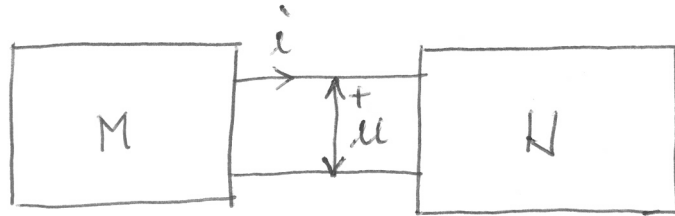


Snage u ustaljenom prostoperiodičnom režimu

13. januar 2016

Posmatrajmo kolo koje se sastoji od dvije podmreže M i N , kao na Slici 1. U kolu je uspostavljen ustaljeni prostoperiodični režim i ulazni napon pod-



Slika 1: Električno kolo sastavljeno od dvije podmreže.

mreže N je

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta), \quad (1)$$

a ulazna struja je

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi). \quad (2)$$

Trenutna ulazna snaga podmreže N je

$$p(t) = u(t) i(t) = U_m \cos(\omega t + \theta) I_m \cos(\omega t + \psi) \quad (3)$$

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2} [\cos(\theta - \psi) + \cos(2\omega t + \theta + \psi)]. \quad (4)$$

Razlikujemo tri slučaja:

1. Ako je $p(t) > 0$, mreža N prima energiju od mreže M ;
2. Ako je $p(t) < 0$, mreža N predaje energiju mreži M ;
3. Ako je $p(t) = 0$, nema razmjene energije između mreža M i N .

Efektivne vrijednosti napona i struje su $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ i $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$, respektivno, pa se ulazna snaga može napisati u obliku

$$p(t) = UI \cos(\theta - \psi) + UI \cos(2\omega t + \theta + \psi) = P + \tilde{p}(t). \quad (5)$$

Prvi sabirak ne zavisi od vremena i vrijedi

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = UI \cos \varphi, \quad (6)$$

gdje je $\varphi = \theta - \psi$, fazni pomak struje u odnosu na napon. Ovaj član predstavlja *srednju (aktivnu) snagu mreže*. Drugi sabirak predstavlja *fluktuirajuću snagu*.

Ako je $\cos \varphi = 1$, odnosno, ako je mreža N rezistivnog karaktera, aktivna snaga dostiže maksimum. Ako je mreža N striktno pasivna onda je $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ pa je aktivna snaga $P > 0$. U ovom slučaju mreža N "troši" energiju. Ako je $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ili $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, onda je aktivna snaga $P = 0$. U ovom slučaju je mreža N bez gubitaka (induktivna ili kapacitivna). Konačno, ako je $P < 0$, mreža N je aktivna. Pasivna mreža može, zbog postojanja reaktivnih elemenata, da u određenim intervalima predaje energiju ostatku kola.

Posmatraćemo tri slučaja:

1. N je rezistivna mreža – može se predstaviti ekvivalentnim otpornikom otpornosti R . Sada je ulazna snaga

$$p_R(t) = u(t) i(t) = \frac{1}{R} u^2(t). \quad (7)$$

U ovom slučaju početne faze napona i struje su jednake, $\theta = \psi$, pa je

$$p_R(t) = U_m I_m \cos^2(\omega t + \theta) = \quad (8)$$

$$= \frac{U_m I_m}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \theta)] = \quad (9)$$

$$= UI [1 + \cos 2(\omega t + \theta)] = \quad (10)$$

$$= P_R [1 + \cos 2(\omega t + \theta)], \quad (11)$$

gdje je $P_R = UI$, aktivna snaga na ekvivalentnom otporniku. Pošto je $P_R = \frac{U^2}{R}$, trenutna snaga $p_R(t) \geq 0$, odnosno, mreža N nikada ne predaje energiju mreži M .

2. N je induktivna mreža – može se predstaviti ekvivalentnim kalemom induktivnosti L . U ovom slučaju fazni pomak je $\varphi = \theta - \psi = \frac{\pi}{2}$. Neka je ulazni napon jednak

$$u(t) = U_m \cos \omega t. \quad (12)$$

Kompleksna ulazna struja je

$$\underline{I} = \frac{U}{j\omega L}, \quad (13)$$

pa je

$$\begin{aligned} i(t) &= \Re \left\{ \sqrt{2} \underline{I} e^{j\omega t} \right\} = \\ &= \frac{U_m}{\omega L} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= I_m \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= I_m \sin \omega t. \end{aligned} \quad (14)$$

Ulazna snaga ekvivalentnog kalema je

$$p_L(t) = u(t) i(t) = U_m \cos \omega t \cdot I_m \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t, \quad (15)$$

odnosno,

$$p_L(t) = UI \sin 2\omega t. \quad (16)$$

Aktivna snaga je u ovom slučaju jednaka nuli

$$P_L = \frac{1}{T} \int_0^T p_L(t) dt = 0. \quad (17)$$

Iako je aktivna snaga u ovom slučaju jednaka nuli, odnosno, mreža je bez gubitaka, ona ipak razmjenjuje energiju sa ostatkom kola. Jednačina (16) ukazuje na to da u jednoj polovini perioda pobude mreža prima energiju od ostatka kola, a u drugoj polovini predaje akumulisanu energiju ostatku kola. Međutim, pošto se radi o istom iznosu energije, mreža je bez gubitaka.

3. N je kapacitivna mreža – može se predstaviti ekvivalentnim kondenzatorom kapacitivnosti C . Fazni pomak je, u ovom slučaju, $\varphi = \theta - \psi = -\frac{\pi}{2}$. Ako je ulazni napon

$$u(t) = U_m \cos \omega t, \quad (18)$$

kompleksna ulazna struja je

$$\underline{I} = j\omega C \underline{U}, \quad (19)$$

a ulazna struja je

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \Re \left\{ \sqrt{2} I e^{j\omega t} \right\} = \\
 &= C\omega U_m \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \\
 &= I_m \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \\
 &= -I_m \sin \omega t.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Ulazna snaga ekvivalentnog kondenzatora je

$$p_C(t) = u(t) i(t) = U_m \cos \omega t \cdot (-I_m \sin \omega t) = -UI \sin 2\omega t. \tag{21}$$

I u ovom slučaju je aktivna snaga jednaka nuli

$$P_C = \frac{1}{T} \int_0^T p_C(t) dt = 0. \tag{22}$$

Analogno razmatranju za slučaj induktivne mreže i u ovom slučaju postoji razmjena energije između kapacitivne mreže i ostatka kola.

U opštem slučaju, N je RLC mreža pa je

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta), \tag{23}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi). \tag{24}$$

Fazni pomak je $\varphi = \theta - \psi$. Ulazna snaga je

$$p(t) = u(t) i(t) = \tag{25}$$

$$= UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \theta + \psi) = \tag{26}$$

$$= UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + 2\theta - \varphi) = \tag{27}$$

$$= UI \cos \varphi [1 + \cos 2(\omega t + \theta)] + UI \sin \varphi \sin 2(\omega t + \theta) = \tag{28}$$

$$= p_P(t) + p_Q(t). \tag{29}$$

Prvi sabirak je, za $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, nenegativan i njime je uvijek opisana snaga koju mreža N prima Srednja vrijednost trenutne snage jednaka je srednjoj vrijednosti prvog sabirka i to je aktivna snaga koju prima mreža N

$$P = UI \cos \varphi. \tag{30}$$

Jedinica za aktivnu snagu je vat (W).

Drugi sabirak mijenja znak u funkciji vremena, pa je njime opisana razmjena energije između mreža M i N . “Amplituda” ovog člana je *reaktivna snaga mreže*

$$Q = UI \sin \varphi. \quad (31)$$

Jedinica za reaktivnu snagu je volt-amper reaktivni (VAR).

U pasivnim mrežama je $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ pa je aktivna snaga uvijek nenegativna. Sa druge strane, ako je fazni pomak $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < 0$, što je karakteristično za kapacitivnu mrežu, reaktivna snaga je negativna. Ako je fazni pomak $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, što je karakteristično za induktivnu mrežu, reaktivna snaga je pozitivna, a ako je mreža rezistivna, $\varphi = 0$, reaktivna snaga će takođe biti jednaka nuli.

Maksimalno odstupanje trenutne od aktivne (srednje) snage naziva se *prividna snaga* i jednaka je proizvodu efektivnih vrijednosti napona i struje

$$S = UI \quad (32)$$

Jedinica za aktivnu snagu je volt-amper (VA). Vidimo da je prividna snaga povezana sa aktivnom i reaktivnom snagom relacijama

$$P = S \cos \varphi \quad (33)$$

i

$$Q = S \sin \varphi. \quad (34)$$

Oдавde slijedi i da je

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (35)$$

Veličina

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}, \quad (36)$$

se naziva *faktor snage* i pokazuje koji dio prividne (raspoložive) snage se stvarno iskoristi u mreži (prijemniku). Prijemnik je bolji ukoliko je faktor snage veći. Na primjer, faktor snage električne grijalice je $\cos \varphi \approx 1$ što je čini dobrim prijemnikom. Faktor snage električnih mašina je u opsegu $0,7 < \cos \varphi < 0,95$. Faktor snage realnog kalema je $\cos \varphi < 0,1$ pa je on loš prijemnik električne energije (ali to je i potrebno u slučaju kalema).

Analogno, uvodi se i *faktor reaktivnosti* kao odnos reaktivne i prividne snage

$$\sin \varphi = \frac{Q}{S}. \quad (37)$$

Prividna snaga je bitna pri projektovanju generatora i sistema za prenos električne energije. Generator mora biti projektovan za nominalni napon pa,

pošto je faktor snage u stvarnim slučajevima manji od jedan, da bi se ostvarila određena aktivna snaga na prijemniku, generator mora biti projektovan za prividnu snagu koja je veća od potrebne aktivne snage. Slijedi da je, da bi se obezbijedila potrebna aktivna snaga, potrebno obezbijediti i veću struju. Veća struja povlači i veće gubitke zbog zagrijavanja provodnika. Iz tog razloga se u elektroenergetici pribjegava *popravci faktora snage*. Ovo se postiže tako što se paralelno prijemniku veže reaktansa suprotne prirode čime se faktor snage cijele mreže povećava. U elektronici i telekomunikacijama snage su manje i prenos energije nije od prevashodnog značaja tako da se na faktor snage ne obraća toliko pažnje.

1 Kompleksna snaga mreže

Snage u kolima u ustaljenom prostoperiodičnom režimu se mogu odrediti i korištenjem kompleksnih predstavnika. Neka su ulazni napon i struja

$$u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \theta), \quad (38)$$

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi), \quad (39)$$

respektivno. Trenutna ulazna snaga je

$$p(t) = u(t)i(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} [\underline{U}e^{j\omega t} + (\underline{U}e^{j\omega t})^*] \frac{\sqrt{2}}{2} [\underline{I}e^{j\omega t} + (\underline{I}e^{j\omega t})^*], \quad (40)$$

gdje su $\underline{U} = Ue^{j\theta}$ i $\underline{I} = Ie^{j\psi}$ kompleksni predstavnici napona i struje, respektivno. Slijedi da je

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{2} (\underline{U}\underline{I}^* + \underline{U}^*\underline{I}) + \frac{1}{2} (\underline{U}\underline{I}e^{j2\omega t} + \underline{U}^*\underline{I}^*e^{-j2\omega t}) = \\ &= \frac{1}{2} [\underline{U}\underline{I}^* + (\underline{U}\underline{I}^*)^*] + \frac{1}{2} [\underline{U}\underline{I}e^{j2\omega t} + (\underline{U}\underline{I}e^{j2\omega t})^*] = \\ &= \Re\{\underline{U}\underline{I}^*\} + \Re\{\underline{U}\underline{I}e^{j2\omega t}\} = \\ &= UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \theta + \psi). \end{aligned} \quad (41)$$

Veličina

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* \quad (42)$$

se naziva *kompleksna snaga* i vrijedi

$$\underline{S} = UIe^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ. \quad (43)$$

Dakle aktivna i reaktivna snaga su realni i imaginarni dio kompleksne snage, respektivno. Prividna snaga je moduo kompleksne snage

$$S = |\underline{S}|. \quad (44)$$

Neka je ulazna impedansa mreže $\underline{Z} = R + jX$. Kompleksna snaga mreže je

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = \underline{Z}\underline{I}\underline{I}^* = \underline{Z}I^2 = RI^2 + jXI^2. \quad (45)$$

Aktivna i reaktivna snaga su sada

$$P = RI^2, \quad (46)$$

$$Q = XI^2, \quad (47)$$

respektivno.

Neka je ulazna admitansa mreže $\underline{Y} = G + jB$. Kompleksna snaga mreže je

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = \underline{U}(\underline{Y}\underline{U})^* = \underline{Y}^*U^2 = GU^2 - jBU^2. \quad (48)$$

Aktivna i reaktivna snaga su

$$P = GU^2, \quad (49)$$

$$Q = -BU^2, \quad (50)$$

respektivno.

Na osnovu Telegenove teoreme, ulazna snaga složene mreže je jednaka zbiru snaga pojedinih podmreža

$$p(t) = \sum_{i=1}^L p_i(t). \quad (51)$$

Slijedi da je, u ustaljenom prostoperiodičnom režimu

$$\underline{S} = \sum_{i=1}^L \underline{S}_i. \quad (52)$$

Dakle, ukupna aktivna, odnosno, reaktivna snaga je jednaka zbiru aktivnih, odnosno, reaktivnih snaga pojedinih podmreža

$$P = \sum_{i=1}^L P_i, \quad (53)$$

$$Q = \sum_{i=1}^L Q_i. \quad (54)$$

Važno je naglasiti da za prividne snage, u opštem slučaju, ne važi analogna relacija, odnosno,

$$S \neq \sum_{i=1}^L S_i. \quad (55)$$