

Topologija električnih mreža

16. decembar 2015

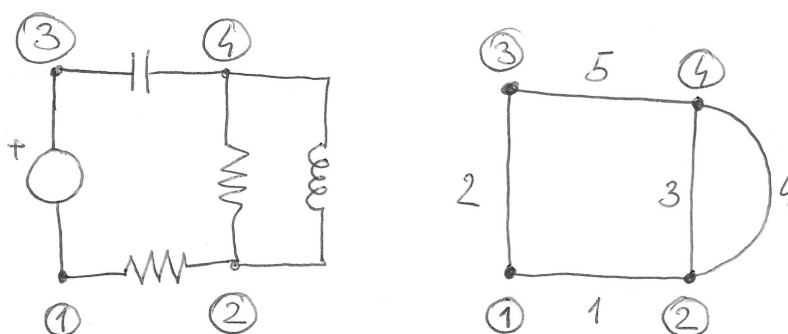
Već je pomenuto da se električna mreža može matematički opisati korištenjem modela (karakteristika) elemenata i modela njihovih veza. Modeli elemenata i načina njihovog povezivanja su nezavisni i moraju važiti jednovremeno. U prethodnim poglavljima bilo je dosta govora o karakteristikama elemenata, a sada ćemo posvetiti pažnju modeliranju veza elemenata. Model veza elemenata uključuje jednačine kojima su povezani naponi i struje u granama kola i koje važe bez obzira na prirodu elemenata koji se nalaze u tim granama. Slijedi da je moguće proučavati model veza elemenata samo korištenjem geometrijskih osobina električne mreže. Ovaj pristup analizi električnih mreža je predmet proučavanja *topologije električnih mreža*. Topološka analiza električnih mreža omogućava definisanje algoritma za formiranje sistema nezavisnih jednačina kojima su opisane veze elemenata električne mreže. Ona predstavlja osnov softvera za simulaciju električnih mreža. Sa topološkom analizom je povezana i analiza osjetljivosti električne mreže na varijacije vrijednosti elemenata.

Kada se apstrahuju elementi, električna mreža je određena čvorovima i granama mreže. Dakle, električnu mrežu je moguće predstaviti njenim *grafom*. Graf se definiše kao uređeni par skupa čvorova i skupa grana¹. Svaka grana je podskup sa dva elementa skupa čvorova. Dakle, možemo reći da grana grafa povezuje dva čvora. Čvorovi koji su povezani granom su *susjedni* čvorovi. Dva susjedna čvora su *krajnje tačke* svake grane koja ih povezuje. Za granu kojoj je neki čvor krajnja tačka kažemo da se *stiče* u tom čvoru. Čvor i grana su tada *susjedni* ili *incidentni*. Jedan čvor može biti incidentan sa proizvoljnim brojem grana, a grana može biti incidentna sa najviše dva čvora. Broj grana koje se stiču u čvoru je *stepen* čvora. Dvije grane su *susjedne* ako imaju zajednički čvor.

Dakle, čvorovi električne mreže odgovaraju čvorovima grafa, a grane mreže odgovaraju granama grafa. Prilikom formiranja grafa električne mreže

¹Dragoš Cvetković, Diskretna matematika

svaki pristup elementu određuje jednu granu grafa. Dakle, za elemente sa jednim pristupom grana odgovara samom elementu (grani mreže), a za elemente sa više pristupa, svaki pristup predstavljamo jednom granom. Graf se može prikazati dijagramom u kojem su čvorovi označeni tačkama, a grane linijama koje povezuju čvorove. Na Slici 1 je dat primjer električnog kola i odgovarajućeg grafa. Čvorove grafa ćemo označiti brojevima kao na Slici. Takođe, i grane grafa ćemo označiti brojevima, kao na Slici 1. Uočiti na slici incidentne grane i čvorove. Može se primjetiti da se između čvorova 2 i 4 nalaze dvije grane. Ovakav graf ne odgovara datoj definiciji grafa i u matematici se naziva *multigraf*². U teoriji električnih kola ćemo u termin *graf* uključiti i multigrafove.



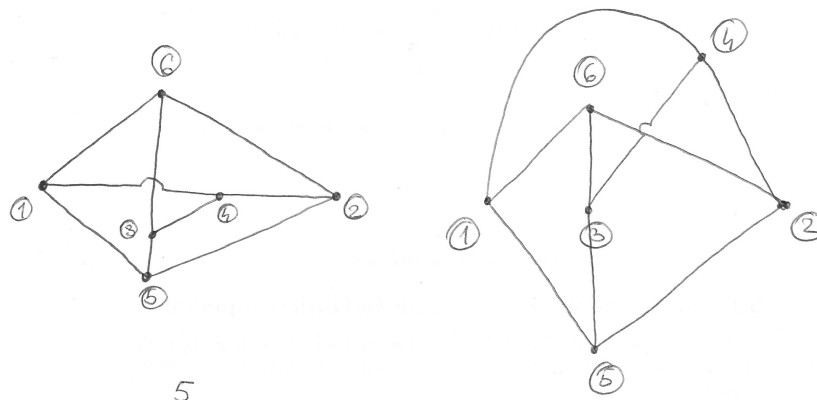
Slika 1: Električna mreža i odgovarajući graf.

Dati graf se može predstaviti dijagramom u ravni i za njega kažemo da je *planaran*. Graf na Slici 2 nije planaran. Ovaj graf nije moguće predstaviti dijagramom u ravni bez obzira na način preuređivanja rasporeda njegovih čvorova i grana, kao npr. na Slici 2. Topološka svojstva grafa se ne mijenjaju pri elastičnim deformacijama grafa. Planarnost grafova električnih mreža je važno pitanje u elektronici. Naime, tehnologije izrade štampanih ploča i integrisanih kola ne omogućavaju ukrštanje veza što ograničava realizibilnost samo na mreže čiji su grafovi planarni.

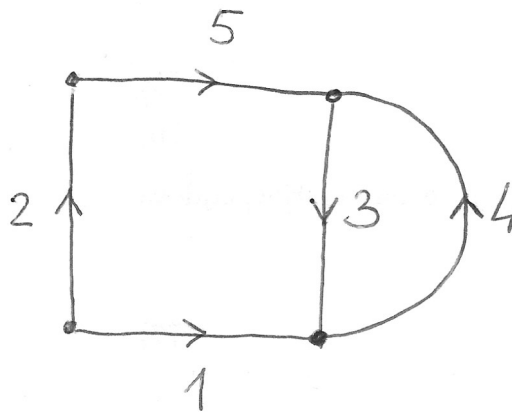
U datoj definiciji čvorovi koje grana povezuje čine neuređen par, odnosno, njihov redoslijed nije bitan. Sa druge strane, ukoliko je redoslijed čvorova od značaja, grana se definiše kao uređeni par čvorova, a graf postaje *orijentisani* graf ili *digraf* (directed graph). Orijehtacije grana se označavaju strelicama kao na Slici 3. U grafu električne mreže orijentacija grane je često određena referentnim smjerom struje, odnosno, napona na pristupu kojem grana odgovara.

Podgraf grafa (digrafa) je graf čiji je skup čvorova podskup skupa čvorova

²Dragoš Cvetković, Diskretna matematika, str. 19.



Slika 2: Neplanaran graf.



Slika 3: Orijentisani graf.

polaznog grafa, a grane podskup skupa grana polaznog grafa. Graf dobijen zadržavanjem čvorova polaznog grafa, a grane su podskup skupa grana polaznog grafa naziva se *djelimični graf* datog grafa. *Put* u grafu je niz grana, u_1, u_2, \dots, u_k , u kojem prva grana, u_1 , polazi iz proizvoljnog čvora grafa, a svaka grana, $u_i, i = 2, \dots, k$ polazi iz čvora u kojem se završava grana u_{i-1} . Put može da se definiše i kao niz čvorova kroz koje prolazi. U opštem slučaju, put može prolaziti istom granom, odnosno, kroz isti čvor više puta. Put koji kroz svaki čvor prolazi najviše jednom naziva se *elementarni put*. U nastavku ćemo isključivo razmatrati elementarne puteve u grafu. Put kod kojeg je početni čvor jednak završnom naziva se *zatvoreni put*, *petlja*³ ili *kontura*. Konturi je moguće pridružiti orijentaciju definisanjem redoslijeda

³U teoriji grafova uobičajeno se petlja koristi za granu koja počinje i završava se u istom čvoru. U TEK-u takve grane nemaju puno smisla i termin petlja se koristi za zatvoren put.

grana, odnosno, čvorova. Graf je *povezan* ako postoji put između bilo koja dva njegova čvora. Ako postoje čvorovi između kojih ne postoji put, graf je nepovezan. Nepovezani grafovi se javljaju u slučaju kada električno kolo sadrži, npr. transformator.

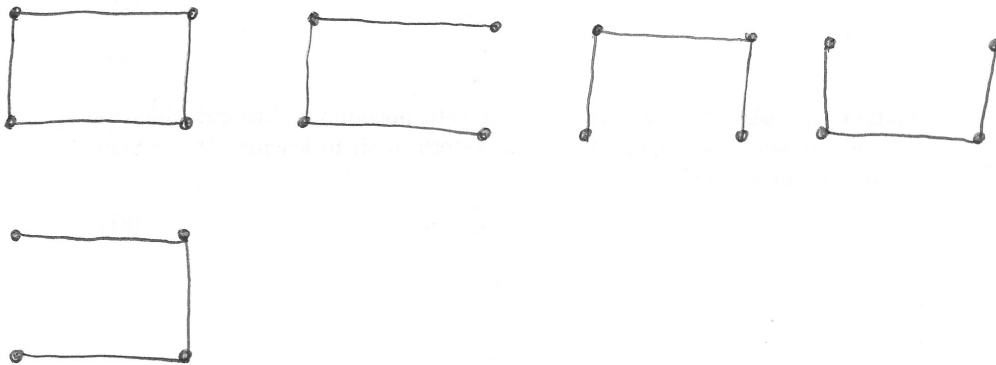
Povezani podgraf koji sadrži sve čvorove povezanog grafa (djelimični graf datog grafa) i koji ne sadrži nijednu konturu naziva se *stablo* grafa. Jednom grafu može odgovarati više stabala. Na Slici 4 je prikazan jedan graf i odgovarajuća stabla. Broj stabala grafa zavisi od njegove topologije. Grane grafa koje pripadaju stablu nazivaju se *grane stabla*. U povezanom grafu sa c čvorova broj grana stabla je

$$n = c - 1. \quad (1)$$

Stablo grafa se može formirati polazeći od skupa čvorova i dodavanjem grana dok se ne povežu svi čvorovi pri čemu ne smije da se formira ni jedna kontura⁴. Grane grafa koje ne pripadaju stablu nazivaju se *spojnice*. U povezanom grafu sa c čvorova i b grana broj spojnica je

$$m = b - n = b - c + 1. \quad (2)$$

Čvorovi polaznog grafa i spojnice čine *komplementarno stablo* ili *ko-stablo*. Ako se stablu grafa doda jedna spojnica formiraće se kontura. Kontura, μ , koja sadrži grane stabla i samo jednu spojnicu naziva se *glavna* ili *fundamentalna* kontura. Broj glavnih kontura u grafu je jednak broju spojnica. U orijentisanom grafu, glavna kontura se orijentiše kao spojnica.

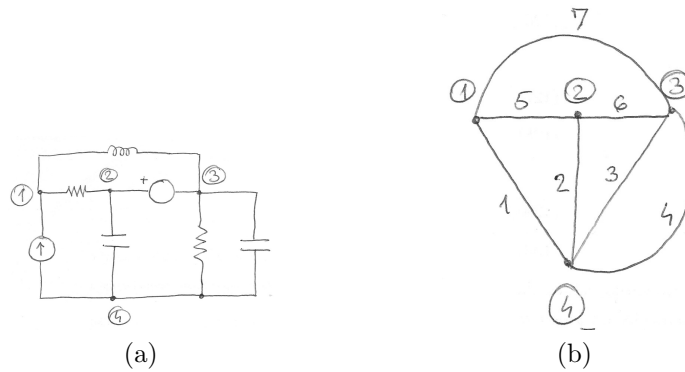


Slika 4: Graf i stabla.

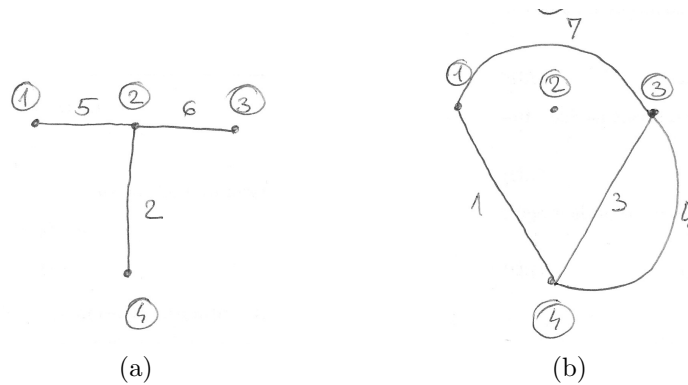
Ako je graf nepovezan onda se za svaki njegov povezan podgraf može odrediti stablo. Skup tih stabala se naziva *šuma*. Komplement šume je *ko-šuma*.

⁴Ili uklanjanjem grana koje čine konture, v. Cvetković, str. 82.

Na Slici 5 je prikazano jedno električno kolo i odgovarajući graf. Na Slici 6 su prikazani jedno stablo i odgovarajuće ko-stablo. Vidimo da se dodavanjem proizvoljne grane ko-stabla u stablo grafa formira kontura.



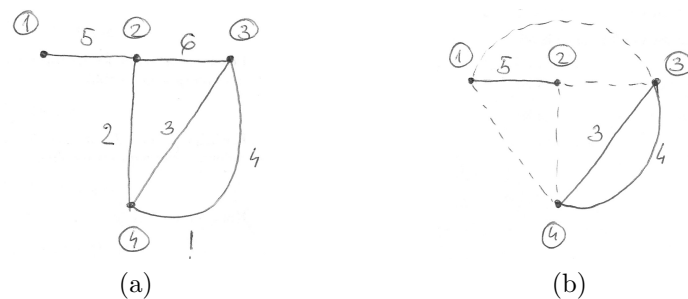
Slika 5: Električno kolo i odgovarajući graf.



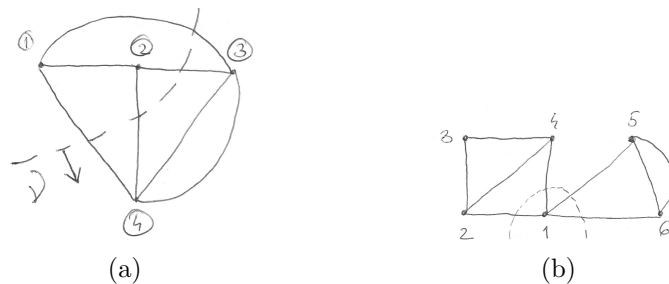
Slika 6: Stablo i ko-stablo grafa.

Ako se iz grafa na Slici 5 uklone grane 1 i 7 dobija se graf na Slici 7a. Uklanjanje grana podrazumijeva isključivanje odgovarajućih pristupa iz električne mreže. Rezultujući graf je još uvijek povezan. Ako, međutim, uklonimo i grane 2 i 6 dobijamo graf na Slici 7b koji je nepovezan. *Presjek* grafa je skup grana, ν , povezanog grafa koje kada uklonimo iz grafa on prestaje da bude povezan, uz uslov da uklanjanjem bilo kojeg pravog podskupa tog skupa grana graf ostaje povezan. U prikazanom primjeru presjek grafa je skup grana $\{1, 2, 6, 7\}$. Presjek je i skup grana $\{1, 5, 7\}$. U ovom slučaju jedan podgraf je sačinjen samo od čvora 1. Skup grana $\{1, 5, 7, 4\}$ nije presjek iako će graf biti podijeljen na dva dijela, jer nakon uklanjanja skupa grana

$\{1, 5, 7\}$ graf ne ostaje povezan. Presjek se može prikazati kao površ ili linija (u slučaju planarnog grafa) kao na Slici 8a⁵. Presjek dijeli graf na dva podgrafa i krajnje tačke svake grane koja pripada presjeku se nalaze u različitim podgrafovima. Pošto će uklanjanjem svih grana incidentnih jednom čvoru odvojiti taj čvor od ostatka grafa, skup grana koje se stiču u čvoru dijeli graf na međusobno nepovezane podgrafove. Međutim ovaj skup grana će biti presjek pod uslovom da ostatak grafa nije podijeljen u više od jednog podgrafa. Posmatrajmo primjer na Slici 8b. Uklanjanjem grana koje se stiču u čvoru 1 graf će biti podijeljen na tri podgrafa, od kojih će čvor 1 biti jedan podgraf. Zbog toga ovaj skup grana uopšte nije presjek. Ali, graf na Slici 8b je neobičan i čvor 1 je neobičan čvor. Presjek se može orijentisati tako što se izabere orijentacija od jednog podgrafa ka drugom. Orijentacija se može prikazati na dijagramu kao na Slici 8a.



Slika 7: Uklanjanje grana iz grafa i presjek grafa.



Slika 8: Električno kolo i odgovarajući graf.

Čvorni presjek siječe sadrži sve grane koje su incidentne jednom čvoru. Glavni ili fundamentalni presjek je presjek koji sadrži tačno jednu granu stabla i spojnice. Presjek $\{1, 5, 7\}$ je glavni presjek. Broj glavnih presjeka u

⁵Iako, u opštem slučaju, linija može sjeći granu više puta, data definicija presjeka povlači da će svaka grana na dijagramu biti presječena jednom.

grafu je jednak broju grana stabla. Glavni presjeci se mogu pronaći ako se pođe od stabla grafa. Uklanjanjem jedne grane stablo će biti podijeljeno na dva dijela. Sve grane polaznog grafa (uključujući i uklonjenu granu stabla) koje spajaju ta dva dijela stabla čine jedan fundamentalni presjek. Glavni presjek u orijentisanom grafu se orijentiše isto kao grana stabla koju sadrži.

1 Osnovne topološke matrice

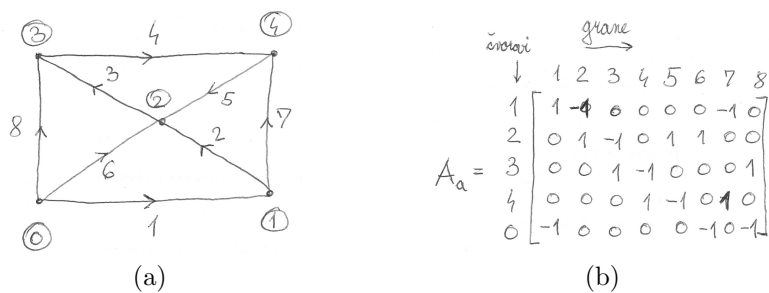
Grafovi, presjeci i konture u grafu se mogu prikazati u matičnom obliku.

1.1 Matrica incidencija

Orijentisani graf se u potpunosti može opisati informacijom o incidenciji čvorova i grana, kao i orijentacija grana. Elegantan način za ovo je *potpuna matrica incidencija čvorova i grana*, odnosno, *potpuna matrica incidencija*, \mathbf{A}_a , gdje a u indeksu znači da se uzimaju u obzir *svi* (engl. *all*) čvorovi. Matrica \mathbf{A}_a je pravougaona matrica kod koje je broj redova jednak broju čvorova grafa, a broj kolona broju grana grafa. Elementi ove matrice, a_{ij} su, prema konvenciji⁶, jednaki

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je grana } j \text{ incidentna čvoru } i \text{ i orijentisana ka njemu} \\ -1, & \text{ako je grana } j \text{ incidentna čvoru } i \text{ i orijentisana od njega} \\ 0, & \text{ako grana } j \text{ nije incidentna čvoru } i. \end{cases} \quad (3)$$

Za graf na Slici potpuna matrica incidencija je data na Slici



Slika 9: Primjer matrice incidencija.

Vidimo da svaka kolona matrice \mathbf{A}_a sadrži tačno jedan element jednak 1 i jedan element jednak -1 . Ovo je posljedica činjenice da je svaka orijentisana

⁶Moguće je izabrati i obrnutu orijentaciju koja bi bila usklađena sa konvencijom za KZS u OET.

grana incidentna sa dva čvora grafa – grana je orijentisana od jednog od čvorova ka drugom. Prema tome, sabiranjem vrsta matrice \mathbf{A}_a dobija se nula vektor-vrsta. To znači da je rang matrice \mathbf{A}_a jednak rang matrice \mathbf{A} koja se dobija uklanjanjem jedne vrste iz matrice \mathbf{A}_a i može se pokazati da je jednak $n = c - 1$, gdje je c broj čvorova. Matrica \mathbf{A} naziva se *redukovana matrica incidencija* ili samo *matrica incidencija* čvorova i grana. Čvor koji odgovara uklonjenoj vrsti matrice \mathbf{A}_a naziva se *referentni čvor* grafa (kola).

Neka je

$$\mathbf{i}(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \vdots \\ i_b(t) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

vektor struja pristupa elemenata koji odgovaraju granama grafa (koristićemo termin struje grana). Tada se KZS može napisati u matricnom obliku

$$\mathbf{A}\mathbf{i}(t) = \mathbf{0}, \quad (5)$$

za svako t . Pošto su jednačine u ovom sistemu linearno nezavisne, matrica \mathbf{A} se naziva i *matrica nezavisnih čvorova*.

Takođe, ako je

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

vektor potencijala čvorova, a

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_b(t) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

vektor napona pristupa elemenata koji odgovaraju granama grafa (napona grana), vrijedi

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{v}(t). \quad (8)$$

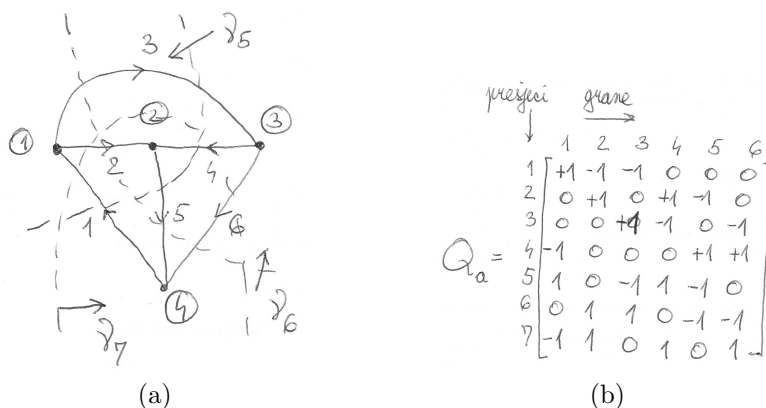
Vidimo da je broj elemenata vektora potencijala čvorova za jedan manji od ukupnog broja čvorova, odnosno, jedan čvor je izostavljen. Taj čvor se smatra za *referentni* i njegov potencijal je jednak nuli.

1.2 Matrica presjeka

Potpuna matrica presjeka \mathbf{Q}_a je matrica čije vrste odgovaraju presjecima, a kolone granama grafa. Indeks a znači da se uzimaju u obzir svi presjeci. Vrijednosti elemenata matrice presjeka su

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako grana } j \text{ pripada presjeku } i \text{ i njihove orijentacije se podudaraju} \\ -1, & \text{ako grana } j \text{ pripada presjeku } i \text{ i njihove orijentacije se ne podudaraju} \\ 0, & \text{ako grana } j \text{ ne pripada presjeku } i \end{cases} \quad (9)$$

Graf na Slici 10, osim presjeka koji odgovaraju granama incidentnim svakom čvoru ima i presjeka $\{1, 3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 5, 6\}$ i $\{1, 2, 4, 6\}$. Potpuna matrica presjeka je data na Slici 10 (smatramo da su čvorovi presjeci orijentisani ka čvoru).



Slika 10: Primjer potpune matrice presjeka.

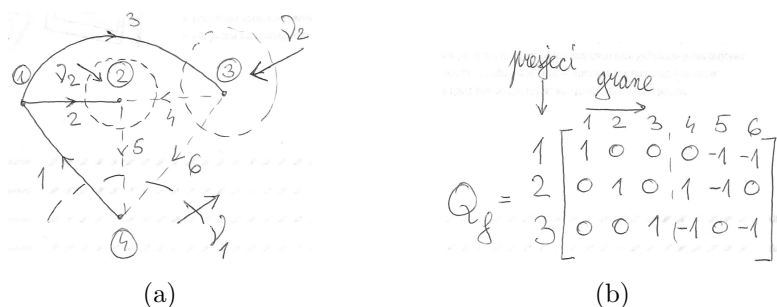
Potpuna matrica presjeka ima više vrsta od matrice incidencija. Ukoliko ograničimo skup presjeka samo na glavne presjeka dobijamo *matricu glavnih presjeka*, \mathbf{Q}_f . Ako u primjeru izaberemo stablo grafa koje čine grane $\{1, 2, 3\}$, kao na Slici 11, glavni presjeci su $\{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$, prikazani na Slici.

Matrica glavnih presjeka za ovaj slučaj je

Vidimo da je kvadratna podmatrica koju čine prve tri kolone (koje odgovaraju granama stabla), u stvari, jedinična matrica pa je rang ove matrice jednak 3. Ovaj rezultat se može generalizovati i pokazati da je rang matrice glavnih presjeka povezanog grafa sa c čvorova jednak broju grana stabla $n = c - 1$.

Neka je $\mathbf{i}(t)$ vektor struja grana. Tada iz KZS slijedi

$$\mathbf{Q}_a \mathbf{i}(t) = \mathbf{0}. \quad (10)$$



Slika 11: Primjer matrice glavnih presjeka.

Pošto je rang matrice \mathbf{Q}_a jednak n ove jednačine nisu linearno nezavisne pa vrijedi da je

$$\mathbf{Q}_f \mathbf{i}(t) = \mathbf{0}, \quad (11)$$

jer je rang matrice \mathbf{Q}_f jednak n . Drugim riječima, algebarski zbir struja svih grana presjeka jednak je nuli.

Pridružimo, dalje, svakom glavnom presjeku ν_k , napon v_k koji odgovara naponu grane stabla koja pripada posmatranom presjeku. Označimo sa \mathbf{v}_t vektor tako određenih napona presjeka

$$\mathbf{v}_t(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Tada je vektor napona grana jednak⁷

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{Q}_f^T \mathbf{v}_t(t). \quad (13)$$

1.3 Matrica kontura

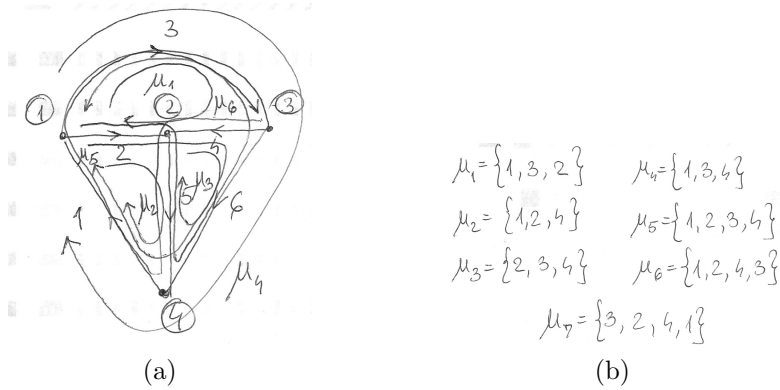
Neka je dat orijentisan graf kao na Slici 12 i neka su konture u grafu orijentisane. Orijehtacija kontura se može naznačiti strelicom u grafu ili navođenjem redoslijeda čvorova. Matrica kontura sadrži informaciju o međusobnom odnosu grana i kontura u grafu. Potpuna matrica kontura, \mathbf{B}_a , ima onoliko vrsta koliko postoji kontura u grafu i b kolona. Element matrice kontura ima

⁷Ovo važi i za skup nezavisnih presjeka, ali to nismo definisali. Razmotriti ovo pitanje za sljedeću verziju.

vrijednost

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako grana } j \text{ pripada konturi } i \text{ i njihove orijentacije se podudaraju} \\ -1, & \text{ako grana } j \text{ pripada konturi } i \text{ i njihove orijentacije se ne podudaraju} \\ 0, & \text{ako grana } j \text{ ne pripada konturi } i \end{cases} \quad (14)$$

U grafu na Slici 12 se može formirati sedam kontura.



$$\begin{aligned} \mu_1 &= \{1, 3, 2\} & \mu_4 &= \{1, 3, 4\} \\ \mu_2 &= \{1, 2, 4\} & \mu_5 &= \{1, 2, 3, 4\} \\ \mu_3 &= \{2, 3, 4\} & \mu_6 &= \{1, 2, 4, 3\} \\ \mu_7 &= \{3, 2, 4, 1\} \end{aligned}$$

Slika 12: Konture u grafu.

Potpuna matrica kontura je

Ukoliko konture formiramo tako što stablu grafa dodamo jednu spojnicu, dobijamo skup glavnih kontura. Matrica glavnih kontura ima $m = b - n = b - c + 1$ vrsta i b kolona. U posmatranom primjeru postoje tri glavne konture koje su prikazane na Slici. Orijentacije kontura odgovaraju orijentaciji spojnice koju sadrže.

Matrica glavnih kontura \mathbf{B}_f je

Kvadratna podmatrica koju čine poslednje tri kolone ove matrice (odgovaraju spojnicama) je jedinična matrica pa nije singularna i rang matrice glavnih kontura je $m = b - n$.

Neka je $\mathbf{u}(t)$ vektor napona grana. Tada iz KZN slijedi

$$\mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, \quad (15)$$

gdje je \mathbf{B} matrica kontura. Ako su napišu jednačine po KZN za sve konture u kolu onda imamo

$$\mathbf{B}_a\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}. \quad (16)$$

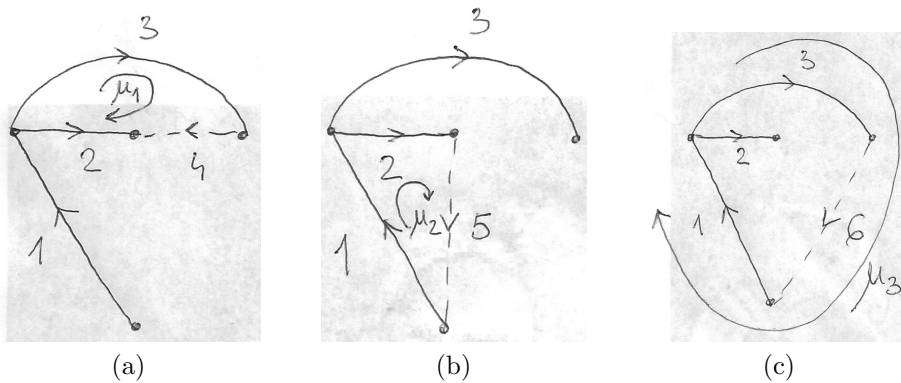
Međutim, rang matrice \mathbf{B}_a je $b - n$ pa ove jednačine neće biti linearno nezavisne. Linearno nezavisan skup jednačina se dobija za matricu \mathbf{B} čiji je rang jednak $b - n$. Jedna mogućnost je matrica glavnih kontura \mathbf{B}_f

$$\mathbf{B}_f\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}. \quad (17)$$

konture	↓	grane	1	2	3	4	5	6
μ_1			0	-1	1	1	0	0
μ_2			1	1	0	0	1	0
μ_3			0	0	0	-1	-1	1
μ_4			1	0	1	0	0	1
μ_5			1	1	0	-1	0	1
μ_6			0	1	-1	0	1	-1
μ_7			1	0	1	1	1	0

$B_a =$

Slika 13: Potpuna matrica kontura



Slika 14: Glavne konture u grafu.

Drugim riječima, algebarski zbir napona svih grana koje čine konturu jednak je nuli. Pri ovome se sa znakom plusom uzimaju naponi grana čija se orijentacija podudara sa orijentacijom konture, a sa znakom minus naponi grana čija se orijentacija ne podudara sa orijentacijom konture.

$$\mathbf{B}_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{konture} \\ \downarrow \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{grane} \\ \rightarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Slika 15: Matrica glavnih kontura

Ako je

$$\mathbf{i}(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \vdots \\ i_b(t) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

vektor struja grana, može se pokazati da je

$$\mathbf{i}(t) = \mathbf{B}_f^T \mathbf{i}_l(t), \quad (19)$$

gdje je

$$\mathbf{i}_l(t) = \begin{bmatrix} i_{l1}(t) \\ i_{l2}(t) \\ \vdots \\ i_{lm}(t) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

vektor struja spojnice. Dakle struje spojnice za dato stablo predstavljaju bazne struje preko kojih se mogu izraziti sve struje u kolu. Kao bazne struje se mogu koristiti i *konturne struje*. Konturne struje su fiktivne struje koje teku konturama mreže. Neka je dat graf sa c čvorova i b grana. Neka je \mathbf{B} matrica kontura čiji je rang $b - c + 1$ i neka je dat vektor konturnih struja za konture koje odgovaraju matrici \mathbf{B}

$$\mathbf{J}(t) = \begin{bmatrix} J_1(t) \\ J_2(t) \\ \vdots \\ J_b(t) \end{bmatrix}, \quad (21)$$

Vektor struja grana je sada

$$\mathbf{i}(t) = \mathbf{B}^T \mathbf{J}(t). \quad (22)$$

Specijalno, ako se posmatraju glavne konture onda u jednačini figuriše matrica glavnih kontura \mathbf{B}_f . U datom primjeru je

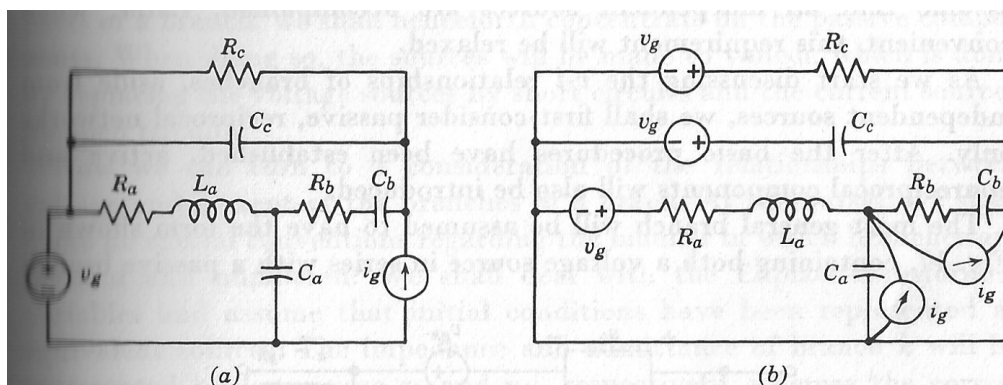
$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

2 Algebarske metode analize električnih mreža

Jednačine napisane po KZS i KZN koje daju relacije koje moraju zadovoljavati naponi i struje grana u električnom kolu su nezavisne od prirode elemenata čiji pristupi čine grane grafa mreže. One vrijede bez obzira na to da li su mreže linearne ili nelinearne, vremenski promjenljive ili nepromjenljive.

Karakteristike elemenata daju veze između napona i struja grana. Dosašnja razmatranja nisu dala nikakve smjernice o tome kako izabrati grane grafa. Moguće je, na primjer, da svaki element (pristup u slučaju elemenata sa više pristupa) zasebno čini jednu granu. Sa druge strane, moguće je smatrati da redno vezani elementi čine jednu granu, odnosno, da paralelno vezani elementi čine jednu granu. Na primjer, u kolu na Slici 16 redno vezani elementi R_a i L_a se mogu smatrati zasebnim granama ili jednom granom. Analogno vrijedi za paralelno vezane elemente R_c i C_c .

Prilikom izbora grana grafa posebnu pažnju treba posvetiti idealnim naponskim i strujnim generatorima. U kolu na Slici 16 postoje idealni naponski i strujni generator. Pošto je u grani određenoj idealnim generatorom napon ili struja generatora poznata veličina, ukoliko se idealni generatori posmatraju kao grane, nije moguće uspostaviti vezu između napona i struje posmatrane grane. Zbog toga u graf nećemo dodavati grane određene idealnim generatorima već ćemo transformisati kolo tako da grana bude određena rednom vezom idealnog naponskog generatora i pasivnog elementa, odnosno, paralelnom vezom idealnog strujnog generatora i pasivnog elementa. U slučaju da u kolu figuriše idealni naponski generator, moguće ga je premjestiti u grane koje se stiču u čvoru u koji je spojen jedan od njegovih priključaka, pri čemu se priključci ranije pozicije idealnog naponskog generatora kratko

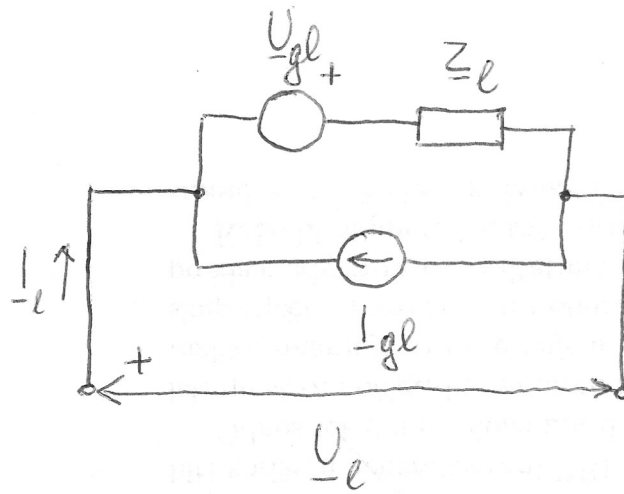


Slika 16: Pomjerenje naponskih i strujnih generatora.

spajaju, kao na Slici 16. Ova transformacija rezultuje ekvivalentnim kolom jer će jednačine dobijene primjenom KZN biti nepromijenjene. Međutim, u rezultujućem kolu je svaki idealni naponski generator redno vezan sa nekim pasivnim elementom što omogućava da se odredi veza između napona i struje odgovarajuće grane grafa. Analogno, idealni strujni generator je moguće premjestiti paralelno svim granama koje sa polaznom pozicijom idealnog strujnog generatora čine konturu, pri čemu se polazni priključci strujnog generatora ostavljaju otvoreni, kao što je prikazano na Slici 16. Dobijeno kolo je ekvivalentno polaznom jer će jednačine dobijene primjenom KZS biti nepromijenjene, ali će paralelno svakom idealnom strujnom generatoru biti vezan jedan pasivni element što omogućava da se odredi veza između napona i struje odgovarajuće grane. Ove transformacije se nazivaju *pomjerenje naponskog*, odnosno, *strujnog generatora*, respektivno. U nastavku razmatranja u nekim slučajevima će biti neophodno da se kolo transformiše pomjerenjem naponskih ili strujnih generatora, dok u nekim slučajevima neće biti potrebe za transformacijom.

Sada ćemo formirati jednačine kojima je opisano električno kolo korištenjem ranije izvedenih topoloških relacija karakteristika elemenata. Posmatraćemo kolo u ustaljenom prostoperiodičnom režimu i za analizu ćemo koristiti kompleksne predstavnike napona i struja u kolu. Takođe, ograničićemo analizu na kola koja osim nezavisnih generatora sadrže pasivne i recipročne elemente.

Kako bismo došli do algoritma kojim se jednoznačno formira graf električnog kola definisaćemo *generalisanu granu* u obliku prikazanom na Slici 17. Generalisana grana sadrži naponski generator redno vezan sa pasivnom granom i strujni generator vezan paralelno ovoj rednoj vezi. Na primjer, na Slici 16 jednu generalisanu granu može sačinjavati redna veza R_a, L_a , naponskog generatora i strujnog generatora. Na Slici 17 su naznačeni usaglašeni referentni smjerovi napona i struje. Pogodno je odabrati orijentaciju grane



Slika 17: Generalisana grana.

grafa tako da odgovara referentnom smjeru napona na posmatranom pristupu generalisanoj grani. Za generalisanu granu vrijedi

$$\underline{U}_l + \underline{U}_{gl} = \underline{Z}_l (\underline{I}_{gl} + \underline{I}_l), \quad (24)$$

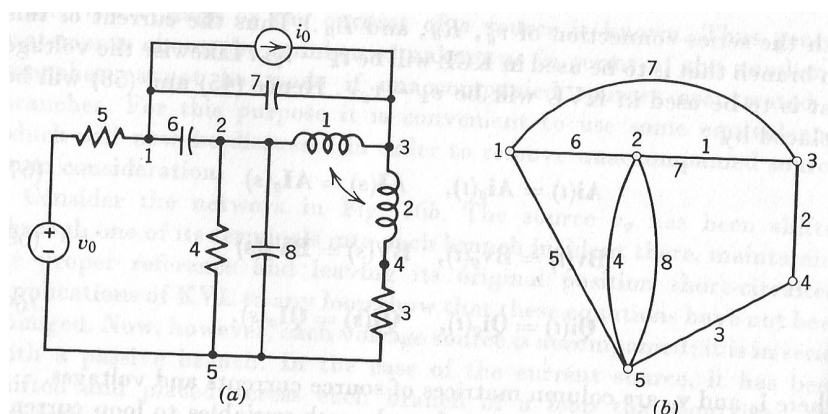
$$\underline{I}_l + \underline{I}_{gl} = \underline{Y}_l (\underline{U}_{gl} + \underline{U}_l). \quad (25)$$

Ako sa \mathbf{U} označimo vektor napona generalisanih grana, sa \mathbf{I} vektor struja generalisanih grana, sa \mathbf{U}_g vektor napona naponskih generatora koji se nalaze u generalisanim granama, a sa \mathbf{I}_g vektor struja strujnih generatora koji se nalaze u generalisanim granama, imamo

$$\mathbf{U} + \mathbf{U}_g = \mathbf{Z} (\mathbf{I} + \mathbf{I}_g), \quad (26)$$

$$\mathbf{I} + \mathbf{I}_g = \mathbf{Y} (\mathbf{U} + \mathbf{U}_g). \quad (27)$$

Matrica \mathbf{Z} je *matrica impedansi grana*, a matrica \mathbf{Y} je *matrica admitansi grana*. Za pasivnu recipročnu mrežu, matrice impedansi i admitansi grana su simetrične. Kao primjer posmatrajmo kolo na Slici 18. Grane 1 i 2 su induktivno spregnute. Matrica \mathbf{Z} je oblika Matrica \mathbf{Y} je inverzna matrici \mathbf{Z} . Vidimo da zahvaljujući pogodno izabranoj numeraciji grana, dobijena matrica ima karakterističnu strukturu – radi se o blok-dijagonalnoj matrici. Pošto je numeracija grana proizvoljna onda je uvijek moguće pogodno izabrati numeraciju grana i iskoristiti pogodnosti rada sa blok-dijagonalnom matricom. Na primjer, inverznu matricu blok-dijagonalne matrice je moguće izračunati po blokovima. Kada u kolu ne bi postojale induktivno spregnute grane, matrice \mathbf{Z} i \mathbf{Y} bi bile dijagonalne i elementi na dijagonali bi bili



Slika 18: Primjer.

$$\mathbf{V}(s) = \begin{bmatrix} sL_{11} & sL_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & sL_{21} & sL_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & R_3 & \circ & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \circ & R_4 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \circ & R_5 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1/sC_6 & \circ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1/sC_7 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \circ & 1/sC_8 \end{bmatrix} \mathbf{I}(s)$$

jednaki impedansama, odnosno, admitansama pojedinih grana, respektivno. Sada vidimo da bi postojanje idealnih generatora u mreži predstavljalo problem pri formiranju matrice impedansi grana, odnosno, admitansi. Naime, impedansa grane sa idealnim strujnim generatorom je beskonačno velika pa ne bi bilo moguće formirati matricu impedansi. Analogno vrijedi za granu sa idealnim naponskim generatorom i matricu admitansi grana.

2.1 Metoda nezavisnih struja

Već smo pokazali da je algebarska suma napona grana u glavnim petljama jednaka nuli. U ustaljenom prostoperiodičnom režimu ovaj sistem od $m =$

$b - c + 1$ jednačina ima oblik

$$\mathbf{B}_f \mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (28)$$

Uvrštavanjem vrijednosti za napone grana iz jednačine

$$\mathbf{U} + \mathbf{U}_g = \mathbf{Z}(\mathbf{I} + \mathbf{I}_g), \quad (29)$$

dobijamo

$$\mathbf{B}_f \mathbf{Z} \mathbf{I} = \mathbf{B}_f (\mathbf{U}_g - \mathbf{Z} \mathbf{I}_g). \quad (30)$$

Struje grana se mogu izraziti pomoću konturnih struja glavnih kontura

$$\mathbf{I} = \mathbf{B}_f^T \mathbf{J}, \quad (31)$$

pa imamo

$$\mathbf{B}_f \mathbf{Z} \mathbf{B}_f^T \mathbf{J} = \mathbf{B}_f (\mathbf{U}_g - \mathbf{Z} \mathbf{I}_g). \quad (32)$$

ili

$$\mathbf{Z}_m \mathbf{J} = \mathbf{V}_g. \quad (33)$$

Matrica

$$\mathbf{Z}_m = \mathbf{B}_f \mathbf{Z} \mathbf{B}_f^T \quad (34)$$

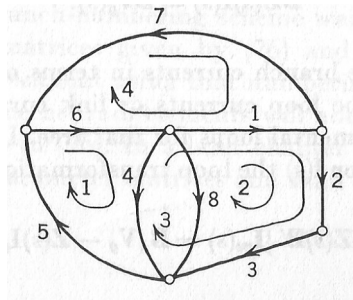
se naziva *matrica impedansi kontura*. Za pasivnu recipročnu mrežu, matrica impedansi kontura je simetrična.

Vektor

$$\mathbf{V}_g = \mathbf{B}_f (\mathbf{U}_g - \mathbf{Z} \mathbf{I}_g) \quad (35)$$

je *vektor ekvivalentnih naponskih izvora kontura*.

Za primjer sa Slike 18 sistem izabranih kontura je prikazan na Slici ???. Tada je matrica kontura oblika



Slika 19: Glavne konture u grafu.

$$\mathbf{Z}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_m = \begin{bmatrix} R_4 + R_5 + \frac{1}{sC_6} & 0 & -R_4 & -\frac{1}{sC_6} \\ 0 & s(L_{11} + L_{12} + L_{21} + L_{22}) + R_3 + \frac{1}{sC_8} & s(L_{11} + L_{12} + L_{21} + L_{22}) + R_3 & -s(L_{11} + L_{21}) \\ -R_4 & s(L_{11} + L_{12} + L_{21} + L_{22}) + R_3 & s(L_{11} + L_{12} + L_{21} + L_{22}) + R_3 + R_4 & -s(L_{11} + L_{21}) \\ -\frac{1}{sC_6} & -s(L_{11} + L_{12}) & -s(L_{11} + L_{12}) & sL_{11} + \frac{1}{sC_6} + \frac{1}{sC_7} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrica impedansi kontura je Vidimo da je elemente matrice impedansi kontura moguće interpretirati na sljedeći način. Svaki element na glavnoj dijagonali je suma impedansi grana koje pripadaju odgovarajućoj petlji, s tim što je potrebno posvetiti pažnju induktivno spregnutim granama. Svaki element koji ne pripada glavnoj dijagonali jednak je sumi impedansi u granama koje su zajedničke odgovarajućim petljama sa predznakom plus ako se orijentacije kontura u zajedničkoj grani podudaraju, a sa predznakom minus, ako se orijentacije kontura u zajedničkoj grani ne podudaraju.

Vektori generatora su

$$\mathbf{U}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i

$$\mathbf{I}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \underline{I}_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vektor ekvivalentnih naponskih generatora kontura je

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_g &= \mathbf{B}_f (\mathbf{U}_g - \mathbf{Z}\mathbf{I}_g) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \underline{U}_0 \\ 0 \\ -\frac{\underline{I}_0}{j\omega C_7} \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\underline{I}_0}{j\omega C_7} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Veličina $\frac{\underline{I}_0}{j\omega C_7}$ je napon ekvivalentnog Tevenenovog generatora za strujni generator vezan u paralelu sa kondenzatorom C_7 . Dakle, elementi vektora ekvivalentnih naponskih izvora kontura su algebarske sume napona naponskih generatora (uključujući i Tevenenove generatore) u odgovarajućoj konturi, sa referentnim smjerovima izabranim tako da budu usaglašeni sa orijentacijom konture.

Rješenje sistema jednačina formiranog po metodi nezavisnih struja

$$\mathbf{Z}_m \mathbf{J} = \mathbf{V}_g, \quad (36)$$

se može dobiti u obliku

$$\mathbf{J} = \mathbf{Z}_m^{-1} \mathbf{V}_g. \quad (37)$$

2.2 Metoda potencijala čvorova

Algebarska suma struja grana u svakom čvoru mreže je, prema KZS, jednaka nuli. U ustaljenom prostoperiodičnom režimu ovaj sistem od c jednačina

se može napisati u obliku

$$\mathbf{A}_a \mathbf{I} = \mathbf{0}, \quad (38)$$

gdje je \mathbf{A}_a potpuna matrica incidencija, a \mathbf{I} vektor struja grana mreže. Pošto je rang potpune matrice incidencija jednak $n = c - 1$, jednačine u ovom sistemu nisu linearno nezavisne. Ako jedna čvor u mreži izaberemo za referentni, jednačine po KZS za ostale čvorove su linearno nezavisne

$$\mathbf{A} \mathbf{I} = \mathbf{0}, \quad (39)$$

gdje je \mathbf{A} matrica incidencija za ostale čvorove mreže. Uvrštavanjem vrijednosti za struje grana iz jednačine

$$\mathbf{I} + \mathbf{I}_g = \mathbf{Y} (\mathbf{U} + \mathbf{U}_g), \quad (40)$$

dobijamo

$$\mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{U} = \mathbf{A} (\mathbf{I}_g - \mathbf{Y} \mathbf{U}_g). \quad (41)$$

Naponi grana grafa se mogu izraziti preko potencijala čvorova

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^T \mathbf{V}, \quad (42)$$

gdje je \mathbf{V} vektor potencijala čvorova u odnosu na odabrani referentni čvor. Sada je

$$\mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A}^T \mathbf{V} = \mathbf{A} (\mathbf{I}_g - \mathbf{Y} \mathbf{U}_g) \quad (43)$$

ili

$$\mathbf{Y}_n \mathbf{V} = \mathbf{J}_g. \quad (44)$$

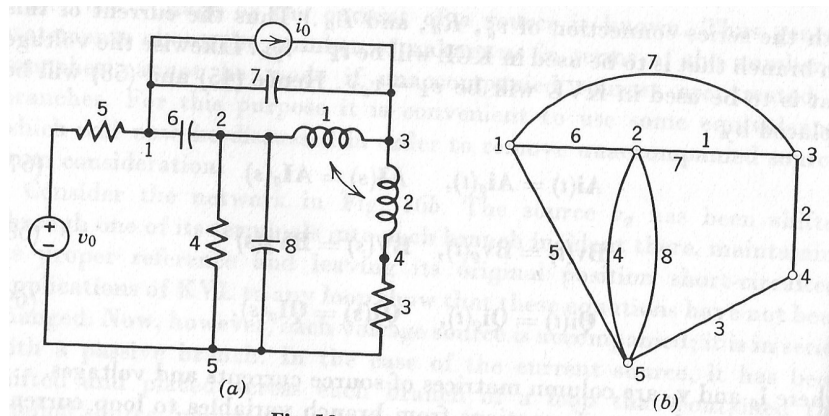
Ovom matricnom jednačinom je predstavljen sistem od n jednačina sa n nepoznatih. Matrica

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A}^T, \quad (45)$$

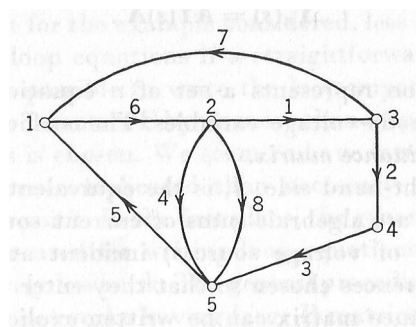
se naziva *matrica admitansi čvorova*. Za pasivnu recipročnu mrežu, matrica admitansi čvorova je simetrična. Elementi matrice admitansi čvorova se mogu interpretirati na sljedeći način. Vrijednosti elemenata na glavnoj dijagonali su jednake sumi admitansi svih grana incidentnih u odgovarajućem čvoru. Elementi koji se ne nalaze na glavnoj dijagonali su jednaki negativnoj admitansi grane koja se nalazi između dva čvora. Vektor

$$\mathbf{J}_g = \mathbf{A} (\mathbf{I}_g - \mathbf{Y} \mathbf{U}_g) \quad (46)$$

se naziva *vektor ekvivalentnih strujnih generatora čvorova*. Vrijednosti elemenata ovog vektora su algebarske sume strujnih generatora, uključujući i ekvivalentne Nortonove generatore, u granam incidentnim odgovarajućem čvoru sa referentnim smjerom izabranim prema čvoru.



Slika 20: Primjer.



Slika 21: Orijentisani graf uz primjer.

Kao ilustraciju postupka postavljanja jednačina po metodi potencijala čvorova posmatraćemo istu mrežu kao i u prethodnom primjeru, Slika 20. Graf ove mreže dat je na Slici 21 Matrica incidencija je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica admitansi grana je gdje je $\Delta = L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}$. Matrica admitansi

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{L_{22}}{s\Delta} & -\frac{L_{12}}{s\Delta} & & & & & & & \\ -\frac{L_{21}}{s\Delta} & \frac{L_{11}}{s\Delta} & & & & & & & \\ & & G_3 & & & & & & \\ & & & G_4 & & & & & \\ & & & & G_5 & & & & \\ & & & & & sC_6 & & & \\ & & & & & & sC_7 & & \\ & & & & & & & sC_8 & \end{bmatrix}$$

čvorova je Matrice \mathbf{U}_g i \mathbf{I}_g su iste kao u prethodnom primjeru pa je vektor

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} G_5 + s(C_6 + C_7) & -sC_6 & & -sC_7 & & 0 \\ -sC_6 & \frac{L_{22}}{s\Delta} + G_4 + s(C_6 + C_8) & & -\frac{(L_{22} + L_{12})}{s\Delta} & & \frac{L_{12}}{s\Delta} \\ -sC_7 & & -\frac{(L_{22} + L_{21})}{s\Delta} & \frac{L_{11} + L_{12} + L_{21} + L_{22}}{s\Delta} + sC_7 & & -\frac{(L_{11} + L_{12})}{s\Delta} \\ 0 & & \frac{L_{21}}{s\Delta} & -\frac{(L_{11} + L_{21})}{s\Delta} & & \frac{L_{11}}{s\Delta} + G_3 \end{bmatrix}.$$

ekvivalentnih strujnih generatora čvorova

$$\mathbf{J}_g = \mathbf{A}(\mathbf{I}_g - \mathbf{Y}\mathbf{U}_g) = \begin{bmatrix} G_5 U_0 - I_0 \\ 0 \\ I_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2.3 Metoda napona nezavisnih presjeka

Već je pokazano da je algebarski zbir struja svih grana presjeka jednak nuli pa se može pisati

$$\mathbf{Q}_a \mathbf{I} = \mathbf{0}. \quad (47)$$

Pošto je rang potpune matrice presjeka jednak $n = c - 1$, odnosno, rang matrice glavnih presjeka, dovoljno je posmatrati sistem od n jednačina

$$\mathbf{Q}_f \mathbf{I} = \mathbf{0}. \quad (48)$$

Uvrštavanjem vrijednosti za struje grana iz jednačine

$$\mathbf{I} + \mathbf{I}_g = \mathbf{Y} (\mathbf{U} + \mathbf{U}_g), \quad (49)$$

dobijamo

$$\mathbf{Q}_f \mathbf{Y} \mathbf{U} = \mathbf{Q}_f (\mathbf{I}_g - \mathbf{Y} \mathbf{U}_g). \quad (50)$$

Naponi grana grafa se mogu izraziti preko napona glavnih presjeka, pri čemu smo napon glavnog presjeka definisali kao napon grane grafa koja pripada tom presjeku.

$$\mathbf{U} = \mathbf{Q}_f^T \mathbf{V}_t, \quad (51)$$

gdje je \mathbf{V}_t vektor napona glavnih presjeka. Sada je

$$\mathbf{Q}_f \mathbf{Y} \mathbf{Q}_f^T \mathbf{V}_t = \mathbf{Q}_f (\mathbf{I}_g - \mathbf{Y} \mathbf{U}_g), \quad (52)$$

odnosno,

$$\mathbf{Y}_t \mathbf{V}_t = \mathbf{J}_t \quad (53)$$

Ovom matricnom jednačinom je predstavljen sistem od n jednačina sa n nepoznatih. Matrica

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{Q}_f \mathbf{Y} \mathbf{Q}_f^T, \quad (54)$$

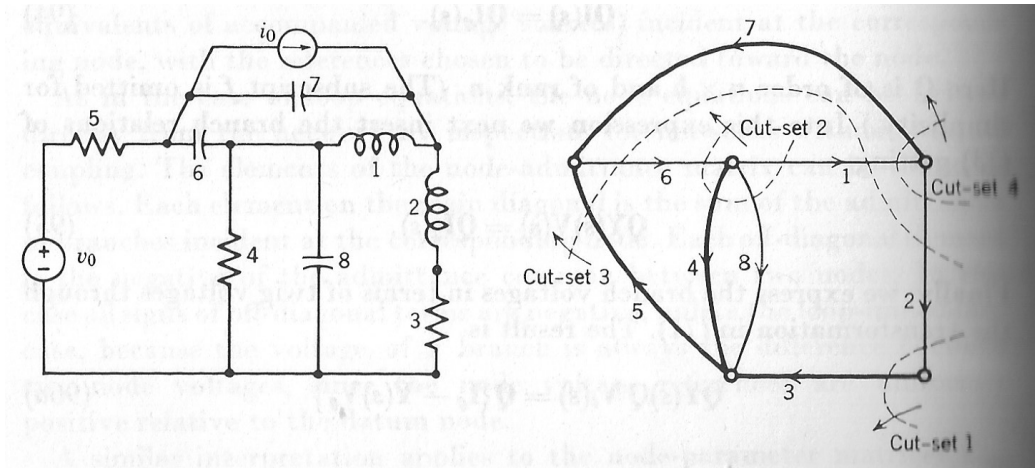
se naziva *matrica admitansi glavnih presjeka*. Elementi matrice admitansi glavnih presjeka se mogu interpretirati na sljedeći način. Vrijednosti elemenata na glavnoj dijagonali su jednake sumi admitansi svih grana koje pripadaju posmatranom presjeku. Elementi koji se ne nalaze na glavnoj dijagonali su jednaki plus ili minus admitansi grane koja je zajednička za dva posmatrana presjeka. Znak plus se koristi kada je orijentacija grane podudarna sa orijentacijama oba presjeka, a minus u suprotnom. Vektor

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{Q}_f (\mathbf{I}_g - \mathbf{Y} \mathbf{U}_g) \quad (55)$$

se naziva *vektor ekvivalentnih strujnih generatora glavnih presjeka*. Vrijednosti elemenata ovog vektora su algebarske sume strujnih generatora,

uključujući i ekvivalentne Nortonove generatore, u granama koje pripadaju odgovarajućem presjeku sa referentnim smjerom koji odgovara orijentaciji presjeka.

Na Slici 22 je dato električno kolo i odgovarajući graf zajedno sa presjecima. Matrica glavnih presjeka je



Slika 22: Primjer.

$$Q_f = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica admitansi grana je ista kao u prethodnom primjeru uz izuzetak induktivne sprege između grana pa je sistem jednačina nezavisnih presjeka

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{L_{22}}{s\Delta} & -\frac{L_{12}}{s\Delta} & & & & & & & \\ -\frac{L_{21}}{s\Delta} & \frac{L_{11}}{s\Delta} & & & & & & & \circ \\ & & G_3 & & & & & & \\ & & & G_4 & & & & & \\ & & & & G_5 & & & & \\ & \circ & & & & sC_6 & & & \\ & & & & & & sC_7 & & \\ & & & & & & & sC_8 & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{QYQ}^T \mathbf{V}_t = \begin{bmatrix} G_3 + \frac{1}{L_2 s} & 0 & \frac{1}{L_2 s} & -\frac{1}{L_2 s} \\ 0 & G_4 + \frac{1}{L_1 s} + s(C_6 + C_8) & \frac{1}{L_1 s} + sC_6 & -\frac{1}{L_1 s} \\ \frac{1}{L_2 s} & \frac{1}{L_1 s} + sC_6 & G_5 + \frac{1}{L_1 s} + \frac{1}{L_2 s} + sC_6 & -\left(\frac{1}{L_1 s} + \frac{1}{L_2 s}\right) \\ -\frac{1}{L_2 s} & -\frac{1}{L_1 s} & -\left(\frac{1}{L_1 s} + \frac{1}{L_2 s}\right) & sC_7 + \frac{1}{L_1 s} + \frac{1}{L_2 s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_5 V_0 \\ I_0 \end{bmatrix}$$