C}_1 \frac{\underline{\gamma}}{\underline{z}} e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{C}_2 \frac{\underline{\gamma}}{\underline{z}} e^{\underline{\gamma}x}, \quad (30)$$

imamo da je

$$\underline{C}_3 = \underline{C}_1 \frac{\gamma}{z} = \underline{C}_1 \sqrt{\frac{y}{z}} = \frac{\underline{C}_1}{\underline{Z}_c}, \quad (31)$$

$$\underline{C}_4 = -\underline{C}_2 \frac{\gamma}{z} = -\underline{C}_2 \sqrt{\frac{y}{z}} = -\frac{\underline{C}_2}{\underline{Z}_c}, \quad (32)$$

pri čemu je iskorištena (25). Veličina

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{z}{y}}, \quad (33)$$

naziva se *karakteristična impedansa* voda. Kompleksni predstavnici napona i struje na vodu su

$$\underline{U} = \underline{C}_1 e^{-\gamma x} + \underline{C}_2 e^{\gamma x}, \quad (34)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{C}_1}{\underline{Z}_c} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{C}_2}{\underline{Z}_c} e^{\gamma x}. \quad (35)$$

Konstante \underline{C}_1 i \underline{C}_2 imaju prirodu napona i određuju se na osnovu rubnih uslova.

U većini praktičnih slučajeva, gubici na vodu su zanemarljivi $r \approx 0$, $g \approx 0$ pa je koeficijent prostiranja u tom slučaju

$$\underline{\gamma} = j\omega\sqrt{lc}, \quad (36)$$

odnosno $\alpha = 0$ i $\beta = \omega\sqrt{lc}$. Karakteristična impedansa je u tom slučaju realna i iznosi

$$Z_c = \sqrt{\frac{l}{c}}. \quad (37)$$

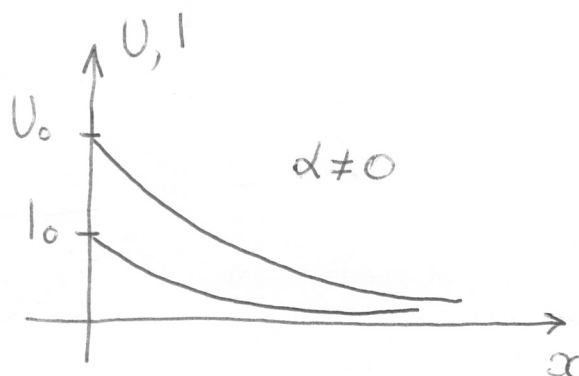
Može se primjetiti da karakteristična impedansa voda bez gubitaka ne zavisi od njegove dužine.

2 Neograničen vod

Na neograničenom vodu nema refleksije pa je u (34) i (35) $\underline{C}_2 = 0$. Takođe je vrijednost koeficijenta \underline{C}_1 jednaka kompleksnom naponu na početku voda. Sada je

$$\underline{U} = \underline{C}_1 e^{-\gamma x} = \underline{U}_0 e^{-\gamma x}, \quad (38)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{C}_1}{\underline{Z}_c} e^{-\gamma x} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_c} e^{-\gamma x}. \quad (39)$$



Slika 5: Efektivne vrijednosti napona i struje na neograničenom vodu u zavisnosti od pozicije na vodu.

Pošto su

$$\underline{U}_0 = U_0 e^{j\theta_0},$$

$$\underline{Z}_c = Z_c e^{j\phi_c},$$

$$\gamma = \alpha + j\beta,$$

imamo

$$\underline{U} = U_0 e^{-\alpha x} e^{j(\theta_0 - \beta x)}, \quad (40)$$

$$\underline{I} = \frac{U_0}{Z_c} e^{-\alpha x} e^{j(\theta_0 - \beta x - \phi_c)}. \quad (41)$$

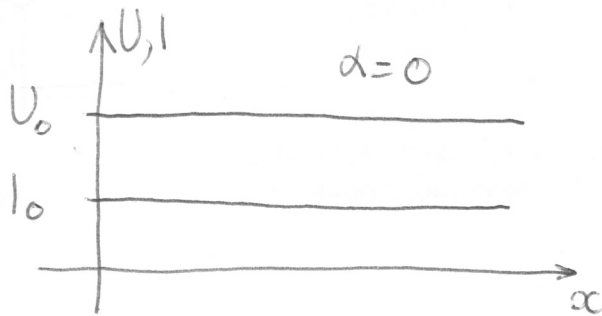
Trenutne vrijednosti napona i struje su

$$u(x, t) = \sqrt{2} U_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \theta_0 - \beta x), \quad (42)$$

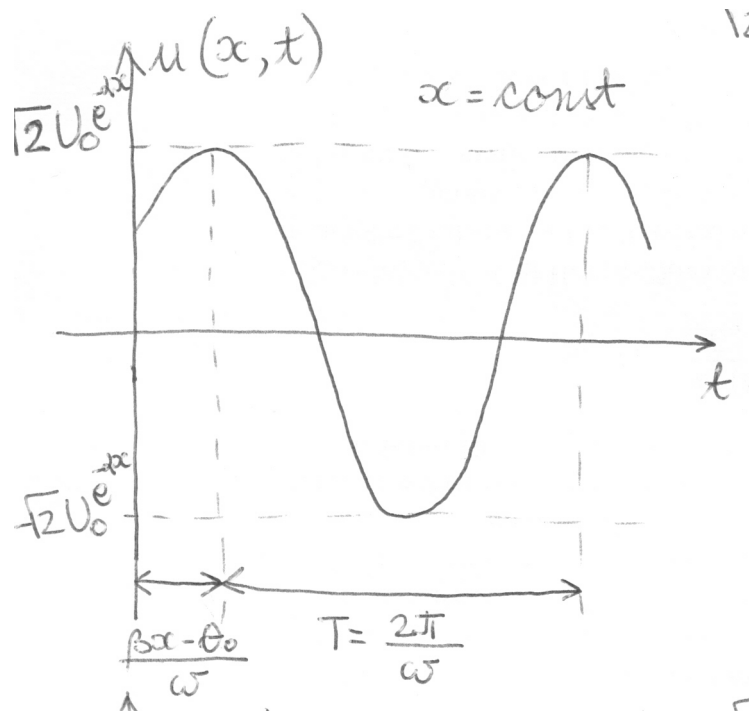
$$i(x, t) = \sqrt{2} \frac{U_0}{Z_c} e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \theta_0 - \beta x - \phi_c). \quad (43)$$

Iz ovih jednačina zaključujemo da su napon i struja na jednom mjestu na vodu (fiksirano x) prostoperiodične veličine sa frekvencijom ω . Posmatrano u jednom trenutku (fiksirano t), efektivne vrijednosti napona i struje eksponencijalno opadaju, Slika 5, dok se, u slučaju voda bez gubitaka ($\alpha = 0$), efektivne vrijednosti napona i struje ne mijenjaju duž voda, Slika 6.

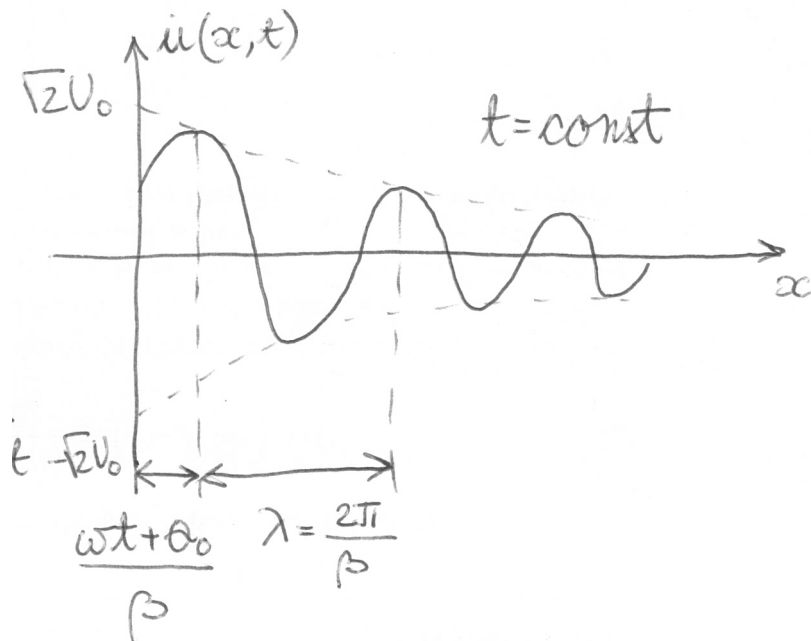
Talasnici napona na neograničenom vodu su prikazani na Slikama 7 i 8. Na Slici 7 prikazana je zavisnost napona od vremena na jednom mjestu na vodu. Sa druge strane, na Slici 8 prikazana je zavisnost napona od mjesta na vodu, u jednom trenutku.



Slika 6: Efektivne vrijednosti napona i struje na neograničenom vodu bez gubitaka u zavisnosti od pozicije na vodu.



Slika 7: Zavisnost napona na jednom mjestu neograničenog voda od vremena.



Slika 8: Zavisnost napona od mjesta na vodu u jednom trenutku.

Talasni oblici struje na neograničenom vodu su prikazani na Slikama 9 i 10. Na Slici 7 prikazana je zavisnost struje od vremena na jednom mjestu na vodu. Sa druge strane, na Slici 10 prikazana je zavisnost struje od mjesta na vodu, u jednom trenutku.

Impedansa na proizvoljnom mjestu na neograničenom vodu je

$$\underline{Z}(x) = \frac{U(x)}{I(x)} = \underline{Z}_c. \quad (44)$$

Dakle, karakteristična impedansa voda je impedansa neograničenog voda.

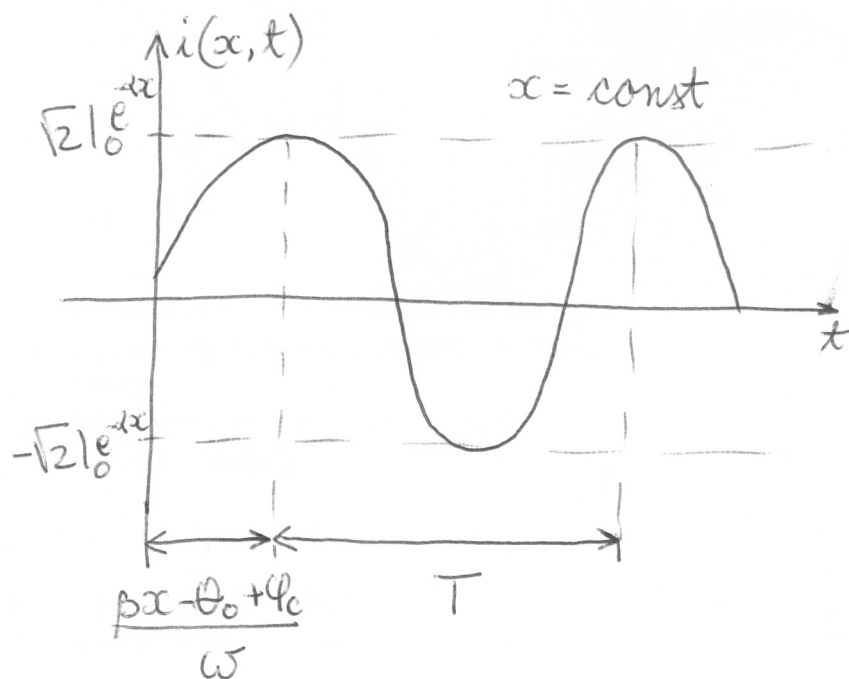
3 Talasna dužina i brzina prostiranja talasa

Na vodu se javljaju talasi napona i struje. Talasna dužina ovih talasa jednaka je

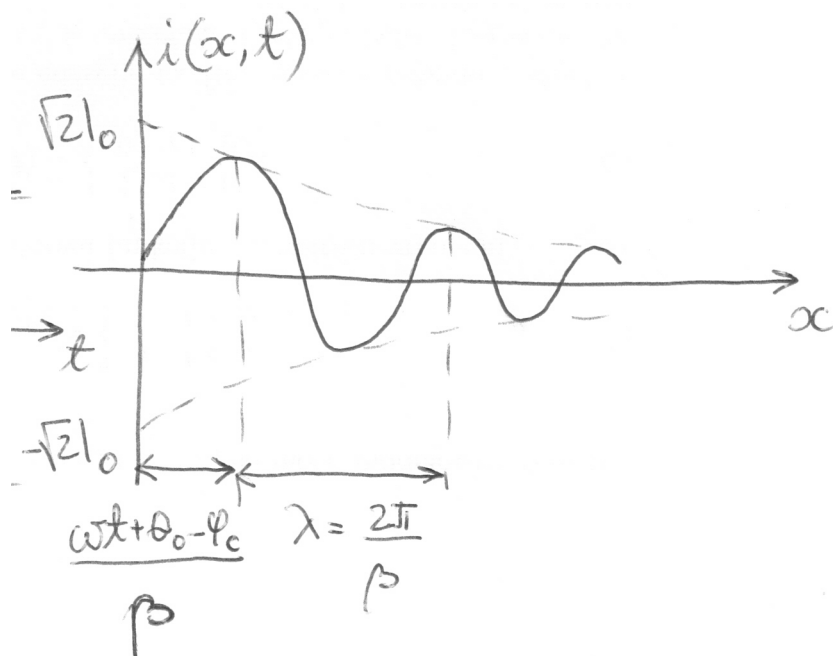
$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (45)$$

U datom trenutku t i na poziciji x faza napona na neograničenom vodu je

$$\theta = \omega t + \theta_0 - \beta x. \quad (46)$$



Slika 9: Zavisnost struje na jednom mjestu neograničenog voda od vremena.



Slika 10: Zavisnost struje od mjesta na vodu u jednom trenutku.

Ako fiksiramo vrijednost faze θ , možemo zaključiti da je, u trenutku t , trenutna faza napona jednaka θ na mjestu

$$x = \frac{\omega t + \theta_0 - \theta}{\beta}. \quad (47)$$

Tokom vremena, ova vrijednost faze se pomjera duž voda. Brzina kojom se faza “kreće” je

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \quad (48)$$

Dakle, talasi se pomjeraju duž neograničenog voda, udaljavajući se od generatora brzinom v . Na ovom vodu postoji napredovanje ili prostiranje talasa. Brzina kojom se prostiru talasi zove se brzina prostiranja.

4 Ograničen vod

Kada je vod ograničen, dužine d , i talas dođe do njegovog kraja doći će do pojave refleksije talasa. Zbog toga će talasi napona i struje na vodu biti superpozicija direktnog i reflektovanog talasa. Već je pokazano da su kompleksni napon i struja na vodu

$$\underline{U} = \underline{C}_1 e^{-\gamma x} + \underline{C}_2 e^{\gamma x}, \quad (49)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{C}_1}{\underline{Z}_c} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{C}_2}{\underline{Z}_c} e^{\gamma x}. \quad (50)$$

Imajući u vidu da prvi članovi u obje jednačine odgovara struji, odnosno, naponu na neograničenom vodu na kojem nema refleksije, slijedi da prvi članovi u ovim jednačinama predstavljaju direktne, a drugi članovi reflektovane talase napona, odnosno, struje.

Da bismo odredili vrijednosti integracionih konstanti \underline{C}_1 i \underline{C}_2 potrebni su nam granični uslovi za struju i napon. U ovu svrhu možemo koristiti vrijednosti napona i struja na početku ili kraju voda

$$\underline{U}(0) = \underline{U}_0, \quad (51)$$

$$\underline{I}(0) = \underline{I}_0, \quad (52)$$

odnosno,

$$\underline{U}(d) = \underline{U}_d, \quad (53)$$

$$\underline{I}(d) = \underline{I}_d. \quad (54)$$

Iskoristićemo granične uslove na kraju voda, tj. za $x = d$. Tada je

$$\underline{C}_1 e^{-\gamma d} + \underline{C}_2 e^{\gamma d} = \underline{U}_d, \quad (55)$$

$$\underline{C}_1 e^{-\gamma d} - \underline{C}_2 e^{\gamma d} = \underline{Z}_c \underline{I}_d. \quad (56)$$

Rješavanjem ovog sistema i uvrštavanjem u (34) i (35) dobijamo

$$\underline{U} = \frac{1}{2} (\underline{U}_d + \underline{Z}_c \underline{I}_d) e^{\gamma(d-x)} + \frac{1}{2} (\underline{U}_d - \underline{Z}_c \underline{I}_d) e^{-\gamma(d-x)}, \quad (57)$$

$$\underline{I} = \frac{1}{2\underline{Z}_c} (\underline{U}_d + \underline{Z}_c \underline{I}_d) e^{\gamma(d-x)} - \frac{1}{2\underline{Z}_c} (\underline{U}_d - \underline{Z}_c \underline{I}_d) e^{-\gamma(d-x)}, \quad (58)$$

odnosno,

$$\underline{U} = \underline{U}_d \operatorname{ch} \underline{\gamma}(d-x) + \underline{Z}_c \underline{I}_d \operatorname{sh} \underline{\gamma}(d-x), \quad (59)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_d}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma}(d-x) + \underline{I}_d \operatorname{ch} \underline{\gamma}(d-x), \quad (60)$$

Korištenjem ovih jednačina moguće je odrediti kompleksni napon i struju na proizvoljnom mjestu na vodu, pod uslovom da su poznati kompleksni napon i struja na početku voda.

Ulazni napon i struja voda se dobijaju za $x = 0$

$$\underline{U}_0 = \underline{U}_d \operatorname{ch} \underline{\gamma}d + \underline{Z}_c \underline{I}_d \operatorname{sh} \underline{\gamma}d, \quad (61)$$

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_d}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma}d + \underline{I}_d \operatorname{ch} \underline{\gamma}d. \quad (62)$$

Ove jednačine sugerišu da je vod moguće posmatrati kao mrežu sa dva pristupa čiji su a-parametri

$$\underline{a}_{11} = \operatorname{ch} \underline{\gamma}d, \quad (63)$$

$$\underline{a}_{12} = \underline{Z}_c \operatorname{sh} \underline{\gamma}d, \quad (64)$$

$$\underline{a}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma}d, \quad (65)$$

$$\underline{a}_{22} = \operatorname{ch} \underline{\gamma}d. \quad (66)$$

Lako se provjerava da je $\det \mathbf{a} = \underline{a}_{11} \underline{a}_{22} - \underline{a}_{12} \underline{a}_{21} = 1$ pa je ova mreža sa dva pristupa recipročna i simetrična.

Karakteristični prenosni koeficijent ove mreže je

$$\underline{\Gamma}_c = \underline{\gamma}d, \quad (67)$$

što znači da je koeficijent prostiranja voda, u stvari, podužni karakteristični prenosni koeficijent. Takođe, karakteristična impedansa ove mreže sa dva pristupa jednaka je karakterističnoj impedansi voda.

Ako sa $\underline{Z} = \underline{z}d$ označimo ukupnu rednu impedansu voda, a sa $\underline{Y} = \underline{y}d$ ukupnu odvodnu admitansu voda dobijamo da je karakteristična impedansa jednaka

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{z}}{\underline{y}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}}, \quad (68)$$

a karakteristična prenosna funkcija

$$\underline{\Gamma}_c = \underline{\gamma}d = \frac{1}{d}\sqrt{\underline{z}\underline{y}d} = \sqrt{\underline{Z}\underline{Y}}. \quad (69)$$

Ako je vod bez gubitaka, tada je $\alpha = 0$ pa je

$$\text{ch } \underline{\gamma}x = \text{ch } j\beta x = \cos \beta x, \quad (70)$$

$$\text{sh } \underline{\gamma}x = \text{sh } j\beta x = j \sin \beta x, \quad (71)$$

odakle slijedi

$$\underline{U} = \underline{U}_d \cos \beta (d - x) + j\underline{Z}_c \underline{I}_d \sin \beta (d - x), \quad (72)$$

$$\underline{I} = j \frac{\underline{U}_d}{\underline{Z}_c} \sin \beta (d - x) + \underline{I}_d \cos \beta (d - x). \quad (73)$$

Razmotrićemo sada nekoliko karakterističnih slučajeva ograničenog voda.

4.1 Vod zatvoren karakterističnom impedansom

Pretpostavimo sada da je vod zatvoren svojom karakterističnom impedansom. Kompleksni napon i struja na kraju voda su povezani relacijom

$$\underline{U}_d = \underline{Z}_c \underline{I}_d, \quad (74)$$

pa su kompleksni napon i struja na vodu

$$\underline{U} = \underline{Z}_c \underline{I}_d [\text{ch } \underline{\gamma} (d - x) + \text{sh } \underline{\gamma} (d - x)] = \underline{Z}_c \underline{I}_d e^{\underline{\gamma}(d-x)}, \quad (75)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_d [\text{sh } \underline{\gamma} (d - x) + \text{ch } \underline{\gamma} (d - x)] = \underline{I}_d e^{\underline{\gamma}(d-x)}. \quad (76)$$

Kompleksni napon i struja na početku vodu su

$$\underline{U}_0 = \underline{Z}_c \underline{I}_d e^{\underline{\gamma}d}, \quad (77)$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_d e^{\underline{\gamma}d}, \quad (78)$$

pa se kompleksni napon i struja na vodu mogu izraziti i u funkciji napona i struje na početku voda

$$\underline{U} = \underline{U}_0 e^{-\gamma x}, \quad (79)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_0 e^{-\gamma x}. \quad (80)$$

Trenutne vrijednosti napona i struje na vodu su sada

$$u(x, t) = \sqrt{2} \underline{U}_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \theta_0 - \beta x), \quad (81)$$

$$i(x, t) = \sqrt{2} \underline{I}_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \theta_0 - \phi_c - \beta x). \quad (82)$$

Ove jednačine su identične jednačinama kojima su dati napon i struja na neograničenom vodu pa zaključujemo da se vod zatvoren svojom karakterističnom impedansom ponaša kao neograničen vod.

Impedansa na proizvoljnom mjestu na vodu je

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z}_c. \quad (83)$$

Dakle, impedansa na proizvoljnom mjestu na vodu zatvorenom karakterističnom impedansom jednaka je karakterističnoj impedansi voda.

Kompleksna snaga na vodu je

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = \underline{U}_0 e^{-\gamma x} \frac{\underline{U}_0^*}{\underline{Z}_c^*} e^{-\gamma^* x} = \frac{U_0^2}{\underline{Z}_c^*} e^{-2\alpha x}. \quad (84)$$

Odavde je

$$\underline{S} = P + jQ = \frac{U_0^2}{Z_c} e^{-2\alpha x} (\cos \phi_c + j \sin \phi_c). \quad (85)$$

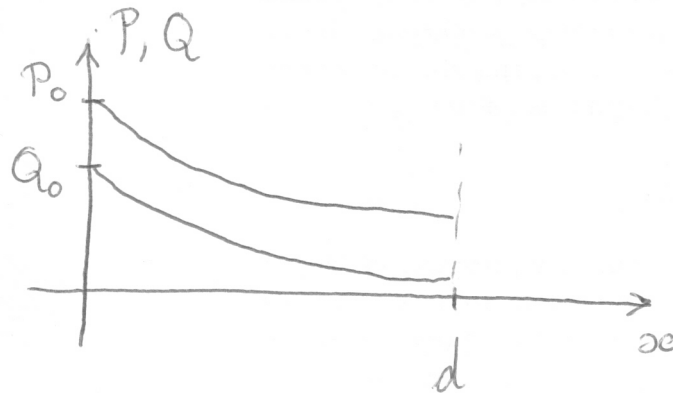
Vidimo da na vodu zatvorenom karakterističnom impedansom aktivna i reaktivna snaga opadaju sa udaljenošću od početka voda, Slika 11. Ukoliko je vod bez gubitaka, $\alpha = 0$, pa su i aktivna i reaktivna snaga konstantne duž voda.

4.2 Otvoren vod

Za otvoren vod važi $\underline{I}_d = 0$ pa jednačine telegrafičara postaju

$$\underline{U} = \underline{U}_d \operatorname{ch} \underline{\gamma} (d - x), \quad (86)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_d}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} (d - x). \quad (87)$$



Slika 11: Zavisnost aktivne i reaktivne snage od udaljenosti od početka voda za slučaj kada je vod zatvoren svojom karakterističnom impedansom.

U ovom slučaju napon i struja imaju složenu prostornu raspodjelu. Faze napona i struje nisu linearne funkcije udaljenosti od generatora, x , pa brzina prostiranja faze, u opštem slučaju, nije konstantna.

Ulazna impedansa otvorenog voda je

$$\underline{Z}_o = \frac{U_0}{I_0} = \underline{Z}_c \coth \underline{\gamma} d. \quad (88)$$

Napon i struja na otvorenom vodu se mogu napisati u obliku

$$\underline{U} = \underline{U}_d \operatorname{ch} \underline{\gamma} (d - x) = \frac{1}{2} \underline{U}_d e^{\underline{\gamma}(d-x)} + \frac{1}{2} \underline{U}_d e^{-\underline{\gamma}(d-x)} = \underline{U}' + \underline{U}'', \quad (89)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_d}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} (d - x) = \frac{\underline{U}_d}{2\underline{Z}_c} e^{\underline{\gamma}(d-x)} - \frac{\underline{U}_d}{2\underline{Z}_c} e^{-\underline{\gamma}(d-x)} = \underline{I}' + \underline{I}''. \quad (90)$$

Veličine \underline{U}' i \underline{I}' su kompleksni napon i struja direktnog talasa, a \underline{U}'' i \underline{I}'' su kompleksni napon i struja reflektovanog talasa.

Kompleksni napon direktnog talasa na početku voda je

$$\underline{U}'_0 = \frac{1}{2} \underline{U}_d e^{\underline{\gamma} d}, \quad (91)$$

pa je

$$\underline{U} = \underline{U}'_0 e^{-\underline{\gamma} x} + \underline{U}'_0 e^{-\underline{\gamma}(2d-x)} = \underline{U}' + \underline{U}'', \quad (92)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}'_0}{\underline{Z}_c} e^{-\underline{\gamma} x} - \frac{\underline{U}'_0}{\underline{Z}_c} e^{-\underline{\gamma}(2d-x)} = \underline{I}' + \underline{I}''. \quad (93)$$

Koeficijent refleksije na vodu se definiše kao količnik kompleksnih napona reflektovanog i direktnog talasa

$$\underline{\Gamma} = \frac{\underline{U}''}{\underline{U}'}. \quad (94)$$

Lako se može pokazati da vrijedi i

$$\underline{\Gamma} = -\frac{\underline{I}''}{\underline{I}'}. \quad (95)$$

U slučaju otvorenog voda koeficijent refleksije je

$$\underline{\Gamma} = e^{-2\gamma(d-x)}. \quad (96)$$

Koeficijent refleksije na kraju voda je $\underline{\Gamma} = 1$. Znači napon reflektovanog talasa na kraju otvorenog voda je jednak naponu direktnog talasa. Takođe, struja reflektovanog talasa jednaka je struji direktnog talasa, ali ima suprotnu fazu.

Koeficijent refleksije na otvorenom vodu bez gubitaka je

$$\underline{\Gamma} = e^{-j2\beta(d-x)}. \quad (97)$$

Kompleksni napon i struja na otvorenom vodu bez gubitaka su

$$\underline{U} = \underline{U}_d \cos \beta (d - x), \quad (98)$$

$$\underline{I} = jZ_c \underline{U}_d \sin \beta (d - x). \quad (99)$$

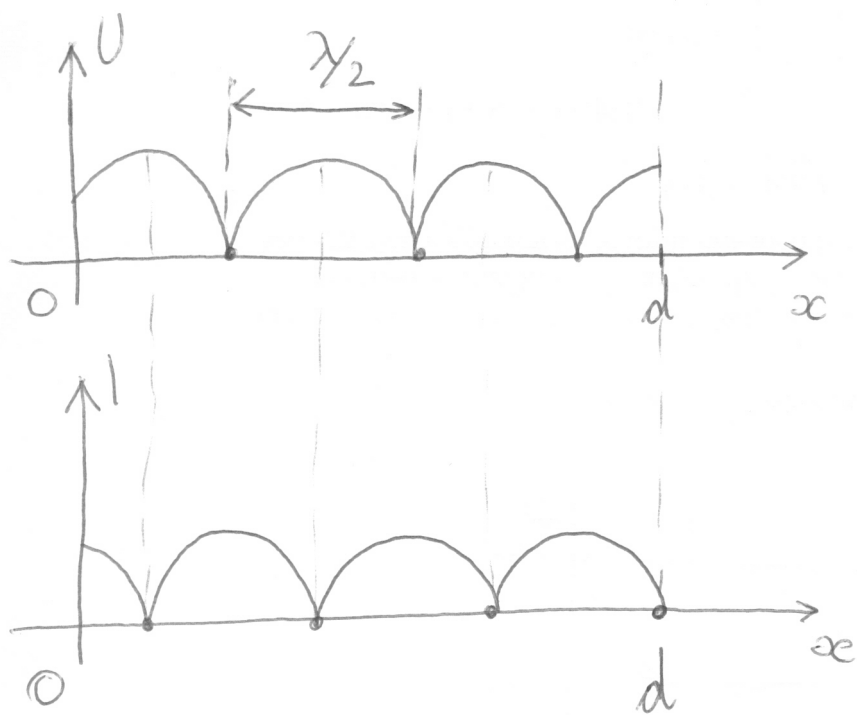
U drugoj jednačini je iskorištena činjenica da je karakteristična impedansa voda bez gubitaka realna veličina. Efektivne vrijednosti napona i struje su

$$U = U_d |\cos \beta (d - x)|, \quad (100)$$

$$I = Z_c U_d |\sin \beta (d - x)|. \quad (101)$$

U ovom slučaju efektivne vrijednosti napona i struje ne zavise od vremena, odnosno, faza talasa se ne pomjera duž voda pa je brzina prostiranja talasa jednaka nuli. Na vodu su formirani *stojeći talasi*. Grafici zavisnosti efektivnih vrijednosti napona i struje od položaja na vodu prikazani su na Slici 12. Mjesta na kojima je efektivna vrijednost napona, odnosno, struje jednaka nuli nazivaju se *čvorovi* talasa napona, odnosno, struje. Čvorovi talasa napona su na mjestima na kojima je

$$\beta (d - x) = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (102)$$



Slika 12: Efektivne vrijednosti napona i struje na otvorenom vodu bez gubitaka.

odnosno,

$$x_n = d - (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (103)$$

Čvorovi talasa struje su na mjestima na kojima je

$$\beta(d - x) = n\pi, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (104)$$

odnosno,

$$x_n = d - n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (105)$$

Vidimo da talas struje mora imati čvor na kraju otvorenog voda.

Bregovi talasa napona su na mjestima na kojima je

$$\beta(d - x) = n\pi \quad n = 0, 1, \dots, \quad (106)$$

pa je

$$x_n = d - n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (107)$$

Bregovi talasa struje su na mjestima na kojima je

$$\beta(d - x) = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (108)$$

odakle je

$$x_n = d - (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (109)$$

Talas napona ima brijeg na kraju otvorenog voda.

Iako u slučaju pojave stojećih talasa nema prostiranja talasa, trenutne vrijednosti napona i struje duž voda se mijenjaju sa vremenom

$$u(x, t) = \sqrt{2}U_d \cos \beta(d - x) \cos(\omega t + \theta_d), \quad (110)$$

$$i(x, t) = \sqrt{2}Z_c U_d \sin \beta(d - x) \cos\left(\omega t + \theta_d + \frac{\pi}{2}\right). \quad (111)$$

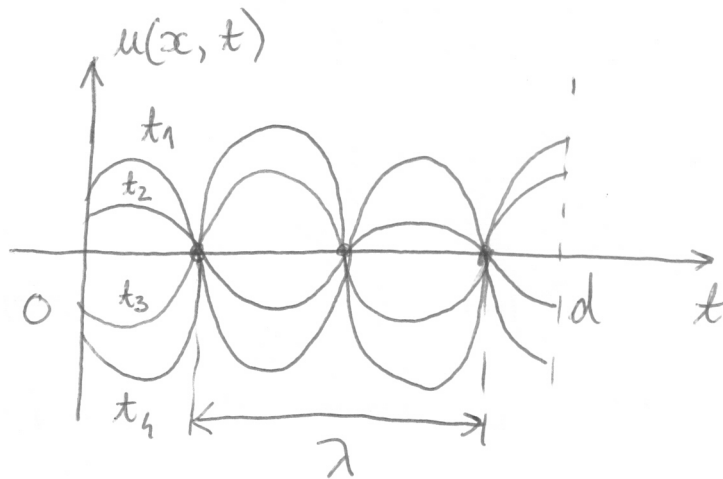
Grafik trenutne vrijednosti napona je prikazan na Slici 13.

Vidimo da su na određenim mjestima na otvorenom vodu efektivne vrijednosti napona i struje jednake nuli. Znači, možemo govoriti o pojavi rezonancije i antirezonancije na otvorenom vodu. Posmatrajmo impedansu otvorenog voda na udaljenosti x od generatora (početka voda)

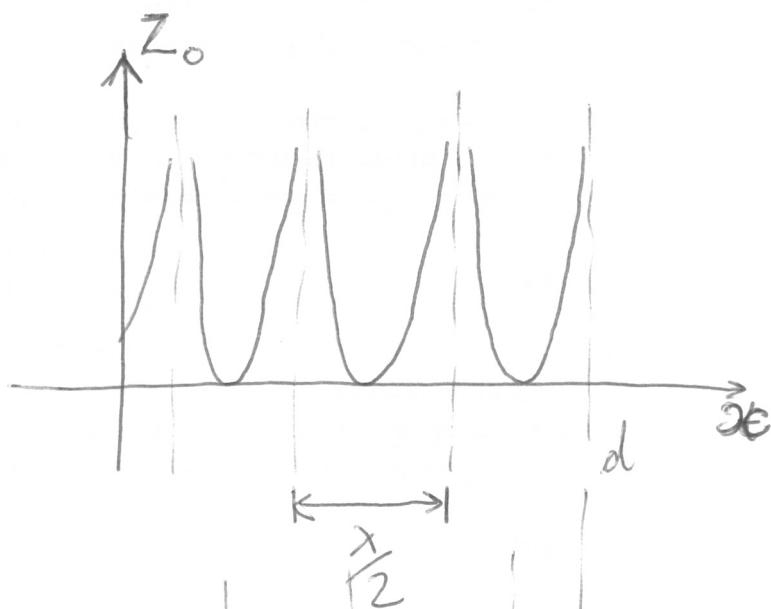
$$\underline{Z} = \underline{Z}_c \coth \gamma(d - x). \quad (112)$$

Za vod bez gubitaka ova jednačina postaje

$$\underline{Z} = -j\underline{Z}_c \operatorname{ctg} \beta(d - x). \quad (113)$$



Slika 13: Talasni oblik napona na otvorenom vodu.



Slika 14: Impedansa otvorenog voda.

Grafik zavisnosti impedanse od udaljenosti prikazan je na Slici 14. Rezonancija se postiže kada je $\underline{Z} = 0$, a antirezonancija kada $\underline{Z} \rightarrow \infty$. Očigledno, pozicije na vodu na kojima je postignuta rezonancija, odnosno, antirezonancija zavise od frekvencije generatora i dužine voda.

Ulazna impedansa otvorenog voda bez gubitaka je

$$\underline{Z}_0 = -jZ_c \operatorname{ctg} \beta d. \quad (114)$$

Rezonancija na početku voda date dužine se postiže kada je

$$\beta d = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (115)$$

Pošto je $\beta = \omega\sqrt{lc}$, rezonancija se postiže na frekvencijama generatora

$$\omega_{2n+1} = (2n + 1) \frac{\pi}{2d\sqrt{lc}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (116)$$

Antirezonancija na početku voda se postiže kada je

$$\beta d = 2n \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (117)$$

odnosno, na frekvencijama

$$\omega_{2n} = \frac{n\pi}{d\sqrt{lc}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (118)$$

Za fiksiranu frekvenciju pobudnog generatora, pošto je $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$, moguće je odrediti dužinu voda tako da se na njegovom početku javlja rezonancija

$$d_{2n+1} = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (119)$$

odnosno, antirezonancija

$$d_{2n} = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (120)$$

4.3 Vod u kratkom spoju

Za vod u kratkom spoju važi $\underline{U}_d = 0$ pa jednačine telegrafičara postaju

$$\underline{U} = \underline{Z}_c \underline{I}_d \operatorname{sh} \underline{\gamma} (d - x), \quad (121)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_d \operatorname{ch} \underline{\gamma} (d - x). \quad (122)$$

Slika 15: Efektivne vrijednosti napona i struje na vodu bez gubitaka u kratkom spoju.

Kod voda u kratkom spoju, takođe, brzina prostiranja faze, u opštem slučaju, nije konstantna. Impedansa voda u kratkom spoju na udaljenosti x od generatora je

$$\underline{Z}_k = \underline{Z}_c \tanh \underline{\gamma} (d - x). \quad (123)$$

Iz (123) i (88) slijedi

$$\underline{Z}_c^2 = \sqrt{\underline{Z}_o \underline{Z}_k}. \quad (124)$$

Napon i struja na vodu u kratkom spoju se mogu napisati u obliku

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_c \underline{I}_d}{2} e^{\underline{\gamma}(d-x)} - \frac{\underline{Z}_c \underline{I}_d}{2} e^{-\underline{\gamma}(d-x)} = \underline{U}' + \underline{U}'', \quad (125)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{I}_d}{2} e^{\underline{\gamma}(d-x)} + \frac{\underline{I}_d}{2} e^{-\underline{\gamma}(d-x)} = \underline{I}' + \underline{I}'', \quad (126)$$

gdje su \underline{U}' i \underline{I}' kompleksni napon i struja direktnog talasa, a \underline{U}'' i \underline{I}'' kompleksni napon i struja reflektovanog talasa. Koeficijent refleksije je

$$\underline{\Gamma} = \frac{\underline{U}''}{\underline{U}'} = -\frac{\underline{I}''}{\underline{I}'} = -e^{-2\underline{\gamma}(d-x)}|_d = -1. \quad (127)$$

Dakle, napon reflektovanog talasa na kraju voda je jednak naponu direktnog talasa, ali ima suprotnu fazu. Struja reflektovanog talasa na kraju voda je jednaka struji direktnog talasa.

Kompleksni napon i struja na vodu bez gubitaka u kratkom spoju su

$$\underline{U} = j \underline{Z}_c \underline{I}_d \sin \beta (d - x), \quad (128)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_d \cos \beta (d - x), \quad (129)$$

pa su efektivne vrijednosti napona i struje

$$U = \underline{Z}_c \underline{I}_d |\sin \beta (d - x)|, \quad (130)$$

$$I = \underline{I}_d |\cos \beta (d - x)|. \quad (131)$$

I u slučaju voda bez gubitaka u kratkom spoju, efektivne vrijednosti napona i struje ne zavise od vremena, pa se na vodu formiraju stojeći talasi. Grafici zavisnosti efektivnih vrijednosti napona i struje su prikazani na Slici 15.

Čvorovi talasa napona su na mjestima na kojima je

$$\beta (d - x) = n\pi, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (132)$$

odnosno,

$$x_n = d - n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (133)$$

Čvorovi talasa struje su na mjestima na kojima je

$$\beta(d - x) = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (134)$$

odnosno

$$x_n = d - (2n + 1)\frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (135)$$

Talas napona ima čvor na kraju voda u kratkom spoju.

Bregovi talasa napona su na mjestima na kojima je

$$\beta(d - x) = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (136)$$

odnosno

$$x_n = d - (2n + 1)\frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (137)$$

Bregovi talasa struje su na mjestima na kojima je

$$\beta(d - x) = n\pi, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (138)$$

odnosno,

$$x_n = d - n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (139)$$

Talas struje ima brijeg na kraju voda u kratkom spoju.

Iako na vodu bez gubitaka u kratkom spoju nema prostiranja talasa, trenutne vrijednosti napona i struje se mijenjaju u vremenu

$$u(x, t) = \sqrt{2}Z_c I_d \sin \beta(d - x) \cos \left(\omega t + \psi_d + \frac{\pi}{2} \right), \quad (140)$$

$$i(x, t) = \sqrt{2}I_d \cos \beta(d - x) \cos(\omega t + \psi_d). \quad (141)$$

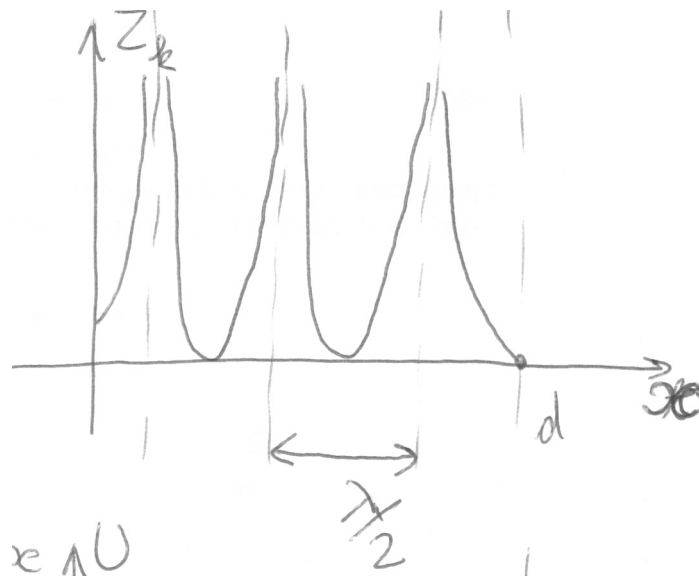
Impedansa voda bez gubitaka u kratkom spoju na udaljenosti x od generatora ima oblik

$$\underline{Z}_k = jZ_c \operatorname{tg} \beta(d - x). \quad (142)$$

Grafik zavisnosti modula impedanse od udaljenosti od generatora je prikazan na Slici 16.

Ulazna impedansa voda bez gubitaka u kratkom spoju je

$$\underline{Z}_k = jZ_c \operatorname{tg} \beta d. \quad (143)$$



Slika 16: Impedansa voda u kratkom spoju.

Rezonancija na početku voda se može postići bilo promjenom frekvencije (talasne dužine) generatora, bilo promjenom dužine voda. Rezonancija na početku voda se postiže za

$$\beta d = 2n \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (144)$$

Dakle, za vod date dužine d , rezonancija se postiže kada je frekvencija generatora

$$\omega_{2n} = \frac{n\pi}{d\sqrt{lc}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (145)$$

odnosno, za datu frekvenciju generatora ω , kada je dužina voda

$$d_{2n} = 2n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (146)$$

Analogno, antirezonancija na početku voda se postiže za

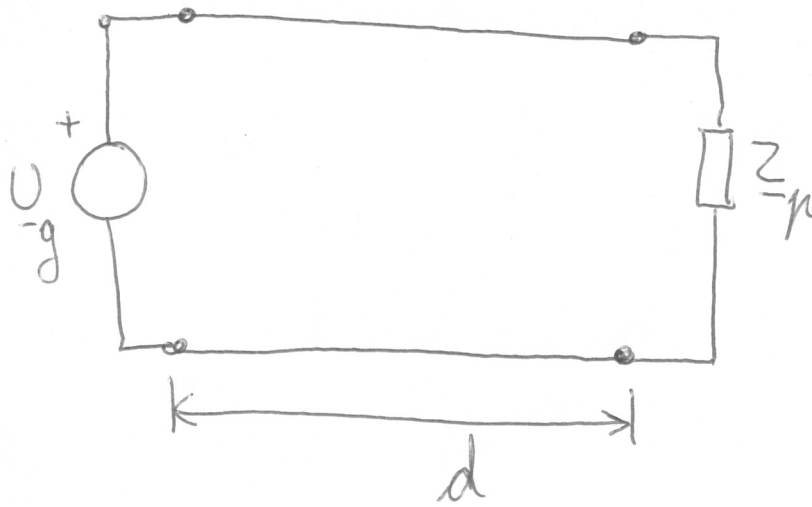
$$\beta d = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (147)$$

Na vodu date dužine d , antirezonancija se postiže kada je frekvencija generatora

$$\omega_{2n+1} = (2n + 1) \frac{\pi}{2d\sqrt{lc}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (148)$$

odnosno, za datu frekvenciju generatora ω , kada je dužina voda

$$d_{2n+1} = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (149)$$



Slika 17: Vod zatvoren proizvoljnom impedansom.

4.4 Vod zatvoren proizvoljnom impedansom

Na Slici 17 prikazan je vod bez gubitaka na koji su priključeni generator i opteretna impedansa, \underline{Z}_p . Jednačine telegrafičara su u ovom slučaju

$$\underline{U} = \frac{\underline{U}_d + \underline{Z}_c \underline{I}_d}{2} e^{\gamma(d-x)} + \frac{\underline{U}_d - \underline{Z}_c \underline{I}_d}{2} e^{-\gamma(d-x)} = \underline{U}' + \underline{U}'', \quad (150)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_d + \underline{Z}_c \underline{I}_d}{2\underline{Z}_c} e^{\gamma(d-x)} - \frac{\underline{U}_d - \underline{Z}_c \underline{I}_d}{2\underline{Z}_c} e^{-\gamma(d-x)} = \underline{I}' + \underline{I}''. \quad (151)$$

Koeficijent refleksije je, u ovom slučaju,

$$\underline{\Gamma} = \frac{\underline{U}''}{\underline{U}'} = \frac{\underline{U}_d - \underline{Z}_c \underline{I}_d}{\underline{U}_d + \underline{Z}_c \underline{I}_d} e^{-2\gamma(d-x)}. \quad (152)$$

Pošto je $\underline{U}_d = \underline{Z}_p \underline{I}_d$, dobijamo

$$\underline{\Gamma} = \frac{\underline{Z}_p - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_p + \underline{Z}_c} e^{-2\gamma(d-x)} = \underline{\Gamma}_p e^{-2\gamma(d-x)}, \quad (153)$$

gdje je

$$\underline{\Gamma}_p = \Gamma_p e^{j\eta_p} = \frac{\underline{Z}_p - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_p + \underline{Z}_c}, \quad (154)$$

koeficijent refleksije na kraju voda, odnosno, na mjestu na kojem je priključeno opterećenje.

Impedansa na udaljenosti x od početka voda je

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_p \operatorname{ch} \underline{\gamma}(d-x) + \underline{Z}_c \operatorname{sh} \underline{\gamma}(d-x)}{\underline{Z}_p \operatorname{sh} \underline{\gamma}(d-x) + \underline{Z}_c \operatorname{ch} \underline{\gamma}(d-x)} = \\ &= \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_p + \underline{Z}_c \tanh \underline{\gamma}(d-x)}{\underline{Z}_p + \underline{Z}_c \coth \underline{\gamma}(d-x)} = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_p + \underline{Z}_k}{\underline{Z}_p + \underline{Z}_o}.\end{aligned}\quad (155)$$

Impedansu voda je povezana sa koeficijentom refleksije. Kao što smo pokazali, kompleksni napon i struja se mogu izraziti korištenjem kompleksnih napona i struja direktnog i reflektovanog talasa

$$\underline{U} = \underline{U}' + \underline{U}'' = \underline{U}' + \underline{\Gamma} \underline{U}', \quad (156)$$

$$\underline{I} = \underline{I}' + \underline{I}'' = \underline{I}' - \underline{\Gamma} \underline{I}'. \quad (157)$$

Ovdje je korištena i definicija koeficijenta refleksije, $\underline{\Gamma}$.

Impedansa voda je sada

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1 + \underline{\Gamma} \underline{U}'}{1 - \underline{\Gamma} \underline{I}'}. \quad (158)$$

Pošto je $\frac{\underline{U}'}{\underline{I}'} = \underline{Z}_c$, dobijamo

$$\underline{Z} = \underline{Z}_c \frac{1 + \underline{\Gamma}}{1 - \underline{\Gamma}}. \quad (159)$$

Koeficijent refleksije se može izraziti u funkciji opteretne impedanse

$$\underline{\Gamma} = \frac{\underline{Z}_p - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_p + \underline{Z}_c} e^{-2\underline{\gamma}(d-x)} = \underline{\Gamma}_p e^{-2\underline{\gamma}y}, \quad (160)$$

gdje je $\underline{\Gamma}_p$ koeficijent refleksije na mjestu opterećenja, a $y = d - x$.

Impedansa voda se može napisati i u obliku

$$\underline{Z} = \underline{Z}_c \frac{1 + \underline{\Gamma}_p e^{-2\underline{\gamma}y}}{1 - \underline{\Gamma}_p e^{-2\underline{\gamma}y}}. \quad (161)$$

U slučaju voda bez gubitaka

$$\underline{Z} = \underline{Z}_c \frac{1 + \underline{\Gamma}_p e^{-j(2\underline{\beta}y - \eta_p)}}{1 - \underline{\Gamma}_p e^{-j(2\underline{\beta}y - \eta_p)}} = \underline{Z}_c \frac{1 + \underline{\Gamma}_p e^{j\eta}}{1 - \underline{\Gamma}_p e^{j\eta}}, \quad (162)$$

gdje je $\eta = \eta_p - 2\underline{\beta}y$. Možemo primjetiti da je impedansa u ovom slučaju periodična funkcija udaljenosti od opterećenja, y , i osnovni period je jednak $\frac{\lambda}{2}$.

Moduo impedanse je

$$|\underline{Z}| = \sqrt{\frac{1 + \Gamma_p^2 + 2\Gamma_p \cos \eta}{1 + \Gamma_p^2 - 2\Gamma_p \cos \eta}}. \quad (163)$$

Na mjestima na kojima je $2\beta y - \eta_p = 2n\pi$, odnosno, $y = \frac{\eta_p}{2\beta} - n\frac{\lambda}{2}$, $n = 0, 1, \dots$, impedansa ima maksimalnu vrijednost

$$Z_{max} = Z_c \frac{1 + \Gamma_p}{1 - \Gamma_p}. \quad (164)$$

Na mjestima na kojima je $2\beta y - \eta_p = (2n + 1)\pi$, odnosno, $y = \frac{\eta_p}{2\beta} - (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$, $n = 0, 1, \dots$, impedansa ima minimalnu vrijednost

$$Z_{min} = Z_c \frac{1 - \Gamma_p}{1 + \Gamma_p}. \quad (165)$$

U tačkama u kojima impedansa poprima minimalnu ili maksimalnu vrijednost, ona je i realna i ne zavisi od argumenta impedanse opterećenja, odnosno, koeficijenta refleksije.